ISSN 0016-5441

SOCIETATEA DE ȘTIINȚE MATEMATICE
DIN REPUBLICA SOCIALISTĂ ROMÂNIA

GAZETA MATEMATICĂ

PUBLICAȚIE LUNARĂ PENTRU TINERET

1

DIN CUPRINS:

- EDITORIAL DE AN NOU
- TABĂRA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ, NĂVODARI, 1987
- CONCURSUL ANUAL AL REZOLVITORILOR, CURTEA DE ARGEȘ, 1987
- NOTE MATEMATICE
- PROBLEME REZOLVATE PENTRU GIMNAZIU, LICEU ȘI CONCURSUL ANUAL AL REZOLVITORILOR
- PROBLEME PENTRU: CICLUL PRIMAR, GIMNAZIU, PRELIMINARE DE TIP O.I.M. PENTRU GIMNAZIU, LICEU, O.I.M., ȘI O.B.M., CONCURS ANUAL

Acest număr a fost realizat în colaborare cu filiala S.S.M. Constanța

ANUL XCIII nr. 1/1988

Scanned with OKEN Scanner

GAZETA MATEMATICĂ

SUMARUL

	Pag.
1. Editorial pentru un an nou, de Acad. *N. Teodorescu*	1
2. Tabăra națională de matematică — Năvodari, 1987, de Acad. *N. Teodorescu*	3
3. Concursul național de informatică al pionierilor, Năvodari, 1987	6
4. Concursul anual al rezolvitorilor Gazetei Matematice, ediția a VIII-a, Curtea de Argeș, 1987, de *Marcel Țena*	13
5. Soluțiile problemelor date la admitere în facultăți, sesiunea specială iunie 1987, pentru componenții echipelor olimpice ale R. S. România, învățământul tehnic, de *Nusfet Șaganai*	26
6. Probleme pentru ciclul primar (1 — 8)	34
7. Probleme rezolvate pentru gimnaziu (E : 9040; E : 9044; E : 9051, E : 9054)	34
8. Probleme pentru gimnaziu (E : 9323 — E : 9346)	36
9. Probleme preliminare de tip O.I.M. pentru elevii din gimnaziu (O.G. : 63, 64)	40
10. Probleme rezolvate pentru liceu (20985, 20993, 20999, 21002)	40
11. Probleme pentru liceu (21317 — 21344)	44
12. Probleme pregătitoare pentru O.I.M. și O.B.M. (O : 536-O : 538)	48
13. Problemă rezolvată pentru concursul anual al rezolvitorilor (C : 664)	48
14. Probleme pentru concursul anual al rezolvitorilor (C : 753 — C : 760)	cop. III

ANUL XCIII | 1 | 1988

COMITETUL DE REDACȚIE

Lector univ. Dumitru Acu, Sibiu; lector univ. Toma Albu; lector univ. Horea Banea, Brașov; lector univ. Octavian Băsescă; conf. univ. Dan Brânzei, Iași; prof. Constantin Cărbunaru; prof. Marcel Chiriță; prof. Pal Dalyay, Tg. Mureș; lector univ. Inocențiu Drăghicescu; prof. Ioana Drăghici; înv. Alexandrina Dumitru; prof. Ilie Gheorghiță; prof. Adrian Ghioca, Sinaia; cercetător principal Gheorghe Gussi; lector univ. Stere Ianuș; prof. Ștefan Kadar, Baia Mare; lector univ. Constantin Niță; prof. univ. Árpád Pál, Cluj-Napoca; lector univ. Laurențiu Panaitopol; prof. Olimpia Popescu, Ploiești; matematician programator Paul Radovici-Mărculescu; lector univ. Gheorghe Sireteanu; lector univ. Ioan Tomescu; prof. Florin Vulpescu-Julea.

REDACȚIA GAZETEI MATEMATICE

Redactor șef (delegat): Acad. N. Teodorescu; redactori principali: prof. Ilie Iliescu, prof. Liviu Pârșan, prof. Marcel Țena; redactori principali onorifici: prof. C. Ionescu-Țiu, asist. univ. Elisabeta Rogai; redactori: prof. Liliana Balaci, prof. Alexandru Constantinescu.

Responsabil de număr: prof. L. Pârșan.

ADRESA REDACȚIEI GAZETEI MATEMATICE

Str. Academiei nr. 14, tel. 14.46.53 — București 1, cod 79543.

Cititorii din străinătate se pot abona prin ROMPRESFILATELIA — Sectorul Export—Import—Presă, Calea Griviței nr. 64 — 66 P.O. Box 12—201, Telex 10376 Prsfir București, ROMÂNIA

Scanned with OKEN Scanner

GAZETA MATEMATICĂ

PUBLICAȚIE LUNARĂ PENTRU TINERET

Anul XCIII nr. 1 Ianuarie 1988

EDITORIAL PENTRU UN AN NOU

de Acad. N. Teodorescu

Pe fiecare prag de An Nou redacția Gazetei Matematice adresează cititorilor ei, celor peste 110.000 de cititori, urarea tradițională de sănătate deplină, lor și familiilor lor, de izbînzi fără zăbavă în cîștigarea cunoștințelor, în rezolvarea problemelor și în alcătuirea de probleme, note și articole ieșite din roadele minții lor. Este o urare care cuprinde și revista noastră fiindcă viața ei este țesută din aceste roade pe care ea le dăruiește tuturor de azi, de mîine și de peste mulți ani.

Prin această dăruire, începută acum 92 de ani, odată cu primul număr al Gazetei, la 15 septembrie 1895, s-a deschis o cale atractioasă de atragere a tineretului înzestrat pentru matematică, de afirmare a începuturilor de vocație și de cultivare a primelor scînteeri de creativitate, ca o garanție pentru carierele viitoare.

Gazeta Matematică a fost credincioasă misiunii pe care și-a asumat-o de la început, mergînd cu tărie pe calea trasată și lărgită de personalitățile care i-au vegheat destinul. Devenind, după instaurarea regimului socialist o publicație de largă circulație și adeziune, fiind căutată și îndrăgită de un număr din ce în ce mai mare de cititori credincioși, ea joacă un rol de mare importanță în atragerea, formarea și perfecționarea tineretului nostru în domeniul prestigios al matematicii.

De aceea, ea caută să se perfecționeze an cu an, să fie mereu tînără și folositoare tuturor cititorilor. În acest scop, rîndurile acestora au fost lărgite în ultimii ani prin introducerea problemelor pentru elevii cursului primar și această inițiativă a primit imediat adeziunea entuziastă și rodnică a elevilor și învățătorilor lor.

Rubrica problemelor de informatică a găsit după o așteptare de cîțiva ani, o prețuire care ne bucură în mod deosebit, fiindcă ea a premers inițiativei Ministerului Educației și Învățămîntului de a introduce lecții de informatică în întregul învățămînt liceal, extinzînd cadrul de pînă acum, care cuprinde clasele de matematică-fizică și informatică.

Cititorii noștri găsesc o bogată colecție de probleme de toate categoriile și pentru toate clasele. Ei dispun de numeroase teme pentru cercuri, pentru pregătirea olimpiadelor naționale și internaționale, pentru concursul anual al rezolvitorilor Gazetei Matematice, la care participă cei mai de frunte dintre elevii din țară, consacrați prin concursurile cîștigate.

Scanned with OKEN Scanner

O grijă specială are redacția pentru alegerea judicioasă a articolelor și notelor matematice, impunînd condiția de aplicabilitate, de a sugera probleme sau conexiuni cu alte rezultate, în special elevilor, cărora aceste articole și note li se adresează cu precădere.

Pentru a evidenția cerința ca revista să fie rodul colaborării a cît mai multor elevi și profesori de pe întreg cuprinsul țării, o parte din numerele apărute în fiecare an este realizată cu concursul filialelor Societății de Științe Matematice. Astfel, fiecărui centru matematic din țară îi este creată posibilitatea de a se afirma prin producția matematică a elevilor și profesorilor săi. În paginile Gazetei apar nume de elevi și profesori din cele mai îndepărtate localități, ceea ce demonstrează popularitatea revistei și sprijinul acordat afirmării celor care sînt înzestrați cu creativitate pentru matematică.

În anul care începe, vom păstra aceste caracteristici ale Gazetei Matematice, care au fost verificate ca bune prin aprecierile cititorilor și vom căuta să le îmbunătățim prin alegerea cît mai exigentă a materialelor primite spre publicare. O atenție mai mare va fi dată rubricilor de probleme rezolvate, care vor fi îmbogățite cu grija de a publica cu predilecție soluții date de elevii rezolvitori la probleme cu conținut valoros și instructiv. Pentru a obține spațiul necesar, vom restrînge întrucîtva spațiul acordat articolelor cu caracter general teoretic, orientîndu-ne mai cu seamă spre publicarea de articole care completează cunoștințe de bază prin sugerarea de tehnici de rezolvare de probleme.

Vom căuta, de asemenea, să acordăm un spațiu mai mare rubricii consacrate numelor rezolvitorilor de probleme spre a da cititorilor satisfacția de a-și vedea numele cît mai des în revistă.

Cum rubricile cu probleme date la diverse concursuri de treaptă, de admitere în învățămîntul superior sînt cele mai dorite de cititorii noștri elevi și profesori, vom rezerva spațiile necesare și vom căuta să publicăm cît mai des astfel de probleme cu soluții și comentarii, urmărind pe cît posibil ca soluțiile să fie semnate de elevii care au dat soluții originale, frumoase și bine redactate. De asemenea vom acorda spațiile necesare problemelor de concursuri regionale, olimpiade naționale și internaționale, ca și celor destinate concursului anual al rezolvitorilor Gazetei Matematice, ajuns la cea de a opta ediție și care reprezintă încoronarea activității de rezolvare de probleme a cititorilor revistei.

Pusă în slujba învățămîntului prin atragerea tineretului nostru spre cunoașterea și fructificarea cunoștințelor matematice, începînd chiar cu primele clase primare, Gazeta Matematică desfășoară o activitate patriotică ce se bucură de adeziunea rodnică a celor 110.000 de cititori, pe care ea îi formează pentru viață. Adresîndu-se în primul rînd și cu precădere elevilor, ea pregătește generațiile de specialiști, care vor fi constructori ai societății noastre începînd din ultimii ani ai secolului viitor al noii revoluții tehnico-științifice, ce se anunță a fi grandioasă.

Păsind în cel de-al 93-lea an de apariție, cu sprijinul fidel al cititorilor și al personalităților noastre matematice, Gazeta Matematică mulțumește călduros tuturor pentru acest sprijin și pentru aprecierea de care beneficiază, urîndu-le cele mai frumoase succese și realizări în activitatea lor profesională și științifică.

Scanned with OKEN Scanner

TABĂRA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ, NĂVODARI

(1—10 septembrie 1987)

de **Acad. N. Teodorescu**

§.1. Tabăra, organizare și participanți

Organizată de Ministerul Educației și Învățământului prin Inspectoratul Școlar Județean și Filiala Societății de Științe Matematice Constanța, cu sprijinul Consiliului Popular al Județului Constanța, *Tabăra Națională de Matematică* și-a desfășurat lucrările la Năvodari în intervalul 1 — 10 septembrie 1987, în cadrul Taberei pentru tineret Năvodari, care se bucură de cele mai frumoase aprecieri din partea copiilor și tineretului din întreaga țară, sub conducerea inimoasă, competentă și devotată a tov. inspector general *Ion Coluna* din M.E.I.

Participanții au fost aleși dintre elevii cei mai distinși premiați la Concursurile naționale și la Olimpiada Internațională de Matematică de la Havana, cărora li s-au adăugat cîțiva elevi premiați la alte concursuri ținute în țară, între care și elevi ai liceelor din Constanța care au locuit însă în familiile respective, participînd zilnic la lucrările taberei.

Pe lîngă aceștia au mai participat, fiind și ei cazați în tabăra națională, încă 17 elevi din diferite județe și 15 elevi din județul Constanța care nu au locuit în tabără, făcînd zilnic naveta necesară. Astfel, totalul elevilor participanți s-a ridicat la 62 dintre care cu cazare 47.

Elevii participanți au fost din clasele a VIII-a — a XII-a și programul de lucrări a comportat un număr de prelegeri cu aplicații ținute de profesori din Constanța și din alte centre din țară, precum și de doi studenți foști olimpiadiști, încheindu-se cu un baraj ținut în ziua de 9 septembrie 1987, urmat de discuția subiectelor date la acest baraj.

Festivitatea de deschidere a avut loc în ziua de 1 septembrie 1987 iar cea de premiere și închidere în ziua de 10 septembrie 1987. Conducerea taberei a revenit Inspectoratului Școlar Constanța prin tovarășa Inspector general prof. *Olga Duța* și tovarășii Inspectori prof. *Ion Tiotoi* și prof. *Gheorghe Andrei*. Ca președinte a fost desemnat Acad. *Nicolae Teodorescu*.

Programul s-a desfășurat zilnic între orele 9^{00} și 12^{30} ținîndu-se prelegeri de cîte 1 1/2 ore, după-amiezele fiind libere. Duminică 6 septembrie 1987 participanții au beneficiat de o excursie pe litoral și de un program artistic. De altfel, în tabăra Năvodari au fost organizate zilnic, după-amiaza și seara, programe artistice prin brigăzi și colective de elevi: dansuri, coruri, recitări, soliști vocali și instrumentali, toate de un înalt nivel artistic. A impresionat, de asemenea, un spectacol de circ oferit de o trupă de elevi sovietici din Vladivostok, prin măiestria și cordialitatea de care tinerii artiști au dat dovadă.

Barajul a constat din cîte 3 probleme propuse spre rezolvare într-un interval de 3 ore, elevii fiind repartizați pe clase astfel: clasa a VIII-a, clasele IX — X și clasele XI — XII.

§.2. Programul de prelegeri

Vom trece rapid în revistă titlurile prelegerilor ținute pe clase și numele profesorilor respectivi, menționînd centrele din care provin numai pentru profesorii din afară de Constanța.

La clasa a VIII-a: *Probleme de tip olimpiadă* (prof. *S. Păsăreanu*); *Ecuații în Z* (prof. *I. Stepan*, prof. *G. Crihan*); *Probleme de olimpiadă* (prof. *C. Cănciulescu*); *Inegalități* (prof. *D. Arventiev*); *Probleme de olimpiadă* (prof. *I. Dinu*); *Inegalități algebrice* (prof. *D. Anton*); *Mulțimi și funcții* (prof. *V. Arsinte*-Mangalia); *Calculul unor sume* (prof. *C. Cănciulescu*); *Probleme de teoria numerelor* (dr. *P. Radovici*, București); *Probleme de concurs* (prof. *I. Tiotoi*).

La clasele IX—X: *Aplicații ale proprietăților de minim* (student *P. Horja*, student *D. Popa*); *Probleme de extrem* (prof. *M. Chiriță*, București); *Inegalități* (prof. *M. Chiriță*); *Probleme de teoria numerelor* (prof. *I. Cucurezeanu*); *Inegalități algebrice și trigonometrice* (prof. *D. Arventiev*); *Fracții continue și aplicații* (dr. *P. Radovici*); *Probleme O.I.M.-Franța* (lector *I. Tomescu*, București); *Probleme olimpiade U.R.S.S.* (lector *I. Tomescu*); *Probleme de concurs date în țările socialiste* (lector *R. Vtorel*).

La clasele XI—XII: *Interpretarea în real a elementelor imaginare de geometrie* (prof. *V. Boskoff*); *Probleme de tip O.I.M.* (prof. *I. Crișan*, Arad); *Probleme de tip O.I.M.* (lector *L. Panaitopol*, București); *Probleme de concurs* (prof. *C. Grasu*); *Probleme de olimpiade R.D.G.* (lector *Gh. Eckstein*, Timișoara); *Probleme de concurs* (prof. *Gh. Andrei*); *Caracterul formativ al laboratorului de matematică și aplicații* (Acad. *N. Teodorescu*).

Scanned with OKEN Scanner

În plus, luni 7 septembrie, a avut loc o întîlnire a tov. Acad. *N. Teodorescu* cu elevii participanți la olimpiadă, la care au participat și alți profesori de matematică, fizică și chimie.

Din program rezultă că majoritatea prelegerilor au fost ținute de profesori din Constanța, dar că și-au dat concursul și cîteva cadre didactice universitare și liceale din alte centre, precum și doi studenți.

Un loc deosebit de important în pregătirea elevilor participanți a revenit inegalităților, care au ocupat patru ședințe. Dar atenția cea mai mare a fost dată problemelor de concurs și olimpiade cărora le-au fost consacrate 13 ședințe, ceea ce a dat taberei caracterul unei activități de intensă pregătire preliminară unui concurs iminent. Desigur că participanții au primit cu bucurie și interes această orientare de antrenament intensiv, însă considerăm că acoperirea unei arii mai largi decît cea a problemelor date la concursuri, atunci cînd nu este în joc pregătirea imediată a concurenților, ar fi de natură să le ofere acestora cunoștințe și tehnici noi și utile chiar și pentru viitoarele concursuri.

Temelor cu un conținut teoretic și aplicativ mai larg le-au revenit 10 ședințe, în care s-au făcut și aplicații interesante și sugestive. Astfel, programul de prelegeri a fost interesant și instructiv nu numai pentru elevi, ci și pentru alți auditori din rîndurile profesorilor.

Participarea la tabără a elevilor din clasa a VIII-a a dat acestora putința de a se iniția în activitățile de pregătire a viitoarelor concursuri, alături de colegii lor mai mari, care au cîștigat experiența necesară acestor concursuri.

§3. Barajul și premiile acordate

În încheierea lucrărilor taberei a avut loc o probă de baraj ținută în ziua de 9 septembrie 1987.

Dăm în continuare temele propuse spre rezolvare în 3 ore:

Clasa a VIII-a

1. Fie polinoamele $P(X) = X^6 - 4X^3 + 3$ și $Q(X) = X^6 - 3X^3 + 2$. Să se arate că $P[Q(X)]$ se divide cu $X^6 - 3X^3 + 1$.

Prof. *Ion Tiotoi*

2. Fie A, B, C, D, E puncte conciclice luate în această ordine astfel încît $AC = BD = CE = m$. Dacă $AC \cap BD = \{K\}$ și $AD \cap BE = \{L\}$ să se determine BK în funcție de m astfel ca LK să fie perpendiculară pe BC.

Prof. *Antonio Zahariade*

3. Să se arate că mulțimea de numere

$$M = \{1^2, 2^2, 3^2, \ldots, 2000^2\}$$

se poate partiționa în două submulțimi disjuncte A și B care conțin fiecare 1000 numere, astfel încît suma numerelor din A să fie egală cu suma numerelor din B.

Clasele IX–X

1. Să se demonstreze că:

$$7a^2 + b^2 + 28|S \leqslant 10ab + 10ac + c^2$$

pentru orice triunghi ABC cu lungimile laturilor a, b, c și aria S. Cînd are loc egalitatea?

Prof. *Constantin Caragea*

2. În triunghiul ABC de arie S se construiește mediana BD. Pe segmentul BD se consideră punctul M și se construiesc simetricele A_1, B_1, C_1 ale vîrfurilor A, B, C ale triunghiului față de M. Să se arate că aria porțiunii din plan comune triunghiurilor ABC și $A_1B_1C_1$ este mai mică sau egală cu $\frac{2}{3} S$.

Pentru ce poziție a punctului M se realizează egalitatea cu $\frac{2}{3} S$?

3. Să se arate că pentru orice număr natural $n \geqslant 1$ are loc inegalitatea

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\sigma(k)}{k} < 2n$$

unde $\sigma(k)$ este suma divizorilor pozitivi ai lui k.

Prof. *Ion Cucurezeanu*

Clasele XI—XII

1. Fie o funcție $f:(0,+\infty)\to\mathbf{R}$, continuă și mărginită, iar $\alpha\in[0,1]$. Să se arate că dacă

$$\lim_{x\to\infty} x^{\alpha}\,|f(x+2)-2f(x+1)+f(x)|=a,$$

atunci $a=0$.

Prof. *Marcel Chirilă* (București)
Prof. *Mihai Piticari* (Cîmpulung-Moldovenesc)

2. Fie A o matrice pătrată de ordinul n cu elementele numere întregi care verifică egalitatea

$$25A^{25}=9A^{9}+16I_n$$

unde I_n este matricea unitate de ordinul n. Să se arate că:

a) Există o constantă $M>0$ astfel încît pentru orice număr natural $m\geq 1$ și $i,j=1,\ldots,n$ să avem

$$|(A^{m})_{i,j}|\leq M;$$

b) $|\det A|=1$.

Prof. *Marius Cavachi*

3. Să se determine $x\in\mathbf{N}$ astfel încît

$$\operatorname{tg}\frac{6\pi}{(x+1)!}=\frac{6}{x!}.$$

Prof. *Gheorghe Andrei*
Prof. *Contantin Caragea*

Au fost acordate următoarele premii:

Clasa a VIII-a

1. *Butoi Cristian*, Constanța — premiul I
2. *Stoian Loredana*, " — premiul II
3. *Chiș Amalia*, București — premiul II
4. *Teodor Brusalis*, " — premiul II
5. *Marina George*, " — premiul III
6. *Ciupercă Cătălin*, Brăila — premiul III

Clasele IX — X

1. *Sandovici Adrian*, Fălticeni (X) — premiul I
2. *Constantin Cătălin*, Galați (X) — premiul II
3. *Ionescu Mihai*, București (X) — premiul II
4. *Beleuz Mihail*, Buhuși (X) — premiul III
5. *Beldiman Octavian*, București (IX) — mențiune
6. *Cașcaval Radu*, Iași (IX) — mențiune

Clasele XI — XII

1. *Luca Florian*, Galați (XII) — premiul I
2. *Beli Nicolae*, București (XII) — premiul II
3. *Vasiu Adrian*, Cluj-Napoca (XI) — premiul II
4. *Istrate Gabriel*, Galați (XII) — premiul III
5. *Dan Nicușor*, Făgăraș (XI) — mențiune
6. *Moroianu Andrei*, București (X) — mențiune
7. *Popa Dan Octavian*, București (XII) — mențiune

Scanned with OKEN Scanner

O comportare remarcabilă au avut concurenții din Constanța, care la clasa a VIII-a au cîștigat primele două premii, cel din Galați cu un premiu întîi la clasa a XII-a, un premiu II la clasa a X-a și un premiu III la clasa a XII-a. La clasa a X-a premiul I a revenit unui elev din Fălticeni, ceea ce dovedește că și în centrele mai mici sînt cultivate și promovate aptitudinile pentru matematică, apreciere valabilă și pentru Buhuși, care a cîștigat un premiu III tot la clasa a X-a.

Elevii din București au cîștigat trei premii II, un premiu III și trei mențiuni, restul de premii și mențiuni revenind elevilor din Cluj-Napoca, Făgăraș, Brăila și Iași, ceea ce corespunde unei bune repartiții teritoriale.

3.4. Concluzii și sugestii

Tabăra concurs de nivel național, organizată la Năvodari pentru elevi aleși dintre cîștigătorii premiilor la concursurile naționale și internaționale și dintre alți elevi cu merite deosebite în pregătirea lor matematică, a însemnat un succes care trebuie menționat, atît pentru buna organizare, cît și pentru activitatea lor desfășurată de-a lungul celor 10 zile.

Merite deosebite pentru organizare și desfășurare revin în primul rînd Inspectoratului Școlar Constanța prin tovarășa insp. general *Olga Dufu* și tovarășii inspectori prof. *I. Tiotoi* și *C. Andrei*, care au participat neobosiți la toate formele de activitate și au adus un sprijin prețios reușitei acestora. Alături de Inspectorat au fost profesorii din Constanța care au asigurat atît majoritatea prelegerilor, cît și cea a problemelor barajului, inclusiv corectarea și notarea lucrărilor (citați nominal în program).

Condițiile de cazare și masă au fost bune și ambianța taberei plăcută și utilă. Se cuvine să adresăm conducerii M.E.I. mulțumiri călduroase pentru inițiativa organizării taberei, ca și pentru sprijinul acordat desfășurării ei.

Reușita taberei ne îndeamnă să sugerăm extinderea selecționării participanților la toți premianții întîi ai concursurilor de nivel național și interjudețean, avînd în vedere că adeseori criteriile stricte de selecționare pentru loturile olimpice limitează selecționările, ceea ce face ca unii elevi foarte buni înzestrați și cu o activitate de înaltă calitate să nu poată fi selecționați, ceea ce îi descurajează și îi frînează în avînturile lor. În special, concursurile care cer viteze prodigioase de rezolvare pot elimina elemente strălucite, dar mai puțin rapide care, în schimb pot aduce soluții originale difrite de cele ale autorilor problemelor, ceea ce constituie fără îndoială merite care ar trebui răsplătite.

Uneori repetarea concursurilor sau participarea concurenților premiați la un concurs de prestigiu la un alt concurs ulterior poate aduce surprize, ca la sport, în clasificarea participanților, aducînd în lumina succesului concurenți prea puțin sau deloc remarcați anterior. O tabără națională pentru premianții întîi ai tuturor concursurilor fiecărui an ar da sugestii utile pentru selecționarea loturilor succesive de concurenți pregătiți pentru Olimpiadele națională și internațională, ca și pentru Balcaniada anului următor. Ar fi și o răsplată elegantă pentru premianții concursurilor anuale, care depun eforturi și ambiții nobile de a se afirma în domeniul matematicii.

CONCURSUL REPUBLICAN DE INFORMATICĂ (PENTRU PIONIERI ȘI ȘCOLARI)

Năvodari, 14 — 22 iulie 1987

de Nicolae Țăpuș, Viorica Hărăbor, Mihai Jitaru, Radu Nicolescu

În vederea legării tot mai strînse a învățămîntului și a activităților extrașcolare de practică, de producție și cercetare, în consens cu cerințele revoluției științifico-tehnice contemporane, și în țara noastră s-a pus problema popularizării informaticii în rîndul copiilor, transmiterii acestora a unor noțiuni teoretice din acest domeniu, a formării la copii a unor deprinderi practice de utilizare a calculatoarelor personale.

Ca urmare, Consiliul Național al Organizației Pionierilor a declanșat, încă din anul 1985, prin comisia sa pentru activitatea științifică și tehnică, în colaborare cu Institutul de Tehnică de Calcul și Informatică, Institutul Politehnic București și fabricile producătoare de calculatoare personale, un Program național de implementare a informaticii în rîndul copiilor în vîrstă de 7—14 ani. În acest scop s-au înființat și dotat cercuri de infor-

Scanned with OKEN Scanner

matică în Casele pionierilor și șoimilor patriei și în școli. Pentru finalizarea superioară a activității desfășurate în aceste cercuri C.N.O.P. organizează anual, în colaborare cu Ministerul Educației și Învățământului, concursul republican de informatică pentru pionieri și școlari, cu trei etape : de masă (pe școală, casă, localitate), județeană și pe țară.

În perioada 14 — 22 iulie a.c., a avut loc în complexul de odihnă pentru copii de la Năvodari, etapa pe țară a concursului republican de informatică pentru pionierii din clasele V — VIII.

Concursul s-a desfășurat individual la nivelul fiecărei clase. La concurs au participat cîștigătorii etapei județene, toate județele avînd cîte un reprezentant la fiecare clasă.

Concursul a constat din două probe :

— *proba impusă* — rezolvarea în timp limitat a unei probleme stabilită de juriu (probleme ale căror enunțuri și rezolvări sînt date în continuare);

— *proba liberă* — susținerea programelor originale elaborate în timpul anului școlar, în cadrul cercurilor de informatică la care participă.

Proba impusă a avut pondere dublă față de proba liberă.

În urma desfășurării concursului s-a stabilit un clasament individual și unul colectiv (pe județe), clasament ce se prezintă mai jos. Pionierilor cîștigători ai locurilor I-III în clasamentul individual și în cel colectiv li s-au înmînat diplome, plachete și premii în obiecte din partea C.N.O.P., I.T.C.I. și I.C.E. — București.

În tabără, după desfășurarea concursului, s-au organizat acțiuni politico-educative de masă cu caracter tehnico-științific : întîlniri și dezbateri cu specialiști din domeniul informaticii și tehnicii de calcul, demonstrații, vizite în întreprinderi de profil, un almanah tehnico-științific realizat cu sprijinul revistei "Știință și tehnică", o gală de filme științifice și de anticipație, etc.

O caracterizare generală a desfășurării concursului la nivelul fiecărei clase ar fi următoarea :

Comportarea elevilor din clasa a V-a subliniază faptul că se pot aborda o serie de cunoștințe de informatică încă de la vîrstă fragedă. Copiii învață limbaje de programare cum ar fi BASIC sau LOGO cu multă ușurință, din punctul de vedere al sintaxei și semanticii instrucțiunilor. Apar unele probleme legate de formarea gîndirii algoritmice și a formalizării rezolvării diverselor probleme.

Clasa a VI-a a avut cea mai omogenă comportare. Subiectul a fost tratat într-o formă sistematică evidențiind o bună înțelegere a noțiunilor fundamentale.

Elevii din clasa a VII-a au prezentat soluții originale deși s-a considerat că subiectul a avut un grad ridicat de dificultate.

La clasa a VIII-a majoritatea elevilor au rezolvat corect problema impusă de juriu, ceea ce denotă o bună pregătire a acestora precum și un grad ridicat de maturizare profesională.

În acest context menționăm că juriul republican a fost alcătuit din : *Tăpuș Nicolae* — I.P.B, *Anghel George* — C.N.O.P., *Moisa Trandafir* — I.P.B', *Hărăbor Viorica*, *Jitaru Mihai* și *Niculescu Stelian* de la I.T.C.I., *Nicolescu Radu* — Univ. București, *Bednar Horst* — Univ. Brașov, *Onea Emil* — C.J.O.P. Vrancea, *Bărbat Mihaela* — C.P.S.P.-4, București și *Pupeză Gheorghe* — șc. nr. 6 Sibiu.

În concluzie trebuie subliniat faptul că pionierii din clasele V — VIII au făcut progrese evidente în scurta perioadă de cînd a început instruirea în acest domeniu.

Acest progres se datorează în primul rînd activității susținute desfășurată de C.N.O.P. pentru înființarea, dotarea și îndrumarea cercurilor de informatică din C.P.S.P. și școli, precum și preocupării C.N.O.P., M.E.I. de instruire a cadrelor care conduc astfel de cercuri.

Un rol important în obținerea acestor succese l-a jucat sprijinul prețios acordat C.N.O.P. de către I.P.-București, I.T.C.I. și întreprinderile producătoare de calculatoare din cadrul C.I.E.T.C. București.

De asemenea trebuie remarcat și efortul depus de profesorii conducători ai cercurilor de informatică și bineînțeles, al copiilor care sînt foarte dornici să pătrundă în tainele acestui domeniu de vîrf.

Concluziile evidențiate de concursul repulican de informatică pentru pionieri, subliniază faptul că sînt create toate premizele ca activitatea desfășurată în cercurile de informatică să continue în bune condiții, astfel ca acest material uman deosebit — copiii — să fie modelat în conformitate cu cerințele viitoare ale societății noastre.

Rezultatele obținute :

a) Clasamentul individual:

Clasa a V-a

Premiul I	— *Tăpuș Cristian*	— București	30 p
Premiul II	— *Lavric Aurelian*	— Galați	29 p
Premiul III	— *Șelaru G.*	— Buzău	23 p

Clasa a VI-a

Premiul I	— *Agapie Andrei*	— Vaslui	30 p
Premiul II	— *Prăun Emil*	— București	29 p
Premiul III	— *Moldovan Alin*	— Cluj	28 p

Clasa a VII-a

Premiul I	— *Jigorea Răzvan*	— Arad	30 p
Premiul II	— *Preda Radu*	— Bacău	29 p
Premiul III	— *Slătineanu Sebastian*	— Iași	28 p

Clasa a VIII-a

Premiul I	— *Petrescu Răzvan*	— Iași	30 p
Premiul II	— *Tepelea Alexandru*	— București	27 p
Premiul III	— *Jakob Tiberiu*	— Covasna	26 p

b) Clasamentul colectiv:

Locul I — mun. București 108p
Locul II — jud. Sibiu 91p
Locul III — jud. Covasna 86p

Enunțurile problemelor

1. Clasa a V-a

Se dă un șir de numere naturale. Găsiți valoarea maximă și valoarea minimă, iar cu ajutorul lor desenați un dreptunghi ale cărui laturi sînt aceste valori. În interiorul dreptunghiului scrieți aria sa.

2. Clasa a VI-a

Să se genereze două șiruri A și B de numere naturale. Elementele primului șir sînt cuprinse între 0 și 99, iar elementele celui de-al doilea șir sînt cuprinse între 1 și 999.

Cele două șiruri au același număr de elemente care este specificat de la tastatură. Utilizînd elementele șirurilor A și B să se genereze un șir C după următoarea regulă:

Ci = Ai — Bi dacă Ai este par și Bi este impar;
Ci = Ai + Bi dacă Ai este impar și Bi este par;
Ci = Ai * Bi dacă Ai și Bi sînt ambele fie pare, fie impare.

Să se afișeze, cîte 4 elemente pe un rînd, elementele șirului A, apoi elementele șirului B, apoi elementele șirului C.

3. Clasa a VII-a

Se citesc maxim 15 perechi de numere naturale (Xi, Yi) ce reprezintă coordonatele unor puncte.

Să se scrie un program care ordonează crescător aceste perechi după valorile Xi și unește prin segmente de dreaptă aceste coordonate.

Avînd în vedere că aceste perechi pot avea valori numerice oarecare se cere o normalizare a acestora pentru a putea fi reprezentate optim pe ecran într-un dreptunghi cu laturile de 200 respectiv 150 puncte.

4. Clasa a VIII-a

Se citesc datele despre un grup de maxim 20 de elevi. Fiecare elev este specificat prin: Nume, Prenume, Nota Mat, Nota Rom, Nota Fiz.

Se cere să se elaboreze un program care afișează grupul de elevi, cu toate datele despre ei, la cerere astfel:

a) în ordine alfabetică;

b) în ordine descrescătoare a mediilor celor trei note;

c) specificîndu-se un nume de elev să se reprezinte grafic notele și media acestuia sub forma unor dreptunghiuri cu baza aceeași și înălțimea proporțională cu nota, respectiv media. Fiecare dreptunghi va fi colorat cu altă culoare.

Scanned with OKEN Scanner

Soluții

1. Clasa a V-a

```
10 REM citește șirul de numere
20 INPUT "Nr. de elemente:"; n
30 DIM a(n)
40 FOR i = 1 TO n
50 PRINT "a("; i;") = ";
60 INPUT "valoare element = "; a(i)
70 PRINT a (i)
80 NEXT i
90 REM calculează minim și maxim
100 LET min = a(1):
    LET max  = a(1)
110 FOR i = 1 TO n
120 IF min> a(i) THEN LET min = a(i)
130 IF max< a(i) THEN LET max = a(i)
140 NEXT i
150 REM calculează aria
160 LET aria = max*min
170 CLS
180 PRINT "valoare maxima = "; max
190 PRINT "valoare minimă =:"; min
200 REM desenează dreptunghi
210 IF max > 150 THEN GO TO 270
220 IF max < 72 THEN GO TO 300
230 PLOT 0,0
240 DRAW max — 1,0:
    DRAW 0, min —1:
    DRAW — max + 1,0:
    DRAW 0,—min+ 1
250 PRINT AT 21—min/16, max/16 — 6; "aria = "; aria
260 STOP
270 INPUT "cu ce scara doriti sa micsorati?"; s
280 LET max = max/s:
    LET min = min/s
290 GO TO 210
300 INPUT "cu ce scara doriți să măriți?"; s
310 LET max = max * s:
    LET min = min * s
320 GO TO 210
```

2. Clasa a VI-a

```
10 REM programul generează un șir de numere naturale pe baza a două șiruri
20 INPUT "Nr de elemente ale șirurilor = "; n
30 DIM a(n):
    DIM b(n):
    DIM c(n):
    DIM e(n)
40 REM generare elemente a (i) și b(i)
50 FOR i = 1 TO n
60 LET a(i) = INT (100*RND):
    LET b(i) = 1 + INT (999*RND)
70 NEXT i.
80 REM generare elemente șir c
90 FOR i = 1 TO n
100 LET ra = a(i) — 2*INT (a(i)/2):
    LET rb = b(i) — 2*INT(b(i)/2)
110 IF ra = 0 AND rb = 1 THEN LET c(i) = a(i) — b(i)
120 IF ra = 1 AND rb = 0 THEN LET c(i) = a (i) + b(i)
130 IF ra = rb THEN LET c(i) = a(i)*b(i)
140 NEXT i
```

Scanned with OKEN Scanner

```
150 PRINT
160 PRINT "Elementele şirului a :"
170 FOR i = 1 TO n:
    LET e(i) = a(i):
    NEXT i
180 GO SUB 290
190 PRINT
200 PRINT "Elementele şirului b :"
210 FOR i = 1 TO n:
    LET e(i) = b(i):
    NEXT i
220 GO SUB 290
230 PRINT
240 PRINT "Elementele şirului c :"
250 FOR i = 1 TO n:
    LET e(i) = c(i):
    NEXT i
260 GO SUB 290
270 PRINT
280 STOP
290 REM subrutina de tipărire sir
300 REM intrări — e(i) elementele şirului
310 REM ieşiri — tipăreşte elementele şirului
320 LET x = 0
330 FOR i = 1 TO n
340 PRINT TAB 7 * x; e(i);
350 LET x = x + 1
360 IF x = 4 THEN PRINT:
    LET x = 0
370 NEXT i
380 RETURN
```

3. Clasa a VII-a

```
 10 INPUT "Nr. perechi (x, y) = "; n
 20 DIM x(n):
    DIM y(n):
    DIM e(n):
 30 REM citeşte perechi
 40 PRINT "Introduceti valorile perechilor"
 650 FOR i = 1 TO n
 60 PRINT "x("; i;") = ";
 70 INPUT "x = "; x (i)
 80 PRINT x(i);
 90 PRINT "y("; i;")= ";
100 INPUT "y=" ; y(i)
110 PRINT y(i); ""
120 PRINT
130 NEXT i
140 REM calculează xmin şi xmax
150 FOR i = 1 TO n:
    LET e (i) = x(i):
    NEXT i
160 GO SUB 430
170 LET xmin = min:
    LET xmax = max
180 REM calculează ymin şi ymax
190 FOR i = 1 TO n:
    LET e(i) = y(i):
    NEXT i
200 GO SUB 430
210 LET ymin = min:
    LET ymax = max
220 REM ordonare după valorile x
```


Scanned with OKEN Scanner

```
230 LET indo = 0
240 FOR i = 1 TO  n - 1
250 IF x(i) < = x(i + 1) THEN  GO TO  290
260 LET indo = 1
270 LET tx = x(i):
    LET x(i) = x(i + 1):
    LET  x(i + 1) = tx
280 LET ty = y(i):
    LET y(i) = y(i + 1):
    LET y (i + 1) = ty
290 NEXT i
300 IF indo = 1 THEN GO T O  220
310 REM calculul factorului de normalizare xn respectiv  yn
320 IF xmin = xmax  THEN LET xn = 0:
    GO TO 340
330 LET  xn = 199/(xmax - xmin)
340 IF  ymin = ymax THEN LET yn = 0:.
    GO TO  360
350 LET yn = 149/(ymax - ymin)
360 REM trasare grafică
370 CLS
380 PLOT 0,  (y(1) - ymin)* yn
390 FOR i = 1  TO n - 1
400 DRAW  (x(i + 1) - x(i))*  xn,  (y(i + 1)-y(i)) * yn
410 NEXT i
420 STOP
430 REM rutina de calcul a valorii minime şi maxime dintr-un şir de numere
440 REM intrări-şirul de numere
450 REM ieşiri - min = valoarea minimă
460 REM        max = valoarea maximă
410  FOR i = 1 TO ne:
    IF e $ (1) = n $ (i) THEN LET pe = i
420 NEXT i
430 IF pe =  0 THEN CLS:
    PRINT " nu exista elev cu acest nume":
    GO TO 270
440 CLS
450  INK 2:
    LET nota = m(pe):
    PLOT 120,0:
    GO  SUB 570
460  INK 3:
    LET  nota = r(pe):
    PLOT 152,0:
    GO  SUB 570
470  INK  4:
    LET nota = f(pe):
    PLOT 184,0:
    GO  SUB 570
480  INK 5:
    LET nota = g(pe):
    PLOT 216,0:
    GO  SUB 570
490  INK 0
500 PRINT "Nume Prenume Mat Rom Fiz Med"
510 PRINT n $ (pe);  p $ (pe);
520 PRINT m(pe);"    ";
530 PRINT r(pe);"    ";
540 PRINT f(pe);"    ";
550 PRINT g(pe);"    ";
560 GO TO 270
570 REM rutina pentru trasare dreptunghi proportional cu nota
580 REM intrări nota
590 DRAW 24,0:
```


Scanned with OKEN Scanner

```
    DRAW 0, nota * 15 :
    DRAW — 24,0 :
    DRAW 0,— nota * 15
600 RETURN
610 REM rutina de schimbare poziţie 2 elevi
620 LET indo = 1
630 LET t $ = n $ (i) :
    LET n $ (i) = n $ (i + 1) :
    LET n $ (i + 1) = t $
640 LET t $ = p $ (i) :
    LET p $ (i) = p $ (i + 1) :
    LET p $ (i + 1) = t $
650 LET t = m(i) :
    LET m(i) = m(i + 1) :
    LET m(i + 1) = t
660 LET t = r(i) :
    LET r(i) = r(i + 1) :
    LET r(i + 1) = t
670 LET t = f(i) :
    LET f(i) = f(i + 1) :
    LET f(i + 1) = t
680 LET t = g(i) :
    LET g(i) = g(i + 1) :
    LET g(i + 1) = t
690 RETURN
700 REM rutina de tipărire
710 REM intrări — datele despre elevi
470 LET min = e(1)
    LET max = e(1)
480 FOR i = 1 TO n
490 IF min> e(i) THEN LET min = e(i)
500 IF max < e(i) THEN LET max = e(i)
510 NEXT i
520 RETURN
```

4. Clasa a VIII-a

```
 10 READ ne
 20 DIM n$(ne, 9) :
    DIM p $ (ne, 7) :
    DIM e $ (1, 9):
    DIM m(ne) :
    DIM r(ne) :
    DIM f(ne) :
    DIM g(ne)
 30 REM citire date despre elevi
 40 FOR i = 1 TO ne :
    READ n $ (i), p $ (i), m(i), r(i), f(i)
 50 NEXT i
 60 REM media notelor
 70 FOR i = 1 TO ne :
    LET g(i) = INT (100*(m(i)+ r(i) + f(i)/3) /100 :
    NEXT i
 80 REM dialog cu utilizatorul
 90 CLS
100 PRINT "Alegeţi una din funcţii"
110 PRINT "1 — ordine alfabetică"
120 PRINT "2 — ordine descrescătoare me ii"
130 PRINT "3 — reprezentare grafică note
140 INPUT "optiune = "; o
150 IF o = 1 THEN GO TO 190
```


Scanned with OKEN Scanner

```
160 IF o = 2 THEN GO TO 290
170 IF o = 3 THEN GO TO 270
180 GO TO 140
190 REM rutina de ordonare alfabetica
200 LET indo=0
210 FOR i = 1 TO ne-1
220 IF n$(i) < = n$(i + 1) THEN GO TO 240
230 GO SUB 610
240 NEXT i
250 IF indo = 1 THEN GO TO 190
260 GO SUB 700
270 INPUT "apasati orice tasta"; q$
280 GO TO 80
290 REM optiune 2 ordonare după medie
200 LET indo = 0
310 FOR i = 1 TO ne-1
320 IF g(i)> = g(i + 1) THEN GO TO 340
330 GO SUB 610
340 NEXT i
350 IF indo = 1 THEN GO TO 290
360 GO TO 260
370 REM opțiune 3 reprezentare note elev
380 INPUT "introduceți nume elev : "; e$(1)
390 REM cauta elev
400 LET pe = 0
720 REM ieșiri — afiseaza aceste date
730 PRINT "Nume Prenume Mat Rom Fiz Med"
740 FOR i = 1 TO ne
750 PRINT n$(i);
760 PRINT p$(i);
770 PRINT m(i);"    ";
780 PRINT r(i); "    ";
790 PRINT f(i); "    ";
800 PRINT g(i)
810 NEXT i
820 RETURN
830 DATA 3
840 DATA "Popescu", "Ion", 8, 4, 3
850 DATA "Ionescu", "Petre", 4, 7, 8
860 DATA "Manea", "Dan", 9, 8, 7
```

Notă: Soluțiile prezentate au la bază rezolvările date în cadrul concursului de concurenții premiați. Avînd în vedere vîrsta acestora precum și timpul limitat, nu s-a cerut luarea în considerare a cazurilor de excepție.

CONCURSUL ANUAL AL REZOLVITORILOR GAZETEI MATEMATICE, EDIȚIA A VIII-A, CURTEA DE ARGEȘ, 1987

Prezentare de Marcel Țena

PROBA DE RAȚIONAMENT, 28 august 1987

Clasele a IX-a și a X-a

1. *Considerăm un număr complex nereal z_0 și definim funcția*
$f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ prin $f(a + bi) = a + bz_0$, $(\forall)\ a, b \in \mathbb{R}$.
a) *Să se demonstreze că f este o bijecție;*
b) *Să se determine valorile lui z_0 pentru care $f = f^{-1}$.*

Ioana Munteanu, profesoară, Focșani

Soluție: a) *Injectivitatea funcției f.* Fie $a_1 + b_1 i$, $a_2 + b_2 i \in \mathbb{C}$, astfel încît $f(a_1 + b_1 i) = f(a_2 + b_2 i)$ și să arătăm că $a_1 + b_1 i = a_2 + b_2 i$ $(a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{R})$. Într-adevăr, putem scrie: $f(a_1 + b_1 i) = f(a_2 + b_2 i) \Leftrightarrow a_1 + b_1 z_0 = a_2 + b_2 z_0 \Leftrightarrow a_1 - a_2 = (b_2 - b_1) z_0$, (1).

Dacă am avea $b_1 \neq b_2$ din (1) ar rezulta $z_0 = \dfrac{a_1 - a_2}{b_2 - b_1} \in \mathbb{R}$, ceea ce ar contrazice alegerea lui z_0. Prin urmare, $b_1 = b_2$ și folosind (1) rezultă $a_1 = a_2$, deci $a_1 + b_1 i = a_2 + b_2 i$.

Scanned with OKEN Scanner

Surjectivitatea funcției f. Fie $z = \alpha + \beta i \in \mathbf{C}$ arbitrar și să găsim $z' = a + bi \in \mathbf{C}$ astfel încît $f(z') = z$, $(a, b, \alpha, \beta \in \mathbf{R})$.

Notînd $z_0 = u + iv$, $u \in \mathbf{R}$, $v \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$, egalitatea $f(z') = z$ devine succesiv:

$$f(a + bi) = \alpha + i\beta \Leftrightarrow a + bz_0 = \alpha + i\beta \Leftrightarrow a + b(u + iv) = \alpha + i\beta \Leftrightarrow \begin{cases} a + bu = \alpha \\ bv = \beta \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = \alpha - \dfrac{\beta u}{v} \\ b = \dfrac{\beta}{v} \end{cases}.$$

Așadar pentrru $z' = \alpha - \dfrac{\beta u}{v} + \dfrac{\beta}{v} i$ avem $f(z') = z$.

b) Egalitatea $f = f^{-1}$ este echivalentă cu $f \circ f = 1_{\mathbf{C}}$, adică $(f \circ f)(a + bi) = a + bi$, $(\forall)$ $a, b \in \mathbf{R}$. Cu notația anterioară $z_0 = u + iv$, ultima egalitate se scrie succesiv:
$f(a + bz_0) = a + bi \Leftrightarrow f(a + bu + bvi) = a + bi \Leftrightarrow a + bu + bvz_0 = a + bi \Leftrightarrow a + bu + bvu +$
$+ bv^2 i = a + bi \Leftrightarrow \begin{cases} a + bu + bvu = a \\ bv^2 = b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} bu(1 + v) = 0 \\ b(v^2 - 1) = 0, \end{cases}$ $(\forall)$ $a, b \in \mathbf{R}$, (2).

Luînd $b \neq 0$, din a doua egalitate din (2) rezultă $v \in \{-1, 1\}$. Dacă $v = -1$, prima egalitate se verifică pentru orice $a, b \in \mathbf{R}$, deci numerele z_0 căutate sînt de forma $z_0 = u - i$, $u \in \mathbf{R}$.

Dacă $v = 1$, prima egalitate din (2) devine $2bu = 0$ și alegînd $b \neq 0$, reclamă în mod necesar $u = 0$. Așadar numărul z_0 corespunzător este $z_0 = i$.

În concluzie avem echivalența:

$$f = f^{-1} \Leftrightarrow z_0 \in \{i\} \cap \{u - i \mid u \in \mathbf{R}\}.$$

2. *Să se determine lungimile laturilor triunghiului ABC știind că sînt numere întregi și* $a = 16$, $\cos A = -\dfrac{1}{4}$.

Iulia Sebestyen, profesoară, Tg. Mureș

Soluție: Cu notațiile obișnuite, aplicînd teorema cosinusului avem:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A \Leftrightarrow 256 = b^2 + c^2 + \frac{bc}{2} \Leftrightarrow 2b^2 + 2c^2 + bc - 512 = 0, \qquad (1).$$

Deoarece $\cos A < 0$, rezultă că A este obtuz, deci A este cel mai mare unghi și, corespunzător, a va fi cea mai mare latură.

Să presupunem $b \leqslant c$, deci $1 \leqslant b \leqslant c < a = 16$. Atunci $2b^2 + 2c^2 + bc \geqslant 5b^2$ și folosind (1) putem scrie echivalent $512 \geqslant 5b^2$, de unde obținem $1 \leqslant b \leqslant 10$.(2).

Gîndind egalitatea (1) ca o ecuație de gradul al doilea cu necunoscuta c, discriminantul acesteia va fi

$$\Delta = b^2 - 4 \cdot 2 \cdot (2b^2 - 512) = 4096 - 15b^2.$$

Deoarece c este întreg, trebuie ca Δ să fie pătrat perfect.

Ținînd seama și de (2), se observă ușor că singurele valori convenabile ale lui b sînt $b_1 = 5$, $b_2 = 8$. Corespunzător, din (1) obținem $c_1 = 14$, $c_2 = 12$. Dacă vom considera $b \geqslant c$ obținem în mod simetric $b_3 = 14$, $b_4 = 12$, respectiv $c_3 = 5$, $c_4 = 8$.

Așadar tripletele (a, b, c) căutate sînt:

$$(16, 5, 14);\ (16, 8, 12);\ (16, 14, 5);\ (16, 12, 8).$$

3. *Fie* $f \in \mathbf{Z}[X]$ *un polinom cu proprietatea că numerele* $f(a)$ *sînt numere prime, pentru o infinitate de valori* $a \in \mathbf{Z}$. *Să se demonstreze că* f *este un polinom ireductibil în* $\mathbf{Z}[X]$.

Marcel Țena

Soluția I. Pentru a arăta că f este ireductibil în $\mathbf{Z}[X]$, vom dovedi că singurii divizori ai lui f în $\mathbf{Z}[X]$ sînt polinoamele ± 1, $\pm f$. Să considerăm așadar un polinom arbitrar $g \in \mathbf{Z}[X]$ cu proprietatea că g divide f. Aceasta înseamnă că există $h \in \mathbf{Z}[X]$ astfel încît $f = gh$, (1).

Conform ipotezei, mulțimea $A = \{a \in \mathbf{Z} \mid f(a)$ este număr prim $\}$ este infinită.

Pentru orice $a \in A$, conform cu (1) vom avea că numărul întreg $g(a)h(a)$ este număr prim, deci $g(a) = \pm 1$ sau $h(a) = \pm 1$. Să considerăm atunci următoarele patru submulțimi ale mulțimii A:

$$A_1 = \{a \in A \mid g(a) = 1\},\ A_2 = \{a \in A \mid g(a) = -1\},$$
$$A_3 = \{a \in A \mid h(a) = 1\},\ A_4 = \{a \in A \mid h(a) = -1\}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Avem evident $A = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4$ și cum A este infinită, cel puțin una din mulțimile A_1, A_2, A_3, A_4 va fi infinită.

Dacă A_1 este infinită, vom avea $g(a) = 1$ pentru o infinitate de valori $a \in \mathbf{Z}$. Așadar, polinomul $g - 1$ are o infinitate de rădăcini, deci este polinomul nul; rezultă $g = 1$.

Dacă A_2 este infinită, obținem analog $g = -1$.

Dacă A_3 este infinită, obținem $h = 1$, deci $g = f$.

În sfîrșit, dacă A_4 este infinită, obținem $h = -1$, deci $g = -f$.

În concluzie $g \in \{-1, 1, -f, f\}$ și astfel soluția se încheie.

Comentariu : Exemple simple de polinoame cu proprietatea din enunț sînt polinoamele constante $f = p$ ($p \in \mathbf{Z}$, număr prim) sau polinomul de gradul întîi $f = X$. Mai general, un polinom de gradul întîi de forma $f = aX + b$, cu $a, b \in \mathbf{N}^*$, $(a, b) = 1$, satisface ipoteza din enunțul problemei; într-adevăr, conform teoremei lui *Dirichlet* (v. [1]) progresia aritmetică $\{an + b | n \in \mathbf{N}\}$ în care rația a și primul termen b sînt relativ prime, conține o infinitate de numere prime. Nu se cunosc pînă în prezent exemple de polinoame cu proprietatea din enunț avînd gradul $x \geq 2$. (v. [1]). Există conjecturi care susțin valabilitatea proprietății respective pentru anumite astfel de polinoame, cum ar fi $X^2 + b$, cu $b \in \mathbf{N}^*$, $X^3 + 2$, $X^3 - 2$.

Soluția a II-a, dată de elevul *Moroianu Andrei*, cl. a X-a, Lic. de matem. fizică nr. 1 București.

Vom presupune prin absurd că polinomul f se descompune în $\mathbf{Z}[X]$ într-un produs de două polinoame nenule și neinversabile, adică

$$f = gh, \text{ unde } g, h \in \mathbf{Z}[X] \setminus \{-1, 0, 1\}.$$

Dacă cel puțin unul din polinoamele g și h are gradul zero (este o constantă din $\mathbf{Z}$) se ajunge ușor la contradicție cu ipoteza că $f(a)$ este număr prim, pentru o infinitate de numere $a \in \mathbf{Z}$. (Într-adevăr, dacă g și h sînt ambele polinoame constante, atunci $f(a)$ este un număr întreg neprim, $(\forall)\ a \in \mathbf{Z}$, fals. Dacă însă, de exemplu, g este polinom constant, iar grad $h \geq 1$, atunci grad $f \geq 1$ deci avem efectiv o infinitate de numere prime de forma $f(a)$, pentru acei $a \in \mathbf{Z}$ din ipoteză; deoarece numărul întreg g divide o infinitate de numere prime, înseamnă că $g \in \{-1, 1\}$, fals). Vom presupune așadar că ambele polinoame g și h au gradul ≥ 1. Să observăm că o funcție polinomială de grad ≥ 1 are proprietatea că preimaginea prin această funcție a oricărei mulțimi compacte este tot o mulțime compactă (căci fiind funcție continuă „întoarce" orice mulțime închisă în mulțime închisă, iar din faptul că în punctele $\pm\infty$ are limita $\pm\infty$ rezultă că „întoarce" orice mulțime mărginită în mulțime mărginită).

Deoarece intervalul $[-1, 1]$ este o mulțime compactă, preimaginile sale prin funcțiile g și h, adică $g^{-1}([-1, 1])$ și $h^{-1}([-1, 1])$ vor fi mulțimi compacte, deci în particular mărginite.

Conform ipotezei, mulțimea $A = \{a \in \mathbf{Z} \mid f(a)$ este număr prim$\}$ este infinită și fiind submulțime a lui $\mathbf{Z}$ va fi nemărginită. Putem găsi atunci un element $a_0 \in A$ astfel încît $a_0 \notin g^{-1}([-1, 1])$ și $a_0 \notin h^{-1}([-1, 1])$. Aceasta înseamnă că $g(a_0) \notin [-1, 1]$, $h(a_0) \notin [-1, 1]$ și cum $g(a_0)$, $h(a_0) \in \mathbf{Z}$, va rezulta $|g(a_0)| \geq 2$, $|h(a_0)| \geq 2$. Dar atunci numărul întreg $f(a_0) = g(a_0)h(a_0)$ nu mai poate fi prim, ceea ce contrazice faptul că $a_0 \in A$.

Clasele a XI-a și a XII-a

1. *Fie* $(K, +, \cdot)$ *un corp comutativ. Considerăm șirul* $(a_n)_{n \geq 0}$ *cu elemente din corpul* K *definit prin* $a_0 = a_1 = 1$, $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$, $(\forall)\ n \geq 2$. *Se cere*:

a) *Să se demonstreze că dacă polinomul* $X^2 - X - 1 \in K[X]$ *are două rădăcini distincte* $u, v \in K$, *atunci există* $\alpha, \beta \in K$ *unice, astfel încît*

$$a_n = \alpha u^n + \beta v^n, \quad (\forall)\ n \geq 0.$$

b) *Să se determine șirul* $(a_n)_{n \geq 0}$ *în cazul corpului* $K = \mathbf{Z}_{11}$.

Marcel Țena

Soluție : a) Pentru a determina elementele căutate $\alpha, \beta \in K$, punem condiția ca egalitatea din enunț să aibă loc pentru primele două valori naturale ale lui n, adică pentru $n = 0$ și $n = 1$. Obținem sistemul:

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 1 \\ u\alpha + v\beta = 1 \end{cases} \tag{1}$$

care are determinantul $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ u & v \end{vmatrix} = v - u \neq 0$ și poate fi rezolvat cu regula lui *Cramer* peste corpul comutativ K. Se obține soluția unică:

$$\begin{cases} \alpha = (v - 1) \cdot (v - u)^{-1} \\ \beta = (1 - u) \cdot (v - u)^{-1}. \end{cases} \tag{2}$$

Scanned with OKEN Scanner

Demonstrăm acum prin inducție, că pentru α și β găsiți, avem

$$a_n = \alpha u^n + \beta v^n, \qquad (\forall)\, n \geqslant 0.$$

Pentru $n = 0$ și $n = 1$, proprietatea este verificată.

Vom presupune acum că ea este adevărată pentru $n - 2$ și $n - 1$ și o vom proba și pentru n.

Într-adevăr, folosind relația de recurență și egalitățile

$$u^2 = u + 1, \quad v^2 = v + 1,$$

rezultă succesiv:

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2} = \alpha u^{n-1} + \beta v^{n-1} + \alpha u^{n-2} + \beta v^{n-2} = \alpha u^{n-2}(u + 1) + \beta v^{n-2}(v + 1) =$$
$$= \alpha u^{n-2} \cdot u^2 + \beta v^{n-2} \cdot v^2 = \alpha u^n + \beta v^n,$$

ceea ce încheie demonstrația prin inducție a egalității din enunț.

Unicitatea elementelor α și β rezultă aproape imediat: orice alt cuplu $(\alpha', \beta') \in K \times K$, pentru care avem

$$a_n = \alpha' u^n + \beta' v^n, \qquad (\forall) n \geqslant 0$$

va fi soluție a sistemului (1) (corespunzător valorilor $n = 0$ și $n = 1$) și cum sistemul (1) are soluția unică (α, β) dată de (2), rezultă că $(\alpha', \beta') = (\alpha, \beta)$.

b) În $\mathbf{Z}_{11}[X]$ avem $X^2 - X - \hat{1} = X^2 - \widehat{12}X + \widehat{32} = (X - \hat{4})(X - \hat{8})$

de unde rezultă imediat că rădăcinile acestui polinom în corpul $\mathbf{Z}_{11}$ sînt $u = \hat{4}$, $v = \hat{8}$. (De altfel, rădăcinile polinomului în corpul $\mathbf{Z}_{11}$ se pot obține și utilizînd formula de rezolvare a ecuației de gradul doi, care funcționează în orice corp comutativ de caracteristică diferită de 2, pentru acele ecuații care au discriminantul pătrat perfect; în cazul ecuației noastre discriminantul este $\hat{3} = \hat{5}^2$).

Conform cu (2), vom avea $\alpha = \hat{7} \cdot \hat{4}^{-1} = \hat{7} \cdot \hat{3} = \widehat{10}$, respectiv $\beta = -\hat{3} \cdot \hat{4}^{-1} = -\hat{3} \cdot \hat{3} = \hat{2}$. Folosind punctul a), rezultă că termenul general al șirului este $a_n = \widehat{10} \cdot \hat{4}^n + \hat{2} \cdot \hat{8}^n$, $(\forall)\, n \geqslant 0$. Deoarece pentru orice $x \in \mathbf{Z}_{11} \setminus \{\hat{0}\}$, avem $x^{10} = \hat{1}$ (teorema lui *Fermat*) vom avea $a_{n+10} = \widehat{10} \cdot \hat{4}^{n+10} + \hat{2} \cdot \hat{8}^{n+10} = \widehat{10} \cdot \hat{4}^n \cdot \hat{4}^{10} + \hat{2} \cdot \hat{8}^n \cdot \hat{8}^{10} = \widehat{10} \cdot \hat{4}^n + \hat{2} \cdot \hat{8}^n = a_n$, ceea ce arată că șirul $(a_n)_{n \geqslant 0}$ este periodic cu perioada 10. Acest rezultat era „de așteptat", dat fiind că am construit un șir peste un corp finit.

Observație. În cazul corpului $K = \mathbf{R}$ se obține șirul lui *Fibonacci* pentru care avem

$$u = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}, \quad v = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}, \quad \alpha = \frac{1 + \sqrt{5}}{2\sqrt{5}}, \quad \beta = -\frac{1 - \sqrt{5}}{2\sqrt{5}},$$

deci

$$a_n = \alpha u^n + \beta v^n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right], (\forall)\, n \geqslant 0.$$

Desigur, aproape toate rezultatele referitoare la șiruri definite prin recurențe liniare se pot „adapta" la cazul cînd lucrăm peste un corp comutativ oarecare. Invităm pe cititori să întreprindă singuri acest studiu.

2. *Se consideră familia de parabole* $y = -a(\lambda)x^2 + b(\lambda)x$, (1) *unde* $a, b : [0, l) \to [0, \infty)$ *sînt două funcții continue în punctul* 0, $b(0) = 0$ *și* b *este surjectivă* ($l > 0$ *este fixat*). *Se cere*:

1°. *Să se determine condiția necesară și suficientă pe care o satisfac funcțiile* a *și* b *astfel încît parabola de ecuație* $y = -px^2 + q$, (2), *cu* $p, q \in \mathbf{R}$ *date, să fie tangentă la toate parabolele familiei* (1), *pentru care* $\lambda \neq 0$ (*deci să fie înfășurătoarea familiei*);

2°. *Să se determine semnele lui* p *și* q *și imaginea funcției* a *astfel încît toate punctele de contact ale familiei* (1) *cu înfășurătoarea sa* (2) *să se găsească în semiplanul* $x \geqslant 0$;

3°. *Să se găsească locul geometric al vîrfurilor parabolelor familiei* (1);

4°. *Să se demonstreze că prin fiecare punct din semiplanul* $x \geqslant 0$, *diferit de origine, trec cel mult două parabole din familia* (1) *și să se determine mulțimile* A_0, A_1, A_2, *unde* A_i *este mulțimea punctelor din semiplanul* $x \geqslant 0$ *prin care trec* i *parabole* ($i = 0, 1, 2$). (*Punctele 2°, 3°, 4° presupun îndeplinită condiția de la 1°*).

Acad. *N. Teodorescu*

Soluție. 1°. Notăm cu P_λ parabola de ecuație (1) și cu P parabola de ecuație (2). Parabola P este tangentă la toate parabolele P_λ, cu $\lambda \in (0, l)$, dacă și numai dacă sistemul dat de ecuațiile (1) și (2) are soluții duble (confundate), pentru orice $\lambda \in (0, l)$. Scăzînd (2) din (1) se obține ecuația

Scanned with OKEN Scanner

$$[p - a(\lambda)]x^2 + b(\lambda)x - q = 0$$

care are rădăcină dublă dacă și numai dacă discriminantul său este nul pentru orice $\lambda \in (0, l)$. Se obține

$$b^2(\lambda) + 4q[p - a(\lambda)] = 0, \quad (\forall)\ \lambda \in (0, l) \tag{3}$$

care este tocmai condiția căutată.

Este util să observăm de ce a fost exclusă posibilitatea ca parabola P să fie tangentă și parabolei P_0. Dacă am presupune că P și P_0 sînt tangente, atunci ecuația (2) — (1) corespunzătoare lui $\lambda = 0$, ar avea rădăcini egale. Cum $b(0) = 0$, această ecuație devine $[p - a(0)]x^2 - q = 0$ și are rădăcină dublă dacă și numai dacă $q = 0$. Dar atunci (3) ar deveni $b^2(\lambda) = 0$, adică $b(\lambda) = 0$, $(\forall)\ \lambda \in (0, l)$, ceea ce ar contrazice ipotezele asupra funcției b.

2°. Coeficientul termenului în x^2 fiind nenul în oricare din ecuațiile familiei (1), vom avea $a(\lambda) \neq 0$, $(\forall)\ \lambda \in [0, l)$. Cum $a(\lambda) \geqslant 0$, $(\forall)\ \lambda \in [0, l)$ (vezi codomeniul funcției a) rezultă $a(\lambda) > 0$, $(\forall)\ \lambda \in [0, l)$. Deoarece se presupune îndeplinită ipoteza de la 1°, înseamnă că are loc egalitatea (3). Am văzut mai înainte că nu putem avea $q = 0$, deci neapărat $q \neq 0$. Trecînd în (3) la limită cînd $\lambda \to 0$ și ținînd seama că a și b sînt funcții continue în 0, obținem $b^2(0) + 4q[p - a(0)] = 0$; cum $b(0) = 0$ iar $q \neq 0$ rezultă $p = a(0) > 0$.

Pentru a determina intersecția (punctul de tangență) dintre parabolele P_λ și P, rezolvăm sistemul dat de ecuațiile (1) și (2) în condiția (3), pentru $\lambda \in (0, l)$. Notînd cu φ_λ abscisa punctului de tangență dintre P_λ și P, se obține $\varphi_\lambda = \dfrac{2q}{b(\lambda)}$. Ipoteza de la acest punct 2° ne obligă la condiția $\varphi_\lambda \geqslant 0$, $(\forall)\ \lambda \in (0, l)$. Cum $b(\lambda) \geqslant 0$, va trebui să avem și $q \geqslant 0$, iar deoarece $q \neq 0$ rezultă $q > 0$. Așadar, ambele numere p și q trebuie să fie strict pozitive.

Să determinăm acum imaginea funcției a. Scriind (3) sub forma echivalentă:

$$a(\lambda) = p + \frac{b^2(\lambda)}{4q}, \quad (\forall)\ \lambda \in (0, l) \tag{3'}$$

și ținînd seama și de egalitatea $a(0) = p$, deducem ușor că

$$a(\lambda) \geqslant p, \quad (\forall)\ \lambda \in [0, l), \quad \text{adică } \operatorname{Im} a \subseteq [p, \infty).$$

Arătăm acum incluziunea reciprocă. Fie $t \in [p, \infty)$. Dacă $t = p$, avem $p = a(0) \in \operatorname{Im} a$. Vom presupune așadar $t \in (p, \infty)$ și vom arăta că există $\lambda \in [0, l)$ astfel încît $t = a(\lambda)$. Într-adevăr, egalitatea $t = a(\lambda)$ se scrie echivalent, ținînd seama de (3'), sub forma $t = p + \dfrac{b^2(\lambda)}{4q}$ sau $b(\lambda) = \sqrt{4q(t - p)}$. Dar ultima egalitate are loc pentru un anumit $\lambda \in [0, l)$, căci din ipoteza b surjectivă, rezultă că $\operatorname{Im} b = [0, \infty)$. În concluzie, $\operatorname{Im} a = [p, \infty)$.

3°. Fie $V_\lambda(x_\lambda, y_\lambda)$ vîrful parabolei P_λ dată de ecuația (1). Pentru $\lambda = 0$, parabola P_0 are ecuația $y = -a(0)x^2 + b(0)x$, adică $y = -px^2$, deci vîrful acesteia este $V_0 = 0$ (originea axelor). Fie acum $\lambda \in (0, l)$. Din (1) avem imediat $x_\lambda = \dfrac{b(\lambda)}{2a(\lambda)}$ și înlocuind pe $a(\lambda)$ conform cu (3'), găsim

$$x_\lambda = \frac{2qb(\lambda)}{4pq + b^2(\lambda)}, \tag{4}$$

Înlocuind în (1) pe $a(\lambda)$ dat de (3') și pe x_λ dat de (4), obținem după efectuarea calculelor

$$y_\lambda = \frac{qb^2(\lambda)}{4pq + b^2(\lambda)}, \tag{5}$$

Împărțind (5) la (4) obținem $b(\lambda) = \dfrac{2y_\lambda}{x_\lambda}$ și înlocuind din nou în (4), obținem după efectuarea calculelor $pqx_\lambda^2 + y_\lambda^2 - qy_\lambda = 0$.

Aceasta arată că locul geometric este inclus în curba de ecuație

$$pqx^2 + y^2 - qy = 0, \tag{6}$$

Scanned with OKEN Scanner

Ecuația (6) se scrie echivalent :

$$pqx^2 + \left(y - \frac{q}{2}\right)^2 - \frac{q^2}{4} = 0 \Leftrightarrow \frac{4p}{q}x^2 + \frac{4}{q^2}\left(y - \frac{q}{2}\right)^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2}{\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{q}{p}}\right)^2} + \frac{\left(y - \frac{q}{2}\right)^2}{\left(\frac{q}{2}\right)^2} - 1 = 0, \qquad (6')$$

și reprezintă o elipsă E cu centrul în punctul $O'\left(0, \frac{q}{2}\right)$, semiaxele $O'A' = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{q}{p}}$ și $O'B' = \frac{q}{2}$ și având axele de aceeași direcție cu axele de coordonate (v. fig. 1).

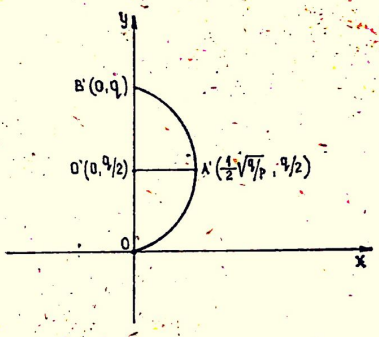


Fig. 1

Să vedem ce porțiune din această elipsă este locul geometric în cauză.

Din (4) și (5), ținînd seama că $p > 0$, $q > 0$, $b(\lambda) \geqslant 0$, rezultă $x_\lambda \geqslant 0$, $y_\lambda \geqslant 0$, adică V_λ este un punct în primul cadran. Deci, locul geometric este inclus în intersecția dintre elipsa E și primul cadran, adică în semielipsa „din dreapta" (v. fig. 1).

Am văzut că orginea O a axelor (care este punct al semielipsei) aparține locului geometric. Punctul $B'(0, q)$ (punct al semielipsei) nu aparține însă locului, căci dacă $x_\lambda = 0$, din (4) rezultă $b(\lambda) = 0$ și apoi din (5) obținem $y_\lambda = 0$; aceasta arată că singurul punct al locului având abscisa nulă este originea.

Arătăm acum reciproc, că, orice punct al semielipsei din dreapta, considerată fără O și B', aparține locului geometric. Fie $M(x, y)$ un punct fixat pe semielipsa considerată și să dovedim că există $\lambda \in (0, l)$ astfel încît $M = V_\lambda$, adică astfel încît

$$x = x_\lambda \text{ și } y = y_\lambda, \qquad (7)$$

Folosind ecuațiile parametrice ale elipsei E, există $\theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ astfel încît $x = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{q}{p}}\cos\theta$ și $y - \frac{q}{2} = \frac{q}{2}\sin\theta$, deci sistemul dat de ecuațiile (7) devine, ținînd seama de exprimările parametrice, precum și de (4) și (5) :

$$\begin{cases} \frac{1}{2}\sqrt{\frac{q}{p}}\cos\theta = \frac{2qb(\lambda)}{4pq + b^2(\lambda)} \\ \frac{q}{2}(1 + \sin\theta) = \frac{qb^2(\lambda)}{4pq + b^2(\lambda)} \end{cases} \qquad (8)$$

Rezolvînd prima ecuație din sistemul (8) în raport cu necunoscuta $b(\lambda)$, găsim $b(\lambda) = \frac{2\sqrt{pq}}{\cos\theta}(1 \pm \sin\theta)$, iar dacă rezolvăm a doua ecuație din (8) găsim $b(\lambda) = \frac{2\sqrt{pq}}{\cos\theta}(1 + \sin\theta)$.

Luînd așadar acea valoare $\lambda_M \in (0, l)$ pentru care $b(\lambda_M) = \frac{2\sqrt{pq}}{\cos\theta}(1 + \sin\theta)$ (lucru posibil, căci b este o surjecție) se satisface (8), deci și (7), ceea ce arată că punctul M este vîrful parabolei P_{λ_M}, pentru λ_M considerat.

Scanned with OKEN Scanner

Am demonstrat astfel prin dublă incluziune egalitatea de mulțimi : locul geometric = = semielipsa dreaptă a elipsei E, inclusiv punctul O, dar fără punctul B'.

4°. Fie $M_0(x_0, y_0)$ un punct fixat în semiplanul $x \geqslant 0$, diferit de origine (originea se exclude căci prin origine trec toate parabolele familiei (1), deci o infinitate). O parabolă P_λ trece prin, M_0 dacă și numai dacă $y_0 = -a(\lambda)x_0^2 + b(\lambda)x_0$ sau, folosind (3') (valabilă și pentru $\lambda = 0$), obținem

$$M_0 \in P_\lambda \Leftrightarrow y_0 = -\left[p + \frac{b^2(\lambda)}{4q}\right] x_0^2 + b(\lambda)x_0 \Leftrightarrow x_0^2 \cdot b^2(\lambda) - 4qx_0 \cdot b(\lambda) + 4q(y_0 + px_0^2) = 0, \quad (9).$$

Cazul I : $x_0 = 0$. Egalitatea (9) dă imediat $y_0 = 0$, deci M_0 ar fi originea, caz exclus. Înseamnă că orice punct al axei Oy, diferit de origine aparține mulțimii A_0.

Cazul II : $x_0 > 0$. Prin punctul M_0 trec atîtea parabole P_λ din familia (1) cîte soluții *reale* și *pozitive* $b(\lambda)$ are ecuația de gradul doi (9), adică cel mult două.

Discriminantul acestei ecuații este $4qx_0^2(q - y_0 - px_0^2)$, produsul rădăcinilor este $\frac{4q(y_0 + px_0)}{x_0^2}$ iar suma rădăcinilor este $\frac{4qb(\lambda)}{x_0} \geqslant 0$. Rezultă imediat discuția de mai jos, dacă ținem seama de discriminant, produs și sumă :

1) Prin M_0 trec două parabole din familie dacă și numai dacă discriminantul este strict pozitiv iar produsul rădăcinilor pozitiv (suma fiind deja pozitivă), adică dacă și numai dacă

$$\begin{cases} y_0 < -px_0^2 + q \\ y_0 \geqslant -px_0^2 \end{cases}.$$

Geometric, aceasta înseamnă că M_0 se află în interiorul parabolei înfășurătoare P, dar în același timp se află în exteriorul sau pe parabola P' de ecuație $y = -px^2$. Rezultă că A_2 este interiorul parabolei P intersectat cu exteriorul lui P' și cu semiplanul $x > 0$. Punctele de pe P' sînt în A_2. Mulțimea A_2 este reprezentată în fig. 2 prin hașuri orizontale.

2) Prin M_0 trece o singură parabolă din familie dacă și numai dacă sau discriminantul lui (9) este nul sau este strict pozitiv și produsul rădăcinilor este strict negativ. Aceasta înseamnă

$$y_0 = -px_0^2 + q \text{ sau } \begin{cases} y_0 < -px_0^2 + q \\ y_0 < -px_0^2. \end{cases}$$

Analizînd geometric rezultă $M_0 \in P$ sau M_0 este în interiorul parbolei P' (căci atunci aparține și interiorului parabolei P). Deci A_1 este interiorul parabolei P' intersectat cu semiplanul $x > 0$, reunit cu arcul din parabola înfășurătoare P, arc inclus în semiplanul $x > 0$. În fig. 2 mulțimea A_1 este reprezentată prin hașuri verticale.

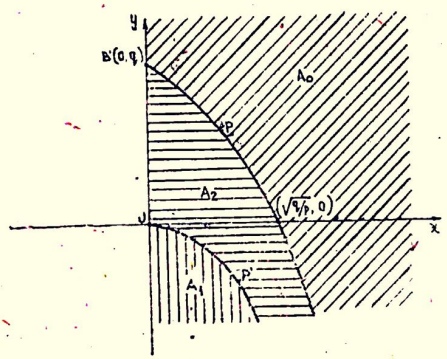


Fig. 2

3) Prin M_0 nu trece nici o parabolă din familie, dacă și numai dacă discriminantul lui (9) este strict negativ.

Aceasta înseamnă $y_0 > -px_0^2 + q$, de ci M_0 aparține exteriorului parabolei P, intersectat cu semiplanul $x > 0$. Așadar, ținînd seama de cele spuse, precum și de analiza cazului *I*, cînd $x_0 = 0$, rezultă că A_0 este exteriorul parabolei P intersectat cu semiplanul $x > 0$, reunit cu axa Oy din care se scoate originea. În fig. 2 mulțimea A_0 este reprezentată prin hașuri oblice.

3. *Fie* $(a_n)_{n\geqslant 1}$ *și* $(b_n)_{n\geqslant 1}$ *două șiruri cu termenii în intervalul* $(0, 1)$. *Să se arate că dacă șirurile* $(a_n^n)_{n\geqslant 1}$ *și* $(b_n^n)_{n\geqslant 1}$ *nu au limită, există două subșiruri* $(a_{k_m})_{m\geqslant 1}$ *și* $(b_{p_m})_{m\geqslant 1}$ *astfel încît pentru orice funcție continuă* $f : [0, 1] \to \mathbf{R}$ *să avem* :

$$\lim_{m\to\infty} \left(f(a_{k_m}) - f(b_{p_m}) \right) = 0.$$

Ștefan Alexe și *Sorin Simion*, profesori, Pitești

Scanned with OKEN Scanner

Soluție: Vom arăta că șirul $(a_n)_{n\geq 1}$ conține un subșir $(a_{k_m})_{m\geq 1}$ convergent la 1. Pentru aceasta, demonstrăm mai întîi afirmația:

$$(\forall)\ \varepsilon\in(0,1),\ (\exists)\ n_\varepsilon\in\mathbf{N}^*\ \text{astfel încît}\ \varepsilon < a_{n_\varepsilon} < 1, \qquad (1).$$

Demonstrația lui (1) se face prin reducere la absurd: presupunem că există $\varepsilon_0\in(0,1)$ astfel încît pentru orice $n\in\mathbf{N}^*$ avem $0 < a_n \leq \varepsilon_0$; atunci $a_n^n \leq \varepsilon^n \to 0$, contrar ipotezei că $(a_n^n)_{n\geq 1}$ nu are limită.

Dacă în (1) luăm $\varepsilon = \dfrac{m-1}{m}$, $m\in\mathbf{N}^*$, obținem afirmația:

$$(\forall)\ m\in\mathbf{N}^*,\ (\exists)\ k_m\in\mathbf{N}^*\ \text{astfel încît}\ \frac{m-1}{m} < a_{k_m} < 1, \qquad (2).$$

Făcînd $m\to\infty$, rezultă $a_{k_m}\to 1$.

În mod analog, șirul $(b_n)_{n\geq 1}$ conține un subșir $(b_{p_m})_{m\geq 1}$ convergent la 1.

Atunci, pentru o funcție continuă arbitrară $f:[0,1]\to\mathbf{R}$, avem

$$\lim_{m\to\infty}\left(f(a_{k_m}) - f(b_{p_m})\right) = \lim_{m\to\infty} f(a_{k_m}) - \lim_{m\to\infty} f(b_{p_m}) = f\left(\lim_{m\to\infty} a_{k_m}\right) - f\left(\lim_{m\to\infty} b_{p_m}\right) =$$
$$= f(1) - f(1) = 0.$$

PROBA DE TEHNICĂ, 29 august 1987

Clasele a IX-a și a X-a

1. *Să se arate că ecuația*

$$x^7 + y^7 + z^7 = 7xyz$$

admite o infinitate de soluții în mulțimea $\mathbf{Q}^*\times\mathbf{Q}^*\times\mathbf{Q}^*$.

Liviu Pîrșan

Soluție: Să reamintim întîi formulele lui *Newton* referitoare la polinoamele simetrice. Dacă notăm cu $s_1, s_2, \ldots, s_n$ polinoamele simetrice fundamentale în nedeterminatele $x_1, x_2, \ldots, x_n$ (adică $s_1 = \sum_{1\leq i\leq n} x_i$, $s_2 = \sum_{1\leq i<j\leq n} x_i x_j$, $\ldots$, $s_n = \prod_{1\leq i\leq n} x_i$) și cu t_k suma puterilor de ordin k ale nedeterminatelor (adică $t_k = x_1^k + x_2^k + \ldots + x_n^k$) atunci avem egalitățile:

$$t_k - t_{k-1}s_1 + t_{k-2}s_2 - \ldots + (-1)^{k-1}t_1 s_{k-1} + (-1)^k k s_k = 0, \text{pentru } 2\leq k\leq n, \qquad (1).$$

$$t_k - t_{k-1}s_1 + t_{k-2}s_2 - \ldots + (-1)^n t_{k-n}s_n = 0, \text{ pentru } k > n, \qquad (2).$$

Formulele (1) și (2) permit calculul recursiv al polinoamelor simetrice t_k în funcție de polinoamele simetrice fundamentale $s_1, s_2, \ldots, s_n$.

În cazul problemei noastre avem $n=3$ și renotăm $s_1 = x+y+z$, $s_2 = xy+yz+xz$, $s_3 = xyz$ iar $t_k = x^k + y^k + z^k$ pentru orice $k\in\mathbf{N}$. Ecuația din problemă este $t_7 = 7s_3$, de aceea s-ar impune exprimarea lui t_7 în funcție de s_1, s_2, s_3.

Pentru ușurarea calculelor vom impune condiția $s_1 = 0$, adică vom căuta soluții (x, y, z) pentru care $x+y+z=0$. Atunci $t_1 = s_1 = 0$.

Din (1), pentru $k=2$, avem $t_2 - t_1 s_1 + 2s_2 = 0$, de unde $t_2 = -2s_2$.

Tot în (1), luînd $k=3$, obținem $t_3 - t_2 s_1 + t_1 s_2 - 3s_3 = 0$, de unde $t_3 = 3s_3$.

Dacă luăm acum în (2) $k=4$ avem $t_4 - t_3 s_1 + t_2 s_2 - t_1 s_3 = 0$, de unde $t_4 = 2s_2^2$.

Tot în (2) luînd $k=5$ obținem $t_5 - t_4 s_1 + t_3 s_2 - t_2 s_3 = 0$, de unde $t_5 = -5s_2 s_3$.

Luînd $k=6$ în formulele (2) rezultă $t_6 - t_5 s_1 + t_4 s_2 - t_3 s_3 = 0$ și de aici $t_6 = -2s_2^3 + 3s_3^2$.

Scanned with OKEN Scanner

În sfîrșit, pentru $k = 7$, (2) devine $t_7 - t_6 s_1 + t_5 s_2 - t_1 s_3 = 0$, de unde $t_7 = 7s_2^2 s_3$.

Prin urmare, în condiția $x + y + z = 0$ ecuația din enunț se scrie

$$7(xy + xz + yz)^2 xyz = 7xyz$$

și cum x, y, z sînt nenule, aceasta din urmă devine:

$$(xy + xz + yz)^2 = 1, \tag{3}$$

De aici rezultă $xy + xz + yz = \pm 1$ și vom căuta soluții care să satisfacă ecuația $xy + xz + yz = -1$. Înlocuind $z = -x - y$ și efectuînd calculele se obține ecuația

$$x^2 + y^2 + xy - 1 = 0, \tag{4}$$

Notînd $t = \dfrac{y-1}{x} \in \mathbb{Q}$, revine la a efectua în (4) substituția $y = tx + 1$, cu $t \in \mathbb{Q}$. Se obține ecuația

$$(t^2 + t + 1)x^2 + (2t + 1)x = 0,$$

care are soluția rațională nenulă

$$x = -\frac{2t+1}{t^2+t+1}, \quad t \in \mathbb{Q} \setminus \left\{-\frac{1}{2}\right\}.$$

Corespunzător, ținînd seama că $y = tx + 1$ și $z = -x - y$, găsim după calcule

$$y = \frac{1-t^2}{t^2+t+1}, \quad z = \frac{t^2+2t}{t^2+t+1}.$$

Impunînd și condiția ca x, y, z să fie nenule, găsim așadar următoarea mulțime infinită de triplete $(x, y, z) \in \mathbb{Q}^* \times \mathbb{Q}^* \times \mathbb{Q}^*$ ce satisfac ecuația din problemă:

$$\left\{\left(-\frac{2t+1}{t^2+t+1}, \frac{1-t^2}{t^2+t+1}, \frac{t^2+2t}{t^2+t+1}\right) \;\middle|\; t \in \mathbb{Q} \setminus \left\{-2, -1, -\frac{1}{2}, 0, 1\right\}\right\}.$$

Observație: Desigur, se puteau evita formulele lui *Newton*, efectuîndu-se un calcul din aproape în aproape pentru găsirea lui $x^7 + y^7 + z^7$. Problema s-a dovedit cea mai dificilă din concurs, numai un concurent, *Udrea Călin*, cl. a X-a, Lic. „N. Bălcescu" Pitești, reușind să dea o soluție parțială.

2. *Să se demonstreze că locul geometric al punctelor din plan ale căror afixe z satisfac ecuația*

$$z^4 + \bar{z}^4 = 2|z|^4 - 16|z|^2$$

este o curbă simetrică în raport cu prima bisectoare.

Marcel Țena, profesor, București și
Ștefan Andrei, profesor, Buhuși

Soluție: Ecuația se scrie succesiv:

$$z^4 + \bar{z}^4 - 2(|z|^2)^2 = -16|z|^2 \Leftrightarrow z^4 + \bar{z}^4 - 2(z\cdot\bar{z})^2 = -16|z|^2 \Leftrightarrow (z^2 - \bar{z}^2)^2 = -16|z|^2.$$

Punînd $z = x + iy$, cu $x, y \in \mathbf{R}$, ultima ecuație devine

$$(x^2 - y^2 + 2ixy - x^2 + y^2 + 2ixy)^2 = -16(x^2 + y^2) \Leftrightarrow -16x^2y^2 = -16(x^2 + y^2) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2y^2 = x^2 + y^2; \tag{1}$$

Ecuația carteziană (1) a locului geometric arată imediat că proprietatea din enunț se verifică, deoarece dacă un punct $M(x, y)$ aparține curbei (1), atunci și simetricul său $M'(y, x)$ față de prima bisectoare aparține, de asemenea, curbei (1).

Punînd $f(x, y) = x^2y^2 - x^2 - y^2$, ecuația (1) devine $f(x, y) = 0$. Deoarece $f(x, y) = f(y, -x) = f(-x, y) = f(x, -y)$, rezultă ușor că curba (1) este simetrică și față de a doua bisectoare și față de cele două axe de coordonate.

Scanned with OKEN Scanner

De asemenea, $f(x, y) = f(-x, -y)$, ceea ce arată că curba (1) este simetrică și față de originea axelor.

3. *Se consideră un segment $[AB]$ de lungime a. Notăm cu M unul din punctele de intersecție a cercurilor cu centrele în A și B și rază a. Fie $\mathcal{C}$ cercul tangent segmentului $[AB]$ și arcelor $\overset{\frown}{AM}$, $\overset{\frown}{BM}$, iar $\mathcal{C}_1$ cercul tangent segmentului $[AB]$, cercului $\mathcal{C}$ și arcului $\overset{\frown}{AM}$ (cercurile $\mathcal{C}$ și $\mathcal{C}_1$ sînt interioare triunghiului curbiliniu AMB). Să se determine raza cercului $\mathcal{C}_1$ în funcție de a.*

* * *

Soluție: Notăm cu O și O_1 respectiv centrele cercurilor $\mathcal{C}$ și $\mathcal{C}_1$. Din motive de simetrie O și M aparțin mediatoarei lui $[AB]$, deci proiecția S a lui O pe AB este chiar mijlocul segmentului $[AB]$. Fie, de asemenea, S_1 proiecția lui O_1 pe AB. Bineînțeles, S și S_1 vor fi punctele de tangență dintre cercurile $\mathcal{C}$, respectiv $\mathcal{C}_1$ și segmentul $[AB]$, v. fig. 3.

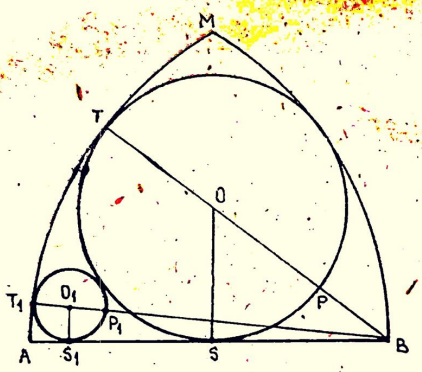


Fig. 3

Mai notăm cu T punctul de tangență dintre cercul $\mathcal{C}$ și arcul $\overset{\frown}{AM}$ iar cu T_1 punctul de tangență dintre cercul $\mathcal{C}_1$ și arcul $\overset{\frown}{AM}$. Punctele B, O, T sînt coliniare (punctul de tangență a două cercuri tangente aparține liniei centrelor) și, analog, punctele B, O_1, T_1 sînt coliniare. În sfîrșit, să notăm cu r, r_1 respectiv razele cercurilor $\mathcal{C}$, $\mathcal{C}_1$ și cu P, P_1 respectiv diametralele opuse lui T, T_1 în cercurile $\mathcal{C}$, $\mathcal{C}_1$. Scriind puterea lui B față de cercul $\mathcal{C}_1$ avem

$$BS^2 = BP \cdot BT \Leftrightarrow \left(\frac{a}{2}\right)^2 = (a - 2r)a,$$

$$\text{de unde } r = \frac{3a}{8}, \qquad (1).$$

Se știe că lungimea tangentei comune exterioare a două cercuri tangente exterior este dublul mediei geometrice a razelor, deci în cazul nostru $SS_1 = 2\sqrt{rr_1}$. Rezultă

$$BS_1 = BS + SS_1 = \frac{a}{2} + 2\sqrt{rr_1}.$$

Scriind puterea lui B față de $\mathcal{C}_1$ avem.

$$BS_1^2 = BP_1 \cdot BT_1 \Leftrightarrow \left(\frac{a}{2} + 2\sqrt{rr_1}\right)^2 = (a - 2r_1)a.$$

Înlocuind r cu valoarea dată de (1) și rezolvînd ecuația irațională, obținem

$$r_1 = \frac{(27 - 12\sqrt{2})a}{98}.$$

Clasele a XI-a și a XII-a

1. *Fie $x_0 \in [-1, 1]$ un număr dat. Definim șirurile $(x_n)_{n \geq 0}$, $(y_n)_{n \geq 0}$ în felul următor:*

$$x_n = \sqrt{\frac{1 + x_{n-1}}{2}}, \quad (\forall)\, n \geqslant 1; \quad y_n = 4^n(1 - x_n), \quad (\forall)\, n \geqslant 0.$$

Să se demonstreze că cele două șiruri sînt convergente și să se afle limitele respective.

Mihaela Predescu, profesoară, Pitești

Scanned with OKEN Scanner

Soluție: Deoarece funcția cos: $[0, \pi] \to [-1, 1]$ este o bijecție, există un unic element $\alpha \in [0, \pi]$ astfel încît $x_0 = \cos \alpha$ (de fapt, $\alpha = \arccos x_0$). Atunci

$$x_1 = \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}} = \sqrt{\cos^2 \frac{\alpha}{2}} = \cos \frac{\alpha}{2},$$

căci $\frac{\alpha}{2} \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, deci $\cos \frac{\alpha}{2} \geqslant 0$.

Analog $x_2 = \cos \frac{\alpha}{4}$ și, în general, vom putea scrie

$$x_n = \cos \frac{\alpha}{2^n}, \quad (\forall)\ n \in \mathbf{N},$$

rezultat care se probează fără dificultate prin inducție.

Șirul $\left(\frac{\alpha}{2^n}\right)_{n>0}$ fiind convergent, iar cosinusul funcție continuă, deducem că șirul $(x_n)_{n>0}$ este convergent și

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} \cos \frac{\alpha}{2^n} = \cos\left(\lim_{n\to\infty} \frac{\alpha}{2^n}\right) = \cos 0 = 1.$$

Pentru celălalt șir, putem scrie:

$$y_n = 4^n \left(1 - \cos \frac{\alpha}{2^n}\right) = 2 \cdot 4^n \sin^2 \frac{\alpha}{2^{n+1}} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\sin \frac{\alpha}{2^{n+1}}}{\frac{\alpha}{2^{n+1}}}\right)^2 \cdot \alpha^2.$$

Deoarece șirul $\left(\frac{\sin \frac{\alpha}{2^{n+1}}}{\frac{\alpha}{2^{n+1}}}\right)_{n>0}$ este convergent către 1, rezultă că și șirul $(y_n)_{n>0}$ este convergent și limita acestuia va fi

$$\lim_{n\to\infty} y_n = \frac{1}{2}\alpha^2 = \frac{1}{2} \arccos^2 x_0.$$

Observație. Pentru șirul $(x_n)_{n>0}$ se poate arăta pe baza relației de recurență și folosind inducția, că este monoton și mărginit, deci convergent. Limita se poate obține folosind relația de recurență și faptul că $x_n \geqslant 0$, $(\forall)\ n \geqslant 1$. Pentru șirul $(y_n)_{n>0}$ asemenea considerațiuni nu mai sînt valabile.

Elevul *Morotanu Andrei* din cl. a X-a, Lic. de matem. fizică nr. 1 București, a stabilit convergența șirului $(y_n)_{n>0}$ utilizînd criteriul lui *d'Alembert* pentru o anumită serie, fără însă a putea determina în acest fel $\lim_{n\to\infty} y_n$.

Un procedeu asemănător a utilizat eleva *Boier Ioana* din cl. a XII-a, Lic. de matem. fizică nr. 2 Cluj-Napoca.

2. *Se consideră o elipsă și notăm cu F familia coardelor de pantă dată λ iar cu d distanța de la centrul elipsei la tangentele de direcție λ. Considerăm funcția $\varphi: [0,d] \to [0, \infty)$, un de (x) semnifică lungimea acelor coarde din F care sînt situate la distanța x de centrul elipsei. Se cere*

1°. *Să se demonstreze că φ este o funcție strict descrescătoare;*

2°. *Să se determine extremele funcției φ și semnificațiile lor geometrice;*

3°. *Să se studieze variația extremelor de la 2° ca funcții de λ.*

Acad. *N. Teodorescu*

Soluție: 1°. Fie $a \geqslant b > 0$ lungimile semiaxelor elipsei. Ecuația elipsei este

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0, \qquad (1).$$

Considerăm o coardă $[AB]$, de pantă λ, a elipsei, situată la distanță x de origine și evaluăm lungimea sa $AB = \varphi(x)$. Ecuația dreptei AB este

$$y = \lambda x + \mu, \tag{2}$$

și scriind că distanța de la punctul $O(0, 0)$ la dreapta AB este x, obținem egalitatea

$$\frac{|\mu|}{\sqrt{1+\lambda^2}} = x, \tag{3}$$

Punînd $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, vom avea :

$$\varphi(x) = AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + [(\lambda x_2 + \mu) - (\lambda x_1 + \mu)]^2} = \\ = |x_2 - x_1|\sqrt{1 + \lambda^2}, \tag{4}$$

Intersectînd elipsa (1) cu dreapta (2), prin eliminarea lui y între aceste ecuații, obținem ecuația de gradul doi

$$(a^2\lambda^2 + b^2)x^2 + 2a^2\lambda\mu x + a^2(\mu^2 - b^2) = 0,$$

ale cărei rădăcini sînt tocmai x_1 și x_2. Rezultă după calcule

$$|x_2 - x_1| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2} = \sqrt{(x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2} = \sqrt{\frac{4a^4\lambda^2\mu^2}{(a^2\lambda^2+b^2)^2} - \frac{4a^2(\mu^2 - b^2)}{a^2\lambda^2 + b^2}} = \\ = 2ab\frac{\sqrt{a^2\lambda^2 + b^2 - \mu^2}}{a^2\lambda^2 + b^2}.$$

Înlocuind în (4) și ținînd seama și de (3), obținem

$$\varphi(x) = \frac{2ab\sqrt{1+\lambda^2}}{a^2\lambda^2 + b^2} \cdot \sqrt{a^2\lambda^2 + b^2 - \mu^2} = \frac{2ab\sqrt{1+\lambda^2}}{a^2\lambda^2 + b^2} \cdot \sqrt{a^2\lambda^2 + b^2 - (1+\lambda^2)x^2}, \tag{5}$$

Deoarece funcția $\psi : [0, d] \to \mathbf{R}$, $\psi(x) = a^2\lambda^2 + b^2 - (1 + \lambda^2)x^2$ este strict descrescătoare iar funcția-radical este strict crescătoare, ținînd seama și de faptul că $\varepsilon = \dfrac{2ab\sqrt{1+\lambda^2}}{a^2\lambda^2 + b^2} > 0$, rezultă că funcția φ definită prin $\varphi(x) = \varepsilon\sqrt{\psi(x)}$ este o funcție strict descrescătoare.

2°. Tangentele de direcție λ la elipsă au ecuațiile

$$y = \lambda x \pm \sqrt{a^2\lambda^2 + b^2}$$

și deci, distanța de la origine pînă la aceste drepte este

$$d = \frac{\sqrt{a^2\lambda^2 + b^2}}{\sqrt{1+\lambda^2}},$$

Minimul funcției φ va fi atins în punctul d și este, conform cu (5) :

$$m = \varphi(d) = \frac{2ab\sqrt{1+\lambda^2}}{a^2\lambda^2 + b^2} \cdot \sqrt{a^2\lambda^2 + b^2 - (1^2 + \lambda^2) \cdot \frac{a^2\lambda^2 + b^2}{1 + \lambda^2}} = 0.$$

Semnificația geometrică este imediată : punctul de tangență poate fi gîndit ca o coardă redusă la un punct, deci avînd lungimea nulă. Maximul funcției φ va fi atins în punctul O și este, în conformitate cu (5) :

$$M = \varphi(0) = 2ab\sqrt{\frac{\lambda^2 + 1}{a^2\lambda^2 + b^2}}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Semnificația geometrică este că dintre coardele familiei F, cea având lungimea maximă este diametrul de pantă λ (adică acea coardă a familiei care trece prin origine).

3°. Evident, funcția m de variabilă λ, este o funcție constantă, deci orice comentariu este de prisos.

Vom studia funcția $M : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $M(\lambda) = 2ab\sqrt{\dfrac{\lambda^2+1}{a^2\lambda^2+b^2}}$.

Pentru $\lambda = 0$ avem $M(0) = 2a$. Observăm că $\lim\limits_{\lambda \to \pm\infty} M(\lambda) = 2b$, deci dreapta $y = 2b$ este asimptotă orizontală.

Funcția M este derivabilă peste tot și avem, după calcule:

$$M'(\lambda) = \frac{2ab(b^2-a^2)\lambda}{(a^2\lambda^2+b^2)^2\sqrt{\dfrac{\lambda^2+1}{a^2\lambda^2+b^2}}}.$$

Se vede că $M'(\lambda) = 0 \Leftrightarrow \lambda = 0$, $M'(\lambda) > 0$ pentru $\lambda \in (-\infty, 0)$ și $M'(\lambda) < 0$, pentru $\lambda \in (0, \infty)$, căci am ținut seama că $b \leqslant a$.

Funcția M are așadar un maxim în punctul $\lambda=0$. Graficul său este dat în fig. 4 și este asemănător clopotului lui *Gauss*.

Faptul că M are un maxim absolut în $\lambda = 0$, egal cu $2a$, arată că dintre toate cordele cea mai lungă este axa orizontală (mare) a elipsei.

De asemenea, faptul că valoarea minimă a lui M se atinge „asimptotic" cînd $\lambda \to \pm\infty$, fiind egală cu $2b$, are ca semnificație geometrică proprietatea că dintre toate coardele cea mai scurtă este axa verticală (mică) a elipsei.

Propunem cititorilor spre studiu probleme similare pentru hiperbolă sau parabolă.

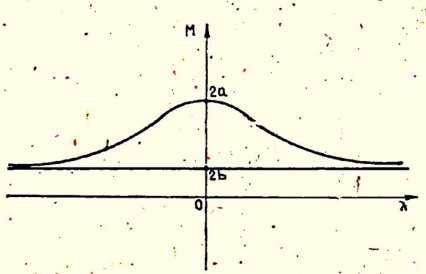


Fig. 4

3. *Fie p un număr prim pozitiv, n un număr natural nenul și considerăm mulțimea $M = \{0, 1, p, p^2, \ldots, p^n\}$. Să se demonstreze că:*

a) *Orice sistem liniar de tip $n \times n$ peste corpul $\mathbf{Z}_p$, adică de forma*

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i \quad , \qquad i = \overline{1, n}$$

cu a_{ij}, b_i, $x_j \in \mathbf{Z}_p$, are ca număr de soluții un element din mulțimea M;

b) *Reciproc, pentru orice $k \in M$ există cel puțin un sistem liniar de tip $n \times n$ peste corpul $\mathbf{Z}_p$, având exact k soluții.*

Marcel Țena

Soluție: a) De la bun început trebuie remarcat că întreaga teorie a sistemelor liniare funcționează peste un corp comutativ arbitrar, deci în particular și peste corpul finit $\mathbf{Z}_p$.

Dacă considerăm un sistem incompatibil, atunci numărul soluțiilor sale este $0 \in M$.

Dacă considerăm un sistem de tip *Cramer*, adică având matricea $A = (a_{ij})$ nesingulară, numărul soluțiilor este $1 \in M$.

Să considerăm acum un sistem compatibil în care matricea A are rangul $r \in \{0, 1, 2, \ldots, n-1\}$. Avem atunci r necunoscute principale, fie acestea $x_1, x_2, \ldots, x_r$ și $n-r$ necunoscute secundare (parametri) $x_{r+1}, x_{r+2}, \ldots, x_n$. Deoarece necunoscutele principale se exprimă în funcție de cele secundare, o soluție a sistemului de forma $(x_1, x_2, \ldots, x_r, x_{r+1},$

Scanned with OKEN Scanner

$x_{r+2}, \ldots, x_n$) este determinată dacă și numai dacă sînt cunoscute valorile parametrilor x_{r+1}, $x_{r+2} \ldots, x_n$. Altfel spus, dacă notăm cu $\mathcal{S} \subset Z_p^n$ mulțimea soluțiilor sistemului considerat putem observa cu ușurință că aplicația

$$\varphi : \mathcal{S} \to Z_p^{n-r}, \qquad \varphi(x_1, x_2, \ldots, x_r, x_{r+1}, \ldots, x_n) = (x_{r+1}, \ldots, x_n)$$

este o bijecție. În acest fel, numărul soluțiilor sistemului, deci Card $\mathcal{S}$, este tocmai cardinalul lui Z_p^{n-r}, adică $p^{n-r} \in M$.

b) Pentru $k = 0$ considerăm un sistem incompatibil, de exemplu

$$\underbrace{\hat{x}_1 = \hat{0},\ \hat{x}_1 = \hat{1}, \ldots}_{n \text{ ecuații}}$$

Pentru $k = 1$, considerăm un sistem de tip *Cramer*, adică în care matricea A să fie nesingulară, de exemplu, putem lua $A = I_n$ (matricea unitate de ordinul n peste corpul Z_p).

Pentru $k = p^n$, luăm sistemul în care matricea A este matricea nulă de ordin n peste Z_p, iar vectorul-coloană al termenilor liberi este vectorul nul.

Fie acum $k = p^s$, cu $1 \leqslant s \leqslant n-1$. Considerăm un sistem liniar de tip $n \times n$, avînd ca matrice A o matrice de rang $r = n - s$, de exemplu

$$A = \begin{pmatrix} \hat{1} & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & \hat{1} & & \\ & & & \hat{0} & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & \hat{0} \end{pmatrix}$$

Conform considerațiunilor de la punctul precedent, numărul soluțiilor acestui sistem este $p^{n-r} = p^{n-(n-s)} = p^s = k$, ceea ce încheie soluția problemei.

Observații. În loc de corpul Z_p, se putea considera un corp finit arbitrar cu q elemente, problema rămînînd aceeași, cu singura modificare că se înlocuiește p cu q.

De asemenea, problema s-ar putea ușor adapta la cazul sistemelor liniare de tip $n \times m$ peste un corp finit.

BIBLIOGRAFIE

[1] W. *Sierpinski* : Ce știm și ce nu știm despre numerele prime, Ed. Tehnică, 1965.

SOLUȚIILE PROBLEMELOR DATE LA ADMITERE ÎN FACULTĂȚI SESIUNEA SPECIALĂ, IUNIE 1987 PENTRU COMPONENȚII ECHIPELOR OLIMPICE ALE R. S. ROMÂNIA, ÎNVĂȚĂMÎNTUL TEHNIC

prezentare de Nușfet Șaganai, lector univ. dr., Constanța

1. ENUNȚURI

a) ALGEBRĂ ȘI ANALIZĂ MATEMATICĂ

1. Fie $f : I \subset \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = \sqrt{\dfrac{1 + (4 - a^2)x - x^2}{a(x^2 + 1)}}$, $a \in \mathbf{R}^*$. Să se determine a așa

încît I să fie un interval mărginit de lungime minimă.

2. Pe mulțimea $\mathbf{Z}$ a numerelor întregi se definesc operațiile $*$ și $\circ$ definite prin $x * y = x + y + 1$ respectiv $x \circ y = x + y - 1$. Să se arate că perechile $(\mathbf{Z}, *)$ și $(\mathbf{Z}, \circ)$ sînt structuri de grup abelian izomorfe între ele.

3. Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} \sin^2(\pi\sqrt{n^2+n+1})$.

4. Să se arate că polinomul $P = X^{11} + X^{10} + X^5 + X^4 + 2$ este divizibil cu $X^2 + X + 1$. Aflați apoi restul împărțirii lui P prin polinomul $(X-1)(X+1)$, (fără a face împărțirea), știind că restul împărțirii lui P la $X-1$, respectiv la $X+1$ este 6, respectiv 2.

5. Fie funcția $f : \mathbf{R}^* \setminus \{-e^{-1}, e^{-1}\} \to \mathbf{R}$, $f(x) = \dfrac{\ln|x|}{1+\ln|x|}$. Să se traseze graficul funcției f și să se calculeze $\displaystyle\int_e^{e^2} \frac{f(x)}{x}\,dx$.

b) GEOMETRIE PLANĂ, GEOMETRIE ÎN SPAȚIU ȘI TRIGONOMETRIE

1. Fie ABC un triunghi, $M \in (AB)$, $N \in (AC)$, $P \in (BC)$ și $Q = AP \cap MN$. Să se afle că $\dfrac{MQ}{NQ} = \dfrac{BP}{PC} \cdot \dfrac{AC}{AB} \cdot \dfrac{AM}{AN}$.

2. Să se calculeze $\sin \dfrac{\pi}{5}$.

3. Fie $[AO]$ înălțimea unui tetraedru $[ABCD]$, în care muchiile $[AB]$, $[AC]$, $[AD]$ sînt perpendiculare două cîte două. Să se arate că:

$$\frac{1}{AO^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2} + \frac{1}{AD^2}.$$

4. Într-un trapez $ABCD$, vîrfurile A și B sînt fixe, baza $[CD]$ este de lungime constantă, iar C descrie un cerc cu centrul în A. Să se afle locurile geometrice ale mijloacelor diagonalelor trapezului.

5. Să se arate că dacă $a_0 + a_1\cos x + a_2\cos 2x + a_3\cos 3x = 0$ pentru orice $x \in \mathbf{R}$, atunci $a_0 = a_1 = a_2 = a_3 = 0$. Generalizare.

II. SOLUȚII

a) ALGEBRĂ ȘI ANALIZĂ MATEMATICĂ

1. Este evident că expresia care definește funcția f are sens dacă și numai dacă $\dfrac{1+(4-a^2)x-x^2}{a} \geqslant 0$, $a \in \mathbf{R}^*$ și avem de analizat două cazuri:

i) $a \in \mathbf{R}_+^*$. În acest caz este necesar ca

$$1+(4-a^2)x-x^2 \geqslant 0 \Leftrightarrow x \in \left[\frac{4-a^2-\sqrt{(a^2-4)^2+4}}{2}, \frac{4-a^2+\sqrt{(a^2-4)^2+4}}{2}\right]$$

caz în care lungimea intervalului I este $l(I) = \sqrt{(a^2-4)^2+4}$ și este minimă pentru $a = \pm 2$. Deoarece $a \in \mathbf{R}_+^*$ rezultă că $l(I)$ este minimă pentru $a = 2$ caz în care $l(I) = 2$ și $I = [-1, 1]$.

ii) $a \in \mathbf{R}_-^*$. În acest caz este necesar ca

$$1+(4-a^2)x-x^2 \leqslant 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x \in \left(-\infty, \frac{4-a^2-\sqrt{(a^2-4)^2+4}}{2}\right] \cup \left[\frac{4-a^2+\sqrt{(a^2-4)^2+4}}{2}, \infty\right)$$

Scanned with OKEN Scanner

iar în acest caz I este reuniunea a două intervale de lungime infinită și deci nu este satisfăcută cerința enunțului.

Prin urmare condiția din enunț este verificată pentru $a = 2$.

Se verifică imediat că cele două operații sînt asociative și au ca elemente neutre respectiv $e_* = -1$ și $e_\circ = 1$.

De asemenea oricare ar fi $x \in \mathbf{Z}$ acesta admite simetricul $x'_* = -x - 2$ respectiv $x'_\circ = -x + 2$. Este imediată comutativitatea celor două operații. Deci $(\mathbf{Z}, *)$ și $(\mathbf{Z}, \circ)$ sînt grupuri abeliene. De asemenea se verifică imediat că funcția $f : \mathbf{Z} \to \mathbf{Z}$, $f(x) = x + 2$ este un izomorfism de la grupul $(\mathbf{Z}, *)$ la grupul $(\mathbf{Z}, \circ)$.

3. Avem:

$$\lim_{n\to\infty} \sin^2 \pi\sqrt{n^2+n+1} = \lim_{n\to\infty} [\sin(\pi\sqrt{n^2+n+1} - n\pi + n\pi)]^2 =$$

$$= \lim_{n\to\infty} [(-1)^n \sin(\pi\sqrt{n^2+n+1} - n\pi)]^2 = \lim_{n\to\infty} \left(\sin\pi \cdot \frac{n^2+n+1-n^2}{\sqrt{n^2+n+1}+n}\right)^2 = \sin^2\frac{\pi}{2} = 1.$$

4. $X^2 + X + 1 \mid P$ dacă și numai dacă rădăcinile polinomului $g = X^2 + X + 1$ sînt rădăcini ale lui P. Rădăcinile polinomului g sînt rădăcinile cubice complexe ale unității și deci $\varepsilon^3 = 1$ oricare ar fi ε rădăcină cubică complexă a unității.

$$P(\varepsilon) = \varepsilon^{11} + \varepsilon^{10} + \varepsilon^5 + \varepsilon^4 + 2 = \varepsilon^2 + \varepsilon + \varepsilon^2 + \varepsilon + 2 = 2(\varepsilon^2 + \varepsilon + 1) = 0$$

ceea ce arată că $g \mid P$.

Se știe că pentru orice $a, b \in \mathbf{R}$, $a \neq b$ avem $P = (X - a)(X - b)h + AX + B$ unde $h \in \mathbf{R}[X]$, iar $A, B \in \mathbf{R}$. Avem $P(a) = aA + B$ și $P(b) = bA + B$ unde evident $P(a)$ este restul împărțirii polinomului P prin $X - a$, iar $P(b)$ este restul împărțirii polinomului P prin $X - b$. În acest fel obținem că restul împărțirii lui P prin $(X - a)(X - b)$ este

$$AX + B = \frac{P(a) - P(b)}{a - b} X + \frac{aP(b) - bP(a)}{a - b}.$$

În cazul particular din problemă $a = -1$, $b = -1$, $P(a) = 6$, $P(b) = 2$ și deci restul este $2X + 4$.

5. Se observă că $D_f = \mathbf{R}^* \setminus \{-e^{-1}, e^{-1}\}$ este o mulțime simetrică și că $f(-x) = f(x)$, $(\forall) x \in D_f$ adică f este o funcție pară. Rezultă atunci că vom reprezenta grafic restricția $g : \mathbf{R}_+^* \setminus \{e^{-1}\} \to \mathbf{R}$, $g(x) = f(x)$, $(\forall)\, x \in D_g = \mathbf{R}_+^* \setminus \{e^{-1}\}$ și apoi restul graficului funcției f se obține din simetricul graficului G_g al funcției g în raport cu axa Oy.

Din $g(x) = 0 \Rightarrow x = 1$ deci $G_g \cap Ox = A(1,0)$,

Avem: $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} g(x) = 1$, $\lim\limits_{\substack{x\to e^{-1}\\ x<e^{-1}}} g(x) = \infty$, $\lim\limits_{\substack{x\to e^{-1}\\ x>e^{-1}}} g(x) = -\infty$ adică dreapta $x = e^{-1}$ este asimptotă verticală stînga sus și dreapta jos la G_g.

De asemenea, $\lim\limits_{x\to\infty} g(x) = 1$ adică dreapta $y = 1$ este asimptotă orizontală la G_g.

Totodată avem: $g'(x) = \dfrac{1}{x(1 + \ln x)^2} > 0$, $(\forall)\, x \in D_g$, ceea ce arată că g este strict crescătoare pe D_g.

Scanned with OKEN Scanner

Derivata a doua este $g''(x) = -\dfrac{3 + \ln x}{x^2(1 + \ln x)^3}$ și avem că $g''(e^{-3}) = 0$. Prin urmare punctul $B\left(e^{-3}, \dfrac{3}{2}\right)$ este punct de inflexiune al graficului G_g, grafic care este concav pe $(0, e^{-3})$, convex pe (e^{-3}, e^{-1}) și din nou concav pe (e^{-1}, ∞).

Lăsăm trasarea graficului în seama cititorului.

Avem de calculat

$$\int_e^{e^2} \frac{f(x)}{x}\,dx = \int_e^{e^2} \frac{\ln x}{x(1 + \ln x)}\,dx.$$

Facem schimbarea de variabilă $t = u(x) = \ln x$. Deci $u'(x) = x^{-1}$, $u(e) = 1$ și $u(e^2) = 2$. Deci

$$\int_e^{e^2} \frac{f(x)}{x}\,dx = \int_1^2 \frac{t}{1 + t}\,dt = 1 - \ln(t + 1)\Big|_1^2 = 1 - \ln\frac{3}{2}.$$

b) GEOMETRIE PLANĂ, GEOMETRIE IN SPAȚIU ȘI TRIGONOMETRIE

1. Fie $R = BC \cap MN$. Paralela la MN dusă prin B intersectează pe AP și AC respectiv în T și S. Din asemănarea triunghiurilor ABT și AQM avem:

$$\frac{AB}{AM} = \frac{AT}{AQ} = \frac{BT}{QM}, \tag{1}$$

iar din asemănarea triunghiurilor AST și AQN avem:

$$\frac{AS}{AN} = \frac{AT}{AQ} = \frac{ST}{QN}, \tag{2}$$

Pe baza relațiilor (1) și (2) deducem:

$$\frac{ST}{BT} = \frac{QN}{QM}, \tag{3}$$ și $$AS = \frac{AB \cdot AN}{AM}, \tag{4}$$

În triunghiul BCS tăiat de transversala AP aplicînd teorema lui *Menelaus* deducem:

$$\frac{AC}{AS} \cdot \frac{ST}{BT} \cdot \frac{BP}{CP} = 1, \tag{5}$$

Folosind relațiile (3) și (4) din (5) deducem relația cerută în enunț.

2. *Soluția I.* Fie $z = \cos x + i\sin x$. Avem $z^5 = \cos 5x + i\sin 5x = \cos^5 x + 5i\sin x \cdot \cos^4 x - 10\sin^2 x \cdot \cos^3 x - 10i \sin^3 x \cos^2 x + 5 \sin^4 x \cdot \cos x + i\sin^5 x$ de unde deducem $\sin 5x = \sin x (16 \sin^4 x - 20 \sin^2 x + 5)$. Înlocuind $x = \dfrac{\pi}{5}$ avem de arătat că $16 \sin^4 x -$

Scanned with OKEN Scanner

$-20\sin^2 x + 5 = 0$. Punînd acum în expresia precedentă $\sin x = \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$ rezultă că egalitatea este verificată și deci $\sin\frac{\pi}{5} = \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$.

Soluția a II-a. Să considerăm triunghiul isoscel ABC, $(AB = AC)$ așa încît $\mu(\widehat{BAC}) = \frac{\pi}{5}$ și $\mu(\widehat{ABC}) = \mu(\widehat{ACB}) = \frac{2\pi}{5}$. Fie $D \in (AC)$ așa încît $[BD$ este bisectoarea unghiului ABC. Rezultă imediat că triunghiul DBC este isoscel și asemenea cu triunghiul ABC. Conform teoremei bisectoarei avem:

$$\frac{DC}{AD} = \frac{BC}{AB} \Leftrightarrow \frac{b-a}{a} = \frac{a}{b} \Leftrightarrow b^2 - ab - a^2 = 0, \qquad (1)$$

unde $a = BC$ și $b = AB = AC$. Fie $M = \mathrm{pr}_{BC} A$. Din triunghiul dreptunghic AMC deducem că $a = 2b\cos\frac{2\pi}{5}$ și atunci relația (1) devine $4u^2 + 2u - 1 = 0$ unde $u = \cos\frac{2\pi}{5}$ de unde obținem $u = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$ și de aici folosind faptul că $1 - 2\sin^2\frac{\pi}{5} = \cos\frac{2\pi}{5}$ deducem $\sin\frac{\pi}{5} = \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$.

3. Este evident că triunghiurile BAC, CAD și BAD sînt dreptunghice în A. Fie $E = \mathrm{pr}_{BC} A$. Atunci DE este perpendiculară pe BC. Să notăm $AB = b$, $AC = c$ și $AD = d$. Rezultă atunci că

$$AE = \frac{bc}{BC} = \frac{bc}{\sqrt{b^2+c^2}}$$

și atunci

$$DE = \sqrt{AD^2 + AE^2} = \sqrt{\frac{b^2c^2 + c^2d^2 + d^2b^2}{b^2+c^2}}.$$

Din triunghiul dreptunghic DAE deducem că

$$AO = \frac{AD\cdot AE}{DE} = \frac{bcd}{\sqrt{b^2+c^2}} \cdot \sqrt{\frac{b^2+c^2}{b^2c^2 + c^2d^2 + d^2b^2}}$$

și de aici rezultă

$$\frac{1}{AO^2} = \frac{b^2c^2 + c^2d^2 + d^2b^2}{b^2c^2d^2} = \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} + \frac{1}{d^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2} + \frac{1}{AD^2}.$$

4. Fie M mijlocul diagonalei $[AC]$ și N mijlocul diagonalei $[BD]$. Este evident că $AC = R$ este de lungime constantă și atunci cînd C descrie cercul $\mathscr{C}(A, R)$ punctul M descrie cercul $\mathscr{C}\left(A, \frac{1}{2}R\right)$. Dreapta MN taie pe (BC) în E și pe (AD) în F. Deoarece $EF = \frac{1}{2}(AB + CD)$ și $ME = \frac{1}{2}AB$, $NF = \frac{1}{2}AB$ deducem că $MN = \left|\frac{1}{2}(AB +\right.$

Scanned with OKEN Scanner

$+ CD) - AB\Big| = \frac{1}{2}|CD - AB| =$ constant. Prin urmare punctul N este translatatul punc-

tului M de vector $\overrightarrow{MN}$ paralel cu bazele și de lungime constantă $MN = \frac{1}{2}|DC - AB|$.

Deci locul geometric al punctului N este un cerc care se obține din locul geometric al lui M prin translația definită de vectorul descris mai sus.

5. Vom trata separat cazul particular de cazul general.

i) Cazul particular.

Soluția I. Fie $t = \cos x$ atunci $\cos 2x = 2t^2 - 1$, $\cos 3x = 4t^3 - 3t$ și atunci cînd $x \in \mathbf{R}$ avem că $t \in [-1, 1]$ și t ia toate acestea valori. Prin urmare $f(x) = a_0 + a_1\cos x + a_2\cos 2x + a_3\cos 3x = 0$, $(\forall)\ x \in \mathbf{R} \Leftrightarrow g(t) = 4a_3t^3 + 2a_2t^2 + (a_1 - 3a_3)t + a_0 - a_2 = 0$, $(\forall)t \in [-1, 1] \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow a_3 = 0$, $a_2 = 0$, $a_1 - 3a_3 = 0$, $a_0 - a_2 = 0 \Leftrightarrow a_0 = a_1 = a_2 = a_3 = 0$.

Soluția a II-a. Dăm lui x valori particulare convenabile: $f(0) = a_0 + a_1 + a_2 + a_3 = 0$, $f(\pi) = a_0 - a_1 + a_2 - a_3 = 0$ ceea ce arată că $a_0 + a_2 = -(a_1 + a_3) = 0$. Totodată $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = a_0 - a_2 = 0$ de unde deducem că $a_0 = a_2 = 0$. Prin urmare din datele enunțului deducem că $a_1(\cos x - \cos 3x) = 0$, $(\forall)\ x \in \mathbf{R}$ de unde, înlocuind x cu $\frac{\pi}{4}$, deducem $\sqrt{2}a_1 = 0$ și deci $a_1 = a_3 = 0$.

ii) Cazul general. *Să se demonstreze că dacă:*

$$f_n(x) = a_0 + a_1\cos x + a_2\cos 2x + \ldots + a_n\cos nx = 0, \quad (\forall)\ x \in \mathbf{R}$$

atunci $a_0 = a_1 = a_2 = \ldots = a_n = 0$.

Prin bunăvoința colegului *D. M. Bătinețu–Giurgiu* am primit mai multe soluții la această problemă pe care le voi reproduce mai jos.

Soluția I. (*Virgil Nicula*). Fie $g : \mathbf{R} \to A = \{z = \cos x + i\sin x\}$ care este surjectivă. Deci $z = \cos x + i\sin x$, $\bar{z} = z^{-1} = \cos x - i\sin x$ și atunci $2\cos x = z + z^{-1}$ și în general $2\cos kx = z^k + z^{-k}$, $k \in \mathbf{N}$. Notînd $b_k = 2a_k$, $k = \overline{0, n}$ deducem că:

$$2f_n(x) = \sum_{k=0}^{n} 2a_k\cos kx = \sum_{k=0}^{n} b_k\cos kx = \sum_{k=0}^{n} b_k(z^k + z^{-k}), \tag{1}$$

$$f_n(x) = 0, (\forall)x \in \mathbf{R} \Leftrightarrow \sum_{k=0}^{n} b_k(z^k + z^{-k}) = 0, (\forall)\ z \in \mathbf{C} \text{ cu } |z| = 1 \Leftrightarrow \sum_{k=0}^{n} b_k(z^{n+k} + z^{n-k}) =$$

$$= 0, \quad (\forall)z \in \mathbf{C} \text{ cu } |z| = 1 \Leftrightarrow b_n(z^{2n} + b_{n-1}z^{2n-1} + \ldots + b_2z^{n+2} + b_1z^{n+1} + 2b_0z^n + b_1z^{n-1} +$$

$$+ b_2z^{n-2} + \ldots + b_{n-1}z + b_n = 0, \quad (\forall)z \in \mathbf{C} \text{ cu } |z| = 1$$

de unde deducem că $b_0 = b_1 = \ldots = b_{n-1} = b_n = 0 \Leftrightarrow a_0 = a_1 = a_2 = \ldots = a_{n-1} = a_n = 0$.

Soluția a II-a. (*Virgil Brișcă*). Avem:

$$f_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k\cos kx = 0, \ (\forall)\ x \in \mathbf{R} \Rightarrow f_n''(x) = -\sum_{k=1}^{n} k^2\cos kx = 0, (\forall)\ x \in \mathbf{R} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f_n^{(4)}(x) = \sum_{k=1}^{n} k^4\cos kx = 0, \ (\forall)x \in \mathbf{R} \Rightarrow \ldots f_n^{(2n)}(x) = (-1)^n\sum_{k=1}^{n} k^{2n}\cos kx = 0, (\forall)x \in \mathbf{R}$$

Scanned with OKEN Scanner

și deci considerînd aceste egalități ca un sistem liniar în necunoscutele $a_0, a_1, \ldots, a_n$ deducem că determinantul acestui sistem este:

$$D_n = \left(\prod_{k=1}^{n} \cos kx\right) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 & 1 \\ 0 & 1^2 & 2^2 & 3^2 & \ldots & (n-1)^2 & n^2 \\ 0 & 1^4 & 2^4 & 3^4 & \ldots & (n-1)^4 & n^4 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 1^{2n} & 2^{2n} & 3^{2n} & \ldots & (n-1)^{2n} & n^{2n} \end{vmatrix} =$$

$$= \left(\prod_{k=1}^{n} \cos kx\right) \cdot (n!)^2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 & 1 \\ 1^2 & 2^2 & 3^2 & \ldots & (n-1)^2 & n^2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1^{2(n-1)} & 2^{2(n-1)} & 3^{2(n-1)} & \ldots & (n-1)^{2(n-1)} & n^{2(n-1)} \end{vmatrix} = u^n \cdot \prod_{k=1}^{n} \cos kx.$$

În relația precedentă este evident că $u_n \in \mathbf{R}^*$, $(\forall)n \in \mathbf{N}^*$ iar produsul $\prod_{k=1}^{n} \cos kx$ se anulează pentru orice $x \in \bigcup_{k=1}^{n} \left(\frac{\pi}{k} \cdot \mathbf{Z} + \frac{\pi}{2k}\right)$, $n \in \mathbf{N}^*$ care este o mulțime numărabilă și atunci diferența $\mathbf{R} \setminus \bigcup_{k=1}^{n} \left(\frac{\pi}{k} \cdot \mathbf{Z} + \frac{\pi}{2k}\right)$ este nevidă și deci pentru orice x din această mulțime produsul $\prod_{k=1}^{n} \cos kx \in \mathbf{R}^*$ ceea ce arată că $u_n \cdot \prod_{k=1}^{n} \cos kx \in \mathbf{R}^*$, pentru orice $x \in \mathbf{R} \setminus \bigcup_{k=1}^{n} \left(\frac{\pi}{k} \cdot \mathbf{Z} + \frac{\pi}{2k}\right)$ și atunci sistemul liniar și omogen cu necunoscutele $a_0, a_1, \ldots, a_n$ admite numai soluția banală, adică $a_0 = a_1 = \ldots = a_n = 0$.

Soluția a III-a. (*D. M. Bătineța-Giurgiu*). Egalitatea $f_n(x) = 0$, $(\forall)x \in \mathbf{R}$ arată că $f_n(x) = 0$, $(\forall)x \in [0, \pi]$. Să observăm că:

$$\int_0^{\pi} \cos ax \cos bx \, dx = \frac{\sin(a+b)x}{2(a+b)}\Bigg|_0^{\pi} + \frac{\sin(a-b)x}{2(a-b)}\Bigg|_0^{\pi} = 0, \ (\forall)a, b \in \mathbf{N} \text{ cu } a \neq b \text{ și}$$

$$\int_0^{\pi} \cos ax \cos bx \, dx = \frac{\pi}{2} \text{ dacă } a = b.$$

Prin urmare

$$0 = \int_0^{\pi} f_n(x) \cos kx \cdot dx = \sum_{j=0}^{n} \int_0^{\pi} a_j \cos jx \cdot \cos kx \cdot dx = \frac{\pi}{2} a_k, \ (\forall)k = \overline{0, n}$$

de unde deducem că $a_k = 0$, $(\forall)k = \overline{0, n}$.

De fapt așa cum se poate constata din [3](pe care o recomandăm pentru aprofundarea *elementelor fundamentale* de analiză matematică) într-un spațiu *Hilbert* orice sistem ortogonal de elemente ale sale care nu-l conține pe zero este liniar independent. Deci soluția prezentată aici este un caz particular al afirmației precedente.

Scanned with OKEN Scanner

Soluția a IV-a. (*Virgil Nicula* și *Silviu Stossel*). Pentru orice $n \in \mathbf{N}^* \setminus \{1\}$ vom considera $s = 2\left[\frac{n}{2}\right]$, cel mai mare număr par mai mic sau egal decît n și $p = 2\left[\frac{n+1}{2}\right] - 1$, cel mai mare număr impar mai mic sau egal decît n. Avem

$$f_n(x) = \sum_{k=1}^{n}{}' a_k \cos kx = 0, \ (\forall)\ x \in \mathbf{R} \Rightarrow f_n(\pi + x) = g_n(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k a_k \cos kx = 0, (\forall) x \in \mathbf{R}.$$

Pe baza ultimelor două relații deducem :

$$a_0 + a_2 \cos 2x + a_4 \cos 4x + \ldots + a_s \cos sx = 0, (\forall) x \in \mathbf{R}, \tag{1}$$

$$a_1 \cos x + a_3 \cos 3x + a_5 \cos 5x + \ldots + a_p \cos px = 0, (\forall)\ x \in \mathbf{R}, \tag{2}.$$

Înmulțind (2) cu $2\cos x$ și transformînd produsele în sume deducem :

$$a_1(1 + \cos 2x) + a_3(\cos 2x + \cos 4x) + a_5(\cos 4x + \cos 6x) + \ldots +$$

$$+ a_{p-2}(\cos(p-3)x + \cos(p-1)x) + a_p(\cos(p-1)x + \cos(p+1)x) = 0, (\forall)\ x \in \mathbf{R} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a_1 + (a_1 + a_3)\cos 2x + (a_3 + a_5)\cos 4x + \ldots +$$

$$+ (a_{p-2} + a_p)\cos(p-1)x + a_p \cos(p+1)x = 0, \ (\forall) x \in \mathbf{R}, \tag{3}.$$

Dacă în relațiile (1) și (3) înlocuim x cu $\frac{1}{2}x$ deducem respectiv :

$$a_0 + a_2 \cos x + a_4 \cos 2x + \ldots + a_s \cos \frac{1}{2} sx = 0, (\forall) x \in \mathbf{R}, \tag{4}$$

$$a_1 + (a_1 + a_3)\cos x + (a_3 + a_5)\cos 2x + \ldots + (a_{p-2} + a_p)\cos \frac{1}{2}(p-1)x +$$

$$+ a_p \cos \frac{1}{2}(p+1)x = 0, \ (\forall) x \in \mathbf{R}, \tag{5}.$$

Mai remarcăm faptul că : $\frac{1}{2}s = \left[\frac{1}{2}n\right] \leqslant n - 1$, $\frac{1}{2}(p+1) = \left[\frac{1}{2}(n+1)\right] \leqslant n - 1$, $(\forall) n \in \mathbf{N}^* \setminus \{1\}$.

Mai departe, pentru rezolvarea problemei vom folosi procedeul inducției matematice. Pentru $n = 0$, $n = 1$, $n = 2$ din $f_n(x) = 0$, $(\forall)\ x \in \mathbf{R}$ rezultă imediat că $a_0, a_1, a_2 \in \{0\}$. Presupunem că pentru orice $m \in \mathbf{N}$, $m \leqslant n - 1$, $P(m)$ este adevărată. Atunci din relațiile (4) și (5) deducem că : $a_0 = a_2 = \ldots = a_s = 0$ și $a_1 = a_1 + a_3 = a_3 + a_5 = \ldots = a_{p-2} + a_p = a_p = 0$ de unde deducem că $a_1 = a_3 = a_5 = \ldots = a_{p-2} = a_p = 0$ și prin urmare $a_k = 0$, $(\forall) k = \overline{0, q}$ unde $q = \max(p, s) = n - 1$. Cu aceasta conform principiului inducției matematice problema este rezolvată.

Bibliografie

[1] *Bătinețu-Giurgiu D. M.*, *Șiruri*, Editura Albatros, 1979.

[2] *Bătinețu-Giurgiu D.M.* și colectiv, *Exerciții și probleme de analiză matematică pentru clasele a XI-a și a XII-a*, Editura didactică și pedagogică, 1981.

[3] *Nicolescu Miron*, *Analiză Matematică*, Editura tehnică, vol. I, 1957, vol. II, 1960, vol. III, 1958.

[4] *Pîrșan Liviu*, *Ionescu-Țiu C.*, *Probleme de matematică pentru elevii din liceu din clasele a XI-a și a XII-a*, Editura Facla, 1979.

Scanned with OKEN Scanner

PROBLEME PENTRU CICLUL PRIMAR

1. Determinați toate numerele formate din trei cifre consecutive care se împart exact la 9.

***

2. Determinați numărul format din două cifre $\overline{ab}$ știind că :

$$a + \overline{ab} + \overline{ab} = \overline{ba}$$

***

3. Puneți în locul literelor cifre, astfel încît următoarele egalități să fie adevărate :

a) $EINS + EINS + VIER + VIER = ZEHN$;

b) $DREI + DREI + VIER = ZEHN$, $(D < V)$;

c) $EINS + VIER + FUNF = ZEHN$, $(S < R)$.

(Revista Alpha, 2/1982, R. D. Germană)

4. Distanța de 200m este parcursă de o antilopă în 8 secunde, de un cal de alergări în 10 secunde, iar de un struț în 12 secunde.

Presupunînd că cele trei viețuitoare pleacă din același loc și în același timp și parcurg spațiul în linie dreaptă și cu viteza precizată mai înainte, să se stabilească ce distanță se află între ele (două cîte două) după o oră de mers.

(Manual de aritmetică, cl. a III-a, U.R.S.S.)

5. La un depozit făina s-a adus în 38 saci, dintre care 18 saci de 40 kg, 17 saci de 50 kg, iar ceilalți cîntăreau fiecare 75 kg. Să se afle cantitatea totală de făină adusă la depozit.

6. Determinați perimetrul și aria unui pătrat cu latura de 13 cm.

7. Suma dintre un număr, dublul său și triplul său este de 3 948. Care este numărul ?

8. Rezolvați ecuațiile :

a) $(x - 18) : 5 = 20$; b) $(88 - x) \cdot 10 = 180$;

c) $(16 + x) \cdot 25 = 400$; d) $(99 + x) - 100 = 175$.

9 Să se calculeze : $27 \cdot 1111^3 - 3333^3$

PROBLEME REZOLVATE PENTRU GIMNAZIU

Clasa a V-a

Problema E : 9040* (G.M.1/1987, pag. 28)

Un călător parcurge un drum în trei zile. În prima zi parcurge $\frac{1}{3}$ *din drum. În a doua zi* $\frac{1}{4}$ *din drumul rămas. În a treia zi parcurge 18 km. Cît este de lung tot drumul?*

***

Scanned with OKEN Scanner

Soluție dată de *Adrian Manole*, cl. a VI-a, Ș.g. 32, Constanța :

Notăm lungimea drumului cu x. În prima zi parcurge $\frac{x}{3}$. În celelalte două zile îi mai rămîn de parcurs $\frac{2x}{3}$. În ziua a doua parcurge $\frac{1}{4} \cdot \frac{2x}{3} = \frac{x}{6}$. În primele două zile parcurge $\frac{x}{3} + \frac{x}{6} = \frac{x}{2}$. În ziua a treia îi mai rămîne de parcurs $x - \frac{x}{2} = \frac{x}{2}$.

Deoarece $\frac{x}{2} = 18\text{km}$, rezultă că $x = 36\text{km}$.

Soluție bună au dat: *Cozma Vasile*, cl. a IV-a, Șc. gen. 3 Tîrgu Neamț; *Șearpe Cristian*, cl. a V-a Lic. „Frații Buzești" Craiova; *Pelcu Ana*, cl. a V-a, Ș c. gen. 18 Bacău.

Clasa a VI-a

Problema E : 9044* (G.M.1/1987, pag. 29)

Care dintre numerele 1986, 1987 *și* 1988 *se pot scrie ca diferență de două pătrate de numere naturale.*

George Bogdan Stana, elev, București

Soluție dată de *Liviu Pîrșan*, redactor principal G. M.:

Pentru orice $k \in \mathbf{N}$ avem $2k + 1 = (k + 1)^2 - k^2$ și deoarece $1987 = 2 \cdot 993 + 1$ rezultă că $1987 = 994^2 - 993^2$.

Pentru orice $k \in \mathbf{N}$ avem $4k = (k + 1)^2 - (k - 1)^2$ și deoarece $1988 = 4 \cdot 497$ rezultă că $1988 = 498^2 - 496^2$.

Vom arăta că 1986 nu se poate scrie sub forma $a^2 - b^2$ cu $a,\ b \in \mathbf{N}$. Dacă presupunem că $1986 = a^2 - b^2$ rezultă că a, b sînt de aceeași paritate. Să tratăm în continuare cele două cazuri :

1°. $a = 2k,\ b = 2j,\ k, j \in \mathbf{N}$; atunci $a^2 - b^2 = 4k^2 - 4j^2 = 4(k^2 - j^2)$ deci $a^2 - b^2 \vdots 4$.

2°. $a = 2k + 1,\ b = 2j + 1,\ k,\ j \in \mathbf{N}$; atunci $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b) =$

$= 4(k - j)(k + j + 1)$, deci $a^2 - b^2 \vdots 4$.

Deci, în ambele cazuri $a^2 - b^2$ se divide cu 4. Însă 1986 nu se divide cu 4, deci nu se poate scrie sub forma $a^2 - b^2$ cu $a,\ b \in \mathbf{N}$.

Clasa a VII-a

Problema E : 9051* (G.M.1/1987, pag. 30)

Să se determine $x \in \mathbf{Z}$, *astfel că*

$$\sqrt{\frac{3x - 5}{x + 1}} \in \mathbf{Z}.$$

D. Săvulescu, profesor, Bacău

Soluție. Notăm $\sqrt{\frac{3x - 5}{x + 1}} = k$, unde $k \in \mathbf{N}$. Avem $\frac{3x - 5}{x + 1} = k^2$ de unde $x = \frac{k^2 + 5}{-k^2 + 3}$ sau $x = -1 + \frac{8}{-k^2 + 3}$. Deoarece $x \in \mathbf{Z}$ rezultă că $-k^2 + 3 \in \{\pm 1,\ \pm 2,\ \pm 4,\ \pm 8\}$.

Analizînd pe rînd cele 8 cazuri, rezultă soluțiile $k_1 = 2$, $k_2 = 1$ și deci $x_1 = -9$, $x_2 = 3$.

Soluție bună a dat *Alexe Daniela*, cl. a VII-a, Șc. gen. 3 Însurăței.

Scanned with OKEN Scanner

Clasa a VIII-a

Problema E : 9054* (G.M. 1/1987, pag. 30)

Polinomul $P(x)$ de gradul n ($n \geq 2$) împărțit la polinoamele de gradul întîi $A(x)$ și $B(x)$ dă respectiv resturile r_1 și r_2. Se cere :

a) Să se arate că dacă $r_1 \neq r_2$, atunci restul împărțirii lui $P(x)$ prin $A(x) \cdot B(x)$ nu poate fi o constantă ;

b) Dacă $A(x) = x + 1$, $B(x) = 2x - 3$, $r_1 = 2$ și $r_2 = 7$, să se găsească restul împărțirii de la punctul a).

Nistor Budescu, profesor, Dalboșeț, Caraș-Severin

Soluție. a) Polinoamele de gradul întîi sînt de forma

$$A(x) = mx + n \ (m \neq 0), \qquad B(x) = px + q \ (p \neq 0).$$

Conform enunțului avem :

1°. $P(x) = (mx + n)\, C_1(x) + r_1$.

Făcînd $x = -\dfrac{n}{m} \Rightarrow P\left(-\dfrac{n}{m}\right) = r_1$, (1) ;

2°. $P(x) = (px + q)\, C_2(x) + r_2$.

Făcînd $x = -\dfrac{q}{p} \Rightarrow P\left(-\dfrac{q}{p}\right) = r_2$, (2).

3°. Presupunem prin absurd că $P(x)$ împărțit prin $A(x) \cdot B(x)$ dă restul $r = \text{constant}$. Putem scrie $P(x) = (mx + n) \cdot (px + q) C(x) + r$.

Pentru $x = -\dfrac{n}{m}$ și avînd în vedere (1), obținem $r_1 = r$, (3).

Pentru $x = -\dfrac{q}{p}$ și avînd în vedere (2), obținem $r_2 = r$, (4).

Din (3) și (4) rezultă $r_1 = r_2$, contradicție.

b) Conform ipotezei avem :

1°. $P(x) = (x + 1)\, C_1(x) + 2 \Rightarrow P(-1) = 2$,

2. $P(x) = (2x - 3)\, C_2(x) + 7 \Rightarrow P\left(\dfrac{3}{2}\right) = 7$.

Folosind rezultatul de la a) putem scrie :

$P(x) = (x + 1)(2x - 3)\, C(x) + R(x)$, unde $R(x) = ux + v \ (u \neq 0)$ căci $\text{gr}R(x) < \text{gr}(x + 1)(2x - 3)$.

Avem $P(x) = (x + 1)(2x - 3)\, C(x) + ux + v$. Pentru $x = -1$ sau $x = \dfrac{3}{2}$ rezultă :

$-u + v = 2$, $\dfrac{3}{2}u + v = 7$. Deci $u = 2$, $v = 4$ și $R(x) = 2x + 4$.

PROBLEME PENTRU GIMNAZIU

Clasa a V-a

E : 9323*, Determinați cifrele a, b, c astfel încît adunarea

$$\overline{abc} + \overline{bca} = 728$$

să fie corectă.

I. Stepan, profesor, Constanța

Scanned with OKEN Scanner

E : 9324*. Se dă numărul :

$$A = 1^{1985} + 9^{1986} + 8^{1987} + 8^{1988}.$$

Este adevărată propoziția : „A se divide cu 10" ?

Mihai Contanu, Constanța

E : 9325. Determinați numărul $\overline{abcd}$ știind că numerele $\overline{dc}$ și $\overline{ba}$ sînt multipli consecutivi ai lui 13, iar suma lor are exact trei divizori.

Aurelia Dinu și *Ion Dinu*, profesori, Constanța

E : 9326*. Să se afle cinci numere pare consecutive, știind că dacă le adunăm cu dublul sumei lor obținem 180.

Adrian Manole, elev, Constanța

E : 9327. Să se arate că numărul

$$A = n^1 + n^2 + n^3 + \ldots + n^{40}$$

se divide cu 10 pentru $n \in \mathbf{N}$.

Alexandru Asimit, elev, Constanța

E : 9328. Un elev a depus la C.E.C. în prima lună a lei, în a doua lună cu b lei mai mult decît în prima lună, în a treia lună cu încă b lei mai mult decît în a doua lună și așa mai departe. Cîți lei s-au acumulat la CEC după a 13-a lună, dacă în a 7-a lună a depus 250 lei ?

Mihai Gevelegean, profesor, Constanța

Clasa a VI-a

E : 9329*. Demonstrați că o condiție necesară și suficientă ca un triunghi să fie isoscel este ca bisectoarea exterioară a unui unghi al său să fie paralelă cu latura opusă.

Gheorghe Moraru, profesor, Constanța

E : 9330*. Să se arate că fracția :

$$\frac{2^{2n+1} \cdot 5^{2n} + 2^n \cdot 5^{n+1} + 2^{n-1} \cdot 5^n + 1986}{2^{3n+2} \cdot 5^{3n} + 2^{4n+3} \cdot 5^{4n+2} + 2^{3n+1} \cdot 5^{3n-1} + 1988}$$

se simplifică cu 18 pentru orice $n \in \mathbf{N}$, $n \geq 6$.

Emanoil Grama, profesor, Constanța

E : 9331. Fie triunghiul ABC cu unghiurile B și C ascuțite. Notăm cu D proiecția lui A pe BC și cu N mijlocul lui BC. Perpendiculara din N pe BC intersectează pe AC în M, iar AD și BM se intersectează în P. Găsiți o condiție necesară și suficientă ca patrulaterul $AMNP$ să fie romb.

G. Pânzaru, Constanța

Scanned with OKEN Scanner

E : 9332. Să se afle cel mai mic număr natural k, astfel încît numărul

$$A = 194^{19} \cdot 125^{14} + k$$

să fie divizibil cu 7.

G. Pânzaru, Constanța

E : 9333. Fie E și D mijloacele laturilor AB și respectiv AC ale triunghiului ABC. Perpendiculara în B pe BC întîlnește în F paralela dusă prin A la BD. Să se demonstreze că punctele F, E, C sînt coliniare dacă și numai dacă $AB \equiv AC$.

Gheorghe Moraru, profesor, Constanța

E : 9334*. Fie triunghiul ascuțitunghic ABC și Q un punct interior laturii BC. Perpendiculara în Q pe BC intersectează pe AC în N, iar perpendiculara din Q pe AB intersectează pe AB în P.

Să se arate că triunghiul ABC este isoscel dacă și numai dacă

$$2\,\widehat{PQN} = 180^\circ - \widehat{BAC}.$$

Antonio Zahariade, profesor, Constanța

Clasa a VII-a

E : 9335*. Să se arate că ecuația

$$x^4 + y^4 + z^4 + u^4 - 4xyzu = 1$$

nu are soluții în numere întregi nenule.

I. Cucurezeanu, Constanța

E : 9336. Pe diagonala AC a patrulaterului inscriptibil $ABCD$ se ia punctul M. Cercul circumscris triunghiului BMC intersectează pe AB în R, iar cercul circumscris triunghiului DMC intersectează pe AD în L. Arătați că :

a) punctele R, M, L sînt coliniare ;

b) punctele L, D, B, R sînt conciclice.

I. Stepan, profesor, Constanța

E : 9337. Într-un cerc de diametru fix AB se duce o coardă CD perpendiculară pe AB într-un punct fix P. Punctele A și P sînt situate de o parte și de alta a centrului cercului. Fie M un punct mobil pe arcul mic CB. Dacă AM taie pe CD în Q și tangenta în M la cerc taie pe CD în T, să se arate că :

a) MC nu poate fi bisectoarea unghiului TMA ;

b) $QC \cdot AM = AC \cdot CM$;

c) $TC \cdot TD = TQ^2$.

d) Determinați locul geometric al centrului cercului circumscris triunghiului PBM cînd M descrie arcul mic de cerc BC.

Florentina Grama, *Emanoil Grama*, profesori, Constanța

Scanned with OKEN Scanner

E : 9338. Fie un romb $ABCD$. Să se arate că :

a) mijloacele laturilor sale sînt situate pe un cerc;

b) picioarele perpendicularelor duse din centrul rombului pe laturile sale sînt puncte conciclice;

c) picioarele bisectoarelor unghiurilor formate de diagonalele rombului (situate pe laturile rombului) sînt conciclice.

d) Dacă G_1, G_2, G_3, G_4 sînt centrele de greutate ale triunghiurilor AOB, BOC, COD și DOA, atunci patrulaterul $G_1G_2G_3G_4$ este inscriptibil. S-a notat $\{O\} = AC \cap BD$.

Simion Păsăreanu, Emanoil Grama, Constanța

E : 9339*. Rezolvați în numere reale ecuația :

$$|x - 1| + |x + 2| + |y + 3| = 3.$$

E. Safta, profesor, Constanța

E : 9340*. Să se împartă în trei părți congruente unghiul de 54°, folosind rigla și compasul.

George Crihan, Simion Păsăreanu, Constanța

Clasa a VIII-a

E : 9341. Se consideră punctele A, B, C, D necoplanare, astfel încît $DA = DB = DC = a$, iar $\sphericalangle ADB = 60°$, $\sphericalangle ADC = 90°$ și $\sphericalangle BDC = 120°$. Fie $M \in AC$ și $AM = \frac{a}{2}$, $P \in BD$ și $BP = \frac{a}{3}$, iar $N \in CD$ și $CN = \frac{a}{4}$. Dreapta MP intersectează dreapta AB în R, dreapta MN intersectează dreapta AC în T și dreapta PN intersectează dreapta BC în L. Arătați că :

a) punctele R, T, L sînt coliniare;

b) punctul C este centrul de greutate al triunghiului ARL.

I. Stepan, profesor, Constanța

E : 9342*. Se dau punctele necoplanare A, B, C, D. Fie punctele M, N, P, Q situate în planul ABC, astfel încît M este mijlocul lui AC, N este mijlocul lui BM, P este mijlocul lui NC și Q mijlocul lui BP. Să se demonstreze că punctele A, N, Q, D sînt coplanare și că MP este paralelă cu acest plan.

Mihai Gevelegean, profesor, Constanța

E : 9343. Se dă un plan fix α și două drepte fixe d și g neparalele incluse în α, $d \cap g = \{C\}$. Fie A și B două puncte fixe nesituate în α astfel încît AB nu este paralelă cu α.

1) Arătați că un plan mobil ce trece prin AB taie pe α după o dreaptă care trece printr-un punct fix.

2) Fie $AB \cap \alpha = \{D\}$ și prin D se consideră o dreaptă mobilă situată în planul α care taie pe d în M și pe g în N. Să se arate că punctul de intersecție al dreptelor BM și AN și punctul de intersecție al dreptelor AM și BN (cînd aceste puncte există) sînt situate pe două drepte fixe concurente.

Florentina Grama și *Emanoil Grama*, Constanța

Scanned with OKEN Scanner

E : 9344*. Determinați numerele întregi n astfel încît numărul $n^2 + 9n + 14$ să fie pătratul unui alt număr întreg.

Aurelia Dinu, Ion Dinu, profesori, Constanța

E : 9345*. Scrieți polinomul

$$P(x) = x^4 + 1988x^2 + 1987x + 1988$$

ca produs de două polinoame.

Loredana Stoian, elevă, Constanța

E : 9346. Să se rezolve ecuația :

$$\left[\frac{\left[\frac{3x-1}{2}\right]+2}{3}\right] = x - 1,$$

unde $[a]$ este partea întreagă a numărului real a.

Mihai Gevelegean, profesor, Constanța

PROBLEME PRELIMINARE DE TIP O.I.M. PENTRU ELEVII DIN GIMNAZIU

O.G. : 63. Demonstrați că pentru fiecare număr natural n, unul din numerele :

$$4^n - 2^n - 2 \qquad \text{și} \qquad 4^n + 2^n - 2$$

este divizibil cu 9, iar celălalt, nu se divide cu 9.

I. Cucurezeanu, Constanța

O.G. : 64. Pe laturile A_1A_2, A_3A_4, A_5A_6 ale unui hexagon regulat $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ de arie 1, se consideră punctele M, N și respectiv P. Să se arate că :

$$\frac{1}{3} \leqslant \text{aria } MNP \leqslant \frac{1}{2}.$$

Marius Cavachi, profesor, Constanța

PROBLEME REZOLVATE PENTRU LICEU

Clasa a IX-a

Problema 20985* (G.M.1/1987, pag. 32)

Să se rezolve ecuația :

$$\{x\} = \frac{x + [x] + (x)}{10}$$

unde $\{x\}$ reprezintă partea fracționară a lui x, $[x]$ partea întreagă, iar (x) cel mai apropiat întreg de numărul real x.

Nicolae Bișboacă, profesor, Alba Iulia

Soluție. Cel mai apropiat întreg de numărul real x se poate defini și astfel:

$$(x) = \begin{cases} [x] & \text{dacă} \quad 0 \leqslant \{x\} < \frac{1}{2} \\ [x]+1 & \text{dacă} \quad \frac{1}{2} \leqslant \{x\} < 1. \end{cases}$$

Cazul I. Presupunem $0 \leqslant \{x\} < \frac{1}{2}$. Ținînd seama că $x = [x] + \{x\}$ și $(x) = [x]$ ecuația se scrie: $9\{x\} = 3[x]$ deci $3\{x\} = [x]$. Cum $0 \leqslant \{x\} < \frac{1}{2}$ rezultă că $0 \leqslant [x] < \frac{3}{2}$ de unde $[x] = 0$ sau $[x] = 1$.

Dacă $[x] = 0$, atunci $\{x\} = 0$, deci $x_1 = 0$.

Dacă $[x] = 1$, atunci $\{x\} = \frac{1}{3}$, deci $x_2 = \frac{4}{3}$.

Cazul II. Presupunem $\frac{1}{2} \leqslant \{x\} < 1$. Ținînd cont că $x = [x] + \{x\}$ și $(x) = [x] + 1$ ecuația dată se scrie $9\{x\} - 1 = 3[x]$. Cum $\frac{1}{2} \leqslant \{x\} < 1$ rezultă că $\frac{7}{2} \leqslant 3[x] < 8$ sau $\frac{7}{6} \leqslant [x] < \frac{8}{3}$ sau $[x] = 2$. Deci $\{x\} = \frac{7}{9}$ și $x_3 = 2 + \frac{7}{9} = \frac{25}{9}$.

Soluțiile ecuației sînt: $x_1 = 0$, $x_2 = \frac{4}{3}$, $x_3 = \frac{25}{9}$.

Clasa a X-a

Problema 20993* (G.M. 1/1987, pag. 33)

Se consideră tetraedrul oarecare $A_1A_2A_3A_4$. Planul bisector ce intersectează interiorul tetraedrului și care conține muchia $[A_1A_2]$ întîlnește muchia opusă $[A_3A_4]$ în punctul M_{34}, iar planul bisector care intersectează interiorul tetraedrului și conține muchia $[A_3A_4]$ întîlnește muchia opusă $[A_1A_2]$ în punctul M_{12}. În mod asemănător se obțin perechile de puncte $M_{13} \in [A_1A_3]$ și $M_{24} \in [A_2A_4]$, apoi $M_{14} \in [A_1A_4]$ și $M_{23} \in [A_2A_3]$. Să se demonstreze că dreptele $M_{12}M_{34}$, $M_{13}M_{24}$, $M_{14}M_{23}$ sînt concurente și să se precizeze poziția punctului comun, față de tetraedrul dat.

Gh. D. Simionescu

Soluție. Dreapta $M_{12}M_{34}$ aparține planului bisector cu muchia A_1A_2 dar și planului bisector cu muchia A_3A_4, prin urmare este dreapta de intersecție a celor două plane. La fel, dreapta $M_{13}M_{24}$ este intersecția planelor bisectoare care conțin muchiile A_1A_3 și A_2A_4 și dreapta $M_{23}M_{41}$ este intersecția planelor bisectoare care conțin muchiile A_2A_3 și A_1A_4.

Să arătăm că dreptele $M_{12}M_{34}$ și $M_{23}M_{41}$ sînt concurente în spațiu, probînd că patrulaterul $M_{12}M_{23}M_{34}M_{41}$ este plan. Pentru aceasta notăm cu $S_i (i=1, 2, 3, 4)$, aria feței opuse punctului A_i și folosim teorema planului bisector. Putem scrie:

$$\frac{M_{12}A_1}{M_{12}A_2} = \frac{S_2}{S_1}; \quad \frac{M_{23}A_2}{M_{23}A_3} = \frac{S_3}{S_2}; \quad \frac{M_{34}A_3}{M_{34}A_4} = \frac{S_4}{S_3}; \quad \frac{M_{41}A_4}{M_{41}A_1} = \frac{S_1}{S_4}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Înmulțind aceste relații membru cu membru obținem:

$$\frac{M_{12}A_1}{M_{12}A_2}\cdot\frac{M_{23}A_2}{M_{23}A_3}\cdot\frac{M_{34}A_3}{M_{34}A_4}\cdot\frac{M_{41}A_4}{M_{41}A_1}=1.$$

Deci potrivit reciprocei teoremei lui *Menelaus* relativ la patulaterul strimb $A_1A_2A_3A_4$, punctele M_{12}, M_{23}, M_{34}, M_{41} sînt în același plan. Rezultă că dreptele $M_{12}M_{34}$ și $M_{23}M_{41}$ sînt concurente într-un punct I.

Analog demonstrăm că dreptele $M_{12}M_{34}$ și $M_{13}M_{24}$ sînt concurente, de asemenea dreptele $M_{23}M_{41}$ și $M_{13}M_{24}$ sînt congruente.

Deci dreptele $M_{12}M_{34}$, $M_{23}M_{41}$ și $M_{13}M_{24}$ sînt necoplanare și concurente două cîte două; atunci ele au un punct comun, prin urmare $M_{12}M_{34}\cap M_{23}M_{41}\cap M_{13}M_{24}=\{I\}$. Deci I aparține celor patru plane bisectoare și prin urmare este centrul sferei înscrise în tetraedru.

Clasa a XI-a

Problema 20999* (G.M. 1/1987, pag. 34)

Fie $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ o funcție definită prin $f(x)=|x-a|\sin x$, unde $a\in\mathbf{R}$, este fixat. Atunci:
1°. f este derivabilă pe $\mathbf{R}\Leftrightarrow a\in\pi\mathbf{Z}$.
2°. f nu este de două ori derivabilă pentru nici o valoare a lui a.

• • •

Soluție. 1°. Evident f este continuă pe $\mathbf{R}$ și indefinit derivabilă pe $\mathbf{R}\setminus\{a\}$. Derivata lui f este

$$f'(x)=\frac{|x-a|}{x-a}\sin x+|x-a|\cos x,\ (\forall)\ x\in\mathbf{R}\setminus\{a\}.$$

Deci

$$f'(x)=\begin{cases}-\sin x+(a-x)\cos x, & \text{dacă } x<a\\ \sin x+(x-a)\cos x, & \text{dacă } x>a.\end{cases}$$

Cum f este continuă pe $\mathbf{R}$, putem scrie

$$f'_s(a)=\lim_{\substack{x\to a\\ x<a}}f'(x)=-\sin a$$

$$f'_d(a)=\lim_{\substack{x\to a\\ x>a}}f'(x)=\sin a.$$

Tot din faptul că f este continuă pe $\mathbf{R}$, deci și în a, rezultă condiția necesară și suficientă pentru derivabilitatea lui f în a (și deci pe $\mathbf{R}$) care este $f'_s(a)=f'_d(a)$, adică $\sin a=-\sin a$, deci $a\in\pi\mathbf{Z}$. Cu aceasta 1° este demonstrat.

2°. Pentru $a\in\pi\mathbf{Z}$, f este derivabilă pe $\mathbf{R}$. Să calculăm f'' în a. Conform definiției avem

$$f''_s(a)=\lim_{\substack{x\to a\\ x<a}}\frac{f'(x)-f'(a)}{x-a}=\lim_{\substack{x\to a\\ x<a}}\frac{-\sin x+(a-x)\cos x+\sin a}{x-a}=$$

$$=\lim_{\substack{x\to a\\ x<a}}\frac{\sin a-\sin x}{x-a}-\lim_{\substack{x\to a\\ x<a}}\cos x=-2\cos a.$$

Scanned with OKEN Scanner

$$f''_d(a) = \lim_{\substack{x\to a\\ x>a}} \frac{f'(x)-f'(a)}{x-a} = \lim_{\substack{x\to a\\ x>a}} \frac{\sin x + (x-a)\cos x - \sin a}{x-a} =$$

$$= \lim_{\substack{x\to a\\ x>a}} \frac{\sin x - \sin a}{x-a} + \lim_{\substack{x\to a\\ x>a}} \cos x = 2\cos a.$$

Deci pentru ca f să fie de două ori derivabilă pe $\mathbf{R}$ se impune $f''_s(a) = f''_d(a)$, de unde $2\cos a = -2\cos a$, adică $a = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$. Cum însă $\frac{\pi}{2} + k\pi \notin \pi\mathbf{Z}$, obținem o contradicție ceea ce demonstrează 2°.

Clasa a XII-a

Problema 21002* (G.M.1/1987, pag. 34)

Să se calculeze integralele nedefinite:

$$\int \sqrt{|1-x|^3}\,dx,\ x\in\mathbf{R}; \qquad \int |\sin x|\,dx,\ x\in\mathbf{R}.$$

* * *

Soluție. Fie $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f(x) = \sqrt{|1-x|^3}$; f este continuă, deci primitivabilă. O primitivă $F:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ a lui f poate fi aleasă de forma:

$$F(x) = \begin{cases} -\frac{2}{5}(1-x)^{\frac{5}{2}}, & x<1 \\ \frac{2}{5}(x-1)^{\frac{5}{2}} + c, & x \geqslant 1, \quad \text{unde } c\in\mathbf{R}. \end{cases}$$

Din condiția de continuitate a lui F, avem $c = 0$. Se verifică apoi că F este derivabilă pe $\mathbf{R}$ și $F'(x) = f(x)$, $(\forall)\, x\in\mathbf{R}$. Deci

$$\int \sqrt{|1-x|^3}\,dx = F + C.$$

Funcția $g:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $g(x) = |\sin x|$ este continuă, deci admite primitive. O primitivă a lui g poate fi aleasă de forma:

$$G(x) = \begin{cases} -\cos x + C_k, \text{ dacă } x\in[2k\pi, (2k+1)\pi) \\ \cos x + C'_k, \text{ dacă } x\in[(2k+1)\pi, (2k+2)\pi); \end{cases} \quad k\in\mathbf{Z},$$

cu $C_0 = 0$. Din condiția de continuitate în punctele $x_k = (2k+1)\pi$ avem $C'_k - C_k = 2$, $k\in\mathbf{Z}$, iar pentru $x'_k = (2k+2)\pi$, avem $C_{k+1} - C'_k = 2$. Din aceste relații rezultă $C_{k+1} = C_k + 4$, $k\in\mathbf{Z}$, deci $C_k = 4k$, $k\in\mathbf{Z}$ și $C'_k = 4k+2$, $(\forall)\, k\in\mathbf{Z}$.

În concluzie

$$G(x) = \begin{cases} -\cos x + 4k, & \text{dacă } x\in[2k\pi, (2k+1)\pi) \\ \cos x + 4k + 2, & \text{dacă } x\in[(2k+1)\pi, (2k+2)\pi). \end{cases}$$

Se verifică ușor că G este derivabilă pe $\mathbf{R}$ și $G'(x) = g(x)$, $(\forall)\, x\in\mathbf{R}$.

Deci

$$\int |\sin x|\,dx = G + C.$$

Scanned with OKEN Scanner

PROBLEME PENTRU LICEU

Clasa a IX-a

21317*. Dacă $a_1, a_2, \ldots, a_n \in (0, +\infty)$ și $a_1a_2a_3 \ldots a_n = 1$, să se arate că :

$$\left(a_1 + \frac{a_2}{a_3}\right)^2 + \left(a_2 + \frac{a_3}{a_4}\right)^2 + \ldots + \left(a_n + \frac{a_1}{a_2}\right)^2 \geqslant 4n.$$

Ion Tiotioi, profesor, Constanța

21318*. Fie $f = ax^2 + bx + c$ un polinom cu coeficienți întregi. Dacă pentru orice $n \in \mathbf{N}^*$ există $c_n \in \mathbf{Z}$ astfel încît $f(c_n) \vdots n$, atunci f are rădăcinile numere raționale.

Marius Cavachi, profesor, Constanța

21319. Fie funcția $f : \mathbf{N} \to [0,1)$, $f(n) = \{\sqrt{n(n+1)}\}$ unde $\{a\}$ reprezintă partea fracționară a numărului a.
Să se arate că :

1°) f este crescătoare ;

2°) $0{,}4\,k > f(n+1) + f(n+2) + \ldots + f(n+k) < 0{,}5\,k$, unde $k \in \mathbf{N}$, $k \geqslant 1$.

Cristian Andrei, elev, Constanța

21320. Fie $f : [0, +\infty) \to \mathbf{R}$ dată de $f(x) = \dfrac{x^2 + x + 1}{(x+1)^2}$.

Să se arate că dacă $a, b, c \in (0, +\infty)$, atunci $f(a), f(b), f(c)$ pot fi lungimile laturilor unui triunghi ascuțitunghic.

C. Caragea, Constanța

21321. Să se rezolve în numere întregi ecuația :

$$nx^3 + n^3x = 2y^4,$$

unde $n \in \mathbf{N}$.

Dumitru Anton, Constanța

21322*. Fie cercul de centru O și C un punct fix exterior. O secantă fixă, care trece prin C, intersectează cercul în A și B ($A \in (CB)$) iar o secantă mobilă intersectează cercul în Q și M ($Q \in (CM)$). Cercul circumscris triunghiului CAQ intersectează cercul circumsris triunghiului CMB în S. Aflați locul geometric al punctului S.

Dorina Popovici, Constanța

21323. Dacă a, b, c și S, adică lungimile laturilor unui triunghi, respectiv aria sa, verifică relația :

$$(a + b + c)abc = 16\,S^2$$

atunci triunghiul este echilateral.

S. Pânzaru, Constanța

Scanned with OKEN Scanner

Clasa a X-a

21324. Să se rezolve ecuația:

$$2^{x-1}+2^{\frac{1}{\sqrt{x}}}=3.$$

Marius Cavachi, profesor, Constanța

21325. Dacă m și n sînt numere naturale ($n>1$) să se arate că:

$$\left\{\frac{m}{n}\right\}+\left\{\frac{m+1}{n}\right\}+\cdots+\left\{\frac{m+n-1}{n}\right\}=\frac{n-1}{2}.$$

S-a notat cu $\{k\}$ partea fracționară a lui k.

I. Cucurezeanu, Constanța

21326. Fie triunghiul ABC înscris în cercul $\mathcal{C}$ de centru O și A' un punct arbitrar pe segmentul BC. Notăm cu A'' intersecția dreptei AA' cu cercul $\mathcal{C}$ și analoagele. Să se arate că:

$$\frac{AA'}{A'A''}+\frac{BB'}{B'B''}+\frac{CC'}{C'C''}\geqslant 9.$$

I. Cucurezeanu și *Dorin Arventiev*, Constanța

21327*. Să se arate că în orice triunghi ABC există inegalitatea:

$$\frac{\cos^2\frac{A-B}{2}}{\cos^2\frac{A+B}{2}}+\frac{\cos^2\frac{B-C}{2}}{\cos^2\frac{B+C}{2}}+\frac{\cos^2\frac{C-A}{2}}{\cos^2\frac{C+A}{2}}\geqslant 12.$$

C. Caragea, profesor, Constanța

21328*. Să se arate că în orice triunghi are loc inegalitatea:

$$\frac{\cos A\cos B\cos C}{\cos A+\cos B+\cos C}\leqslant\frac{1}{3}\cdot\frac{\sin A\sin B\sin C}{\sin A+\sin B+\sin C}.$$

Dorin Arventiev, profesor, Constanța

21329. Fie $ABCD$ un tetraedru și EAB planul bisector al diedrului de muchie AB ($E\in[CD]$). Dacă S_1, S_2 și S_3 sînt ariile triunghiurilor ABC, EAB și respectiv DAB demonstrați că ele nu pot fi termenii unei progresii armonice, geometrice sau aritmetice.

Ion Cristian Andrei, elev. Constanța

Scanned with OKEN Scanner

21330*. Să se arate că polinomul

$$f = (x^8 + x^6)^{2n+1} + (x^4 + x^2 + 1)^{2n+1} + x^{10p+5} + 1$$

se divide cu polinomul $g = x^4 - x^3 + x^2 - x + 1$, pentru orice $n, p \in \mathbf{N}$.

Gh. Neagu, profesor, Bacău

Clasa a XI-a

21331*. Să se calculeze:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{ab}{(a-b)(a^2-b^2)} + \frac{(ab)^2}{(a^2-b^2)(a^3-b^3)} + \ldots + \frac{(ab)^n}{(a^n-b^n)(a^{n+1}-b^{n+1})}\right)$$

unde $a, b > 0$, $a \neq b$.

Gheorghe Andrei, profesor, Constanța

21332. Să se determine funcțiile continue $f : [0, 1] \to \mathbf{R}$ cu proprietatea:

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{f(x)+f(y)}{2}, \quad (\forall)\, x, y \in [0, 1].$$

Marius Cavachi, Constanța

21333*. Fie $f : (0, +\infty) \to \mathbf{R}$ continuă, astfel încît $f(2^x) = f(3^x)$, $(\forall)\, x \in \mathbf{R}$. Demonstrați că f este constantă.

Marius Cavachi, Constanța

21334. Să se calculeze:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{(C_n^0)^k + (C_n^1)^k + \ldots + (C_n^n)^k},$$

unde $k \in \mathbf{N}$, $k \geq 1$.

Dorin Arventiev, Constanța

21335. Fie $f, g : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ funcții bijective, astfel ca

$$f(i) - g(i) \geq 0, \quad (\forall)\, i \in \mathbf{N}.$$

Demonstrați că $f = g$.

Proprietatea mai rămîne adevărată dacă $f, g : \mathbf{Z} \to \mathbf{Z}$ sînt funcții bijective și

$$f(i) - g(i) \geq 0, \quad (\forall)\, i \in \mathbf{Z}?$$

Viorica Frecuș, profesoară, Constanța

Scanned with OKEN Scanner

21336*. Calculaţi :

$$\lim_{x\to\infty}\left(\ln\frac{x+\sqrt{x^2+1}}{x+\sqrt{x^2-1}}\cdot\ln^{-2}\frac{x+1}{x-1}\right).$$

* *

21337. Calculaţi :

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\left(\ln(x\ln a)\cdot\ln\left(\frac{\ln ax}{\ln\frac{x}{a}}\right)\right),$$

unde $a>1$.

* * *

Clasa a XII-a

21338. Fie $(G, *)$ un grup comutativ. Să se determine funcţiile injective $f : G \to G$ cu proprietatea că există $a \in G$, astfel încît :

$$(f\circ f)(x)*f(x) = a, \quad (\forall)\ x \in G.$$

D.M. Bătineţu-Giurgiu, profesor, Bucureşti

21339. Fie ecuaţia $x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3 = 0$ cu rădăcinile $x_1, x_2, x_3 > 0$. Formăm ecuaţia $y^3 + b_1y^2 + b_2y + b_3 = 0$ cu rădăcinile y_1, y_2, y_3 şi care satisfac condiţiile :

$$\min_{k=1,2,3} x_k < y_j < \max_{k=1,2,3} x_k,\ j = 1,\ 2,\ 3.$$

Să se arate că $b_1 < a_1$ implică $b_2 > a_2$ şi $b_3 < a_3$.

Mircea Popovici, Constanţa

21340. Fie $f : I \to \mathbf{R}$, ($I \subset \mathbf{R}$, interval) o funcţie derivabilă pe I. Să se arate că f este crescătoare dacă şi numai dacă oricare ar fi $a, b, c \in I$ cu $a < c < b$ are loc inegalitatea

$$\frac{1}{c-a}\int_a^c f(x)\,dx \leqslant \frac{1}{b-c}\int_c^b f(x)\,dx.$$

Gheorghe Andrei, profesor, Constanţa

21341*. 1) Arătaţi că există $f : [a, b] \to \mathbf{R}_+$, derivabilă, cu $f'(x) > 0$, $(\forall)\ x \in [a, b]$ şi $f^n(x) < \dfrac{f(x)}{f'(x)} < 1$, $(\forall)\ x \in (a, b)$, unde $n \in \mathbf{N}$, $n \geqslant 1$.

2) Dacă f este funcţia de la punctul 1), atunci şirul (x_n) dat de

$$x_n = \int_a^b \frac{f^n(x)}{1+f^{2n}(x)}\,dx$$

are limita zero.

Dorina Popovici şi *Mircea Popovici*, Constanţa,

Scanned with OKEN Scanner

21342*. Dacă $f, g : [a, b] \to \mathbf{R}$ sînt derivabile pe $[a, b]$ și dacă $f(a) = g(a) = 0$, atunci există un punct $c \in (a, b)$ astfel încît să avem

$$f'(c)\int_a^b g(t)\mathrm{d}t = g'(c)\int_a^b f(t)\mathrm{d}t.$$

Tudorel Lupu, Constanța

21343*. Să se calculeze:

$$\int \frac{1}{\sin(x+a)\cdot\sin(x+b)}\,\mathrm{d}x.$$

* * *

21344. Să se calculeze

$$\int \frac{1}{\sin x - \sin a}\,\mathrm{d}x.$$

* * *

PROBLEME PREGĂTITOARE PENTRU O.I.M. ȘI O.B.M.

O : 536. Fie $n, a, b \in \mathbf{N}^* \setminus \{1\}$. Dacă $a - b = 2b^n - a^n$, atunci $a - b$ este puterea a n-a unui număr $k \in \mathbf{N}^* \setminus \{1\}$.

I. Cucurezeanu, profesor, Constanța

O : 537. Se consideră numerele pozitive $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3$ așa încît $a_1 + a_2 + a_3 \leqslant b_1 + b_2 + b_3$ și $a_1a_2 + a_2a_3 + a_3a_1 \geqslant b_1b_2 + b_2b_3 + b_3b_1$. Dacă $a_1 \leqslant a_2 \leqslant a_3$, $b_1 \leqslant b_2 \leqslant b_3$ și $a_1 \leqslant b_1$ atunci $a_1 \leqslant b_1 \leqslant b_2 \leqslant a_2 \leqslant a_3 \leqslant b_3$.

V. Cîrtoaje, Ploiești

O : 538. Fie triunghiul echilateral ABC și $M \in \mathrm{Int}\widehat{BAC}$. Se notează cu D și B punctele obținute prin rotația lui B, respectiv C în jurul lui M, în sens trigonometric și, respectiv în sens contrar, cu 120°. Să se arate că al patrulea vîrf al paralelogramului avînd pe $[MD]$ și $[ME]$ ca laturi, este simetricul lui A față de M.

Petre Liviu și *Sorin Săileanu*, profesori, Tîrgoviște

PROBLEMĂ REZOLVATĂ PENTRU CONCURSUL ANUAL AL REZOLVITORILOR

Problema C : 664, G.M. nr. 1/1987, pag. 37.
Fie $x \in \mathbf{R}$ și $a, b > 0$. Dacă există $n \in \mathbf{N}^*$ așa încît

$$\frac{\sin^{2n+2} x}{a^n} + \frac{\cos^{2n+2} x}{b^n} = \frac{1}{(a+b)^n},$$

să se arate că această relație este adevărată pentru orice $n \in \mathbf{N}^*$.

Laurențiu Panaitopol

Scanned with OKEN Scanner

Soluție dată de *Dorin Arventiev*, profesor, Constanța. Fie $m \in \mathbb{N}^*$ valoarea lui n pentru care este adevărată egalitatea din enunț. Aceasta se scrie:

$$\frac{1}{(a+b)^m} = \sin^2 x \cdot \left(\frac{\sin^2 x}{a}\right)^m + \cos^2 x \cdot \left(\frac{\cos^2 x}{b}\right)^m,$$

Deoarece funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^m$ este convexă, putem aplica inegalitatea *Jensen* cu ponderile $\sin^2 x$, $\cos^2 x$ și obținem:

$$\frac{1}{(a+b)^m} \geq \left(\frac{\sin^4 x}{a} + \frac{\cos^4 x}{b}\right)^m \text{ de unde } \frac{1}{a+b} \geq \frac{\sin^4 x}{a} + \frac{\cos^4 x}{b} \quad (1).$$

Notînd $u = \sin^2 x$, inegalitatea (1) devine

$$\frac{1}{a+b} \geq \frac{u^2}{a} + \frac{(1-u)^2}{b}$$

sau, după efectuarea calculelor

$$(a+b)^2 u^2 - 2a(a+b)u + a^2 \leq 0, \text{ adică } ((a+b)u - a)^2 \leq 0$$

de unde deducem că

$$(a+b)u - a = 0 \text{ adică } u = \frac{a}{a+b}.$$

Prin urmare $\sin^2 x = \frac{a}{a+b}$ și atunci $\cos^2 x = \frac{b}{a+b}$. Rezultă atunci că pentru orice $x \in \mathbb{N}^*$ avem:

$$\frac{\sin^{2n+2} x}{a^n} + \frac{\cos^{2n+2} x}{b^n} = \frac{\left(\frac{a}{a+b}\right)^{n+1}}{a^n} + \frac{\left(\frac{b}{a+b}\right)^{n+1}}{b^n} = \frac{1}{(a+b)^n}.$$

Observație. Dacă în ipoteză fixăm $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ atunci $\sin x$, $\cos x > 0$ și problema rămîne valabilă cu următorul enunț generalizat:

Fie $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ și $a, b > 0$. Dacă există $p \in [1, \infty)$ așa încît

$$\frac{\sin^{2p+2} x}{a^p} + \frac{\cos^{2p+2} x}{b^p} = \frac{1}{(a+b)^p},$$

să se arate că relația este adevărată pentru orice $p \in \mathbb{R}$.

PROBLEME PENTRU CONCURSUL ANUAL AL REZOLVITORILOR

Clasele a IX-a și a X-a

C : 753. Să se determine funcțiile $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ cu proprietatea că

$$f(xy) + 5f(xz) \geq f(x) \cdot f(yz) + 9, \quad (\forall)\, x, y, z \in \mathbb{R}.$$

D. M. Bătinețu-Giurgiu, profesor, București

C : 754. Se consideră triunghiul ABC și fie $[AD$, $[AE$ două ceviene izogonale, adică $D, E \in (BC)$ și $\widehat{BAD} \equiv \widehat{CAE}$. Notăm cu M și N punctele de tangență ale dreptei BC cu cercurile înscrise în triunghiurile ABD și ACE. Să se arate că:

$$\frac{1}{MB} + \frac{1}{MD} = \frac{1}{NC} + \frac{1}{NE}.$$

Teodor Bănică, elev, București

Scanned with OKEN Scanner

C : 755. Se consideră ecuația cu coeficienți reali și rădăcini reale $ax^2 + bx + c = 0$ așa încît $|a(b - c)| > |b^2 - ac| + |c^2 - ab|$. Să se arate că ecuația are cel puțin o rădăcină în intervalul $(0,2)$.

Cristian Andrei, elev, Constanța

C : 756. Să se arate că

$$\sqrt{xy} + \sqrt{yz} + \sqrt{zx} \geqslant 2\sqrt[4]{xyz(x + y + z)}, \ (\forall)\ x, y, z \in \mathbf{R}_+.$$

Cînd are loc egalitatea?

C. Caragea, profesor, Constanța

Clasele a XI-a și a XII-a

C : 757. Să se demonstreze că dacă $a, b \in \mathbf{Q}_+$ și $\sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b} \in \mathbf{Q}$, unde $n \in \mathbf{N}^* \setminus \{1\}$, atunci $\sqrt[n]{a}, \sqrt[n]{b} \in \mathbf{Q}$.

Marius Cavachi, profesor, Constanța

C : 758. Fiind dată funcția $f : \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}$, $f(x, y, z, t) =$

$$= \sqrt{x^2 + 2y^2 - 2xy + 2y + 1} + \sqrt{2y^2 + 2z^2 - 4yz + 2y - 2z + 1} +$$

$$+ \sqrt{2z^2 + t^2 - 2tz - 4z + 4},$$

să se arate că

$$f(x, y, z, t) \geqslant 3, \ (\forall)\ (x, y, z, t) \in \mathbf{R}^4$$

și că

$$f(a, a, a + 1, a + 1) = 3, \ (\forall)\ a \in [-1, 1].$$

C. Ionescu-Țiu, profesor, București

C : 759. Fie $a_i \in (0, \pi)$, $i = \overline{1, k}$ distincte două cîte două și $f_i \in \mathbf{R}[X]$, $i = \overline{1, k}$. Dacă șirul $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$, $x_n = \sum_{i=1}^{k} f_i(n) \sin na_i$ este convergent la zero, atunci $f_i = 0$, $(\forall)\ i = \overline{1, k}$. Să se arate că enunțul rămîne adevărat dacă înlocuim șirul $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$ prin șirul $(y_n)_{n \in \mathbf{N}}$ cu $y_n = \sum_{i=1}^{n} f_i(n) \cos na_i$.

I. Savu, cercetător, București

C : 760. a) Fie $(G, \cdot)$ un grup cu proprietatea că există un endomorfism $f : G \to G$ care este și antimorfism, adică $f(xy) = f(y)f(x)$, $(\forall)\ x, y \in G$. Să se demonstreze că dacă f este injectiv sau surjectiv, atunci grupul $(G, \cdot)$ este abelian;

b) Fie $(G, \cdot)$ un grup cu proprietatea că există $n \in \mathbf{N}^*$ pentru care aplicațiile $f, g : G \to G$, $f(x) = x^n$, $g(x) = x^{n+1}$ sînt endomorfisme. Să se demonstreze că dacă f este injectiv sau surjectiv, atunci grupul $(G, \cdot)$ este abelian. (În legătură cu problema 2, cl. a XII-a, Olimpiada județeană, 1983).

Gh. Andrei, profesor, Constanța

I. P. Informația c. 1685 | Index 41.601 | Lei 3,50

Scanned with OKEN Scanner

A14 8-34

ISSN 0016-5441

SOCIETATEA DE ȘTIINȚE MATEMATICE
DIN REPUBLICA SOCIALISTĂ ROMÂNIA

GAZETA MATEMATICĂ

PUBLICAȚIE LUNARĂ PENTRU TINERET

2

Diaconu Irina

DIN CUPRINS:

- ASUPRA UNOR OPERAȚII CU FUNCȚII INTEGRABILE
- NOTE MATEMATICE
- CAPCANELE INFINITULUI ÎN MATEMATICA ELEMENTARĂ
- METODA REDUCERII LA ABSURD ÎN PROBLEME DE ARITMETICĂ
- PROBLEME REZOLVATE PENTRU GIMNAZIU ȘI LICEU
- PROBLEME PETRU CICLUL PRIMAR, GIMNAZIU, DE TIP O.I.M. PENTRU ELEVII DIN GIMNAZIU, PENTRU LICEU, PREGĂTITOARE PENTRU O.I.M. ȘI O.B.M., PENTRU CONCURSUL ANUAL AL REZOLVITORILOR, PROBLEME DE INFORMATICĂ.

ANUL XCIII nr. 2/1988

Scanned with OKEN Scanner

GAZETA MATEMATICĂ

SUMARUL

	Pag.
1. Logică și geometrie (VI). Recunoașterea tautologiilor, de *K. Teleman*	49
2. Asupra unor operații cu funcții integrabile, de *Constantin V. Crăciun*	51
3. Ecuația $p^n = q^n + r^n$, de *Marian Deaconescu*	56
4. Asupra unor tehnici de rezolvare a unor inegalități (În legătură cu problema O : 469, G.M. 2/1986), de *C. Caragea* și *D. Arventiev*	57
5. Rezolvarea în $\mathbf{Z}^*$ a ecuațiilor $x^{y^z} = y^{z^x}$ și $x^{y^z} = z^{y^x}$, de *Florin Vulpescu-Jalea*	59
6. Capcanele infinitului în matematica elementară, de *Cristian Calude* și *Elena Calude*	63
7. Metoda reducerii la absurd în rezolvarea problemelor de aritmetică, de *V. Arsinte*	64
8. Probleme rezolvate pentru gimnaziu (E : 9059, E : 9060, E : 9065, E : 9071, E : 9082)	65
9. Probleme rezolvate pentru liceu (21009, 21014, 21074, 21028, 21033)	68
10. Probleme pentru ciclul primar (9—16)	71
11. Probleme pentru gimnaziu (E : 9347—E : 9370)	72
12. Probleme preliminare de tip O.I.M. pentru elevii din gimnaziu (O.G. : 65, 66)	76
13. Probleme pentru liceu (21345—21372)	76
14. Probleme pregătitoare pentru O.I.M. și O.B.M. (O : 539—O : 541)	81
15. Probleme pentru Concursul anual al rezolvitorilor (C : 761—C : 768)	82
16. Probleme de informatică (I : 337, 338)	83
17. Rubrica rezolvitorilor de probleme	83

ANUL XCIII | 2 | 1988

COMITETUL DE REDACȚIE

Lector univ. Dumitru Acu, Sibiu ; lector univ. Toma Albu ; lector univ. Horea Banea, Brașov ; lector univ. Octavian Băscă ; conf. univ. Dan Brânzei, Iași ; prof. Constantin Cărbunaru ; prof. Marcel Chiriță ; prof. Pal Dalyay, Tg. Mureș ; lector univ. Inocențiu Drăghicescu ; prof. Ioana Drăghici ; inv. Alexandrina Dumitru ; prof. Ilie Gheorghiță ; prof. Adrian Ghioca, Sinaia ; cercet. princip. Gheorghe Gussi ; lector univ. Stere Ianuș ; prof. Ștefan Kudar, Baia Mare ; lector univ. Constantin Niță ; prof. univ. Arpad Pal, Cluj-Napoca ; lector univ. Laurențiu Panaitopol ; prof. Olimpia Popescu, Ploiești ; matem. Paul Radovici-Mărculescu ; lector univ. Gheorghe Sirețchi ; lector univ. Ioan Tomescu ; prof. Florin Vulpescu-Jalea.

REDACȚIA GAZETEI MATEMATICE

Redactor șef (delegat) : Acad. N. Teodorescu ; redactori principali : prof. Ilie Ifteșcu, prof. Liviu Pîrșan, prof. Marcel Țena ; redactori principali onorifici : C. Ionescu-Țiu, asist. univ. Elferie Rogai ; redactori : prof. Liliana Baiuci, prof. Alexandru Constantinescu.

Responsabil de număr : prof. Marcel Țena.

ADRESA REDACȚIEI GAZETEI MATEMATICE

Str. Academiei nr. 14, tel. 14.46.53 — București, 1, cod. 79543. Cititorii din străinătate se pot abona prin ROMPRESFILATELIA, Sectorul Export-Import-Presă Calea Griviței nr. 64—66, P.O.Box 12-291, Telex 10376 Prsfir, București, ROMÂNIA

Scanned with OKEN Scanner

GAZETA MATEMATICĂ

PUBLICAȚIE LUNARĂ PENTRU TINERET

Anul XCIII nr. 2 — Februarie 1988

LOGICĂ ȘI GEOMETRIE (VI)

Recunoașterea tautologiilor

de conf. dr. K. Teleman

Nota de față este o continuare a notei „Propoziții și tautologii", apărută în această revistă, nr. 7–8/1987 și se bazează pe notațiile, definițiile și rezultatele date acolo. Reamintim că am folosit notația mai simplă AB pentru desemnarea implicației materiale, care în mod uzual se notează $A \to B$. De asemenea, am notat prin O falsul și am convenit să numim *echivalente* două propoziții P, Q, ori de cîte ori propozițiile PQ și QP sînt tautologii și să scriem în acest caz $P \equiv Q$. De exemplu avem $A \equiv A$, $A(BC) \equiv B(AC)$, $(AO)O \equiv A$, oricare ar fi propozițiile A, B, C.

Introducem acum notațiile $I = OO$ și $A(BC) = (A, B; C)$, $A[B(CD)] = (A, B, C; D)$, $(A_1, \ldots, A_n; B) = A_1(A_2(\ldots(A_nB)\ldots))$.

Avem atunci $(A_1, \ldots, A_{n-1}, A_n; B) = (A_1, \ldots, A_{n-1}; A_nB)$ și $(O)II \equiv I$, $IO \equiv O$, $OI \equiv I$, $OO \equiv I$, $(A, B; C) \equiv (B, A; C)$, $(A_1, \ldots, A_n; B) \equiv (A_{\pi(1)}, \ldots, A_{\pi(n)}; B)$, unde π este o permutare arbitrară a indicilor $1, 2, \ldots, n$.

Vrem acum să stabilim un criteriu de recunoaștere a tautologiilor.

Cititorul care a urmărit cu atenție nota precedentă va stabili ușor că o propoziție P este o tautologie dacă și numai dacă $P \equiv I$. De asemenea, el va putea dovedi că sînt adevărate următoarele relații:

$$(P_1, P_2; P_2) \equiv I, \quad (AP_2, A; P_1P_2) \equiv I,$$

(1) $$(AP_1, AP_2; A(P_1P_2)) \equiv I, \quad (A\bar{P}_1, AP_2; A(P_1P_2)) \equiv I,$$

$$OP \equiv I, \quad (P_1O)(P_1P_2) \equiv I, \quad (P_1O, P_2O; P_1P_2) \equiv I,$$

$$(A\bar{P}_1, A, \bar{P}_2; P_1P_2) \equiv I, \quad A(BC) \cdot [(AB)(AC)] \equiv I,$$

(2) $$(A\bar{P}_1, A\bar{P}_2; A(P_1P_2)) \equiv I,$$

$$(P_1, P_2O, P_1P_2; O) \equiv (P_1, P_1P_2, P_2O; O) \equiv I,$$

$$(AP_1, A, P_2O, P_1P_2; O) \equiv I, \quad (A, P_2O, P_1P_2; O)(A(P_2O), A, P_1P_2; O) \equiv I,$$

(3) $$(AP_1, A(P_2O); A \cdot (P_1P_2)O) \equiv I,$$

$$(AB)[(AC)D \cdot (BC)D] \equiv I, \quad (AB)[(AO)B \cdot (BO)B] \equiv I,$$

$$(AB)(AB) \equiv I, \quad (AB)A \cdot (AB)B \equiv I, \quad (AO)A \cdot (AO)O \equiv I,$$

(4) $$(BO)B \cdot B \equiv I, \quad (BO)B \equiv B, \quad (AB)[(AO)B \cdot (BO)B] \cdot (AB)[(AO)B \cdot B] \equiv I,$$

(5) $$(AB)[(AO)B \cdot B] = (AB, AO \cdot B; B) \equiv I.$$

Intuitiv, ultima formulă arată că *dacă fiecare din propozițiile A, AO implică propoziția B, atunci propoziția B este „adevărată"*.

Tot intuitiv, tautologiile sînt propoziții *universal adevărate*. Pentru a explica acest termen vom introduce noțiunea de *funcție propozițională*.

Să considerăm un sistem de propoziții

(6) $$A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$$

pe care le vom numi *propoziții elementare*. Vom renota propozițiile O, I astfel:

(6') $$A_0 = O, A_{-1} = I.$$

Scanned with OKEN Scanner

Pentru $i, j \in \{-1, 0, 1, 2, \ldots, n, \ldots\}$ notăm

$$F_{ij}(A) = F_{ij}(A_1, A_2, \ldots) = A_iA_j. \tag{7}$$

Vom considera apoi şirul de simboluri

$$(ij),\ (ij)(kl),\ [(ij)(kl)]\ (rs),\ (ij)[(kl)(rs)], \ldots \tag{8}$$

în care literele $i, j, k, l, r, s, \ldots$ sînt indici ce aparţin mulţimii $L = \{-1, 0, 1, 2, \ldots, n, \ldots\}$. Definim inductiv propoziţiile $F_\alpha(A) = F_\alpha(A_1, A_2, \ldots)$ unde α parcurge şirul de simboluri (8), punînd

$$F_{\lambda\mu}(A_1, A_2, \ldots) = F_\lambda(A_1, A_2, \ldots)F_\mu(A_1, A_2, \ldots) \tag{9}$$

sau, mai simplu,

$$F_{\lambda\mu}(A) = F_\lambda(A)F_\mu(A).$$

Atunci simbolurile $F_\alpha(A)$ desemnează propoziţiile ce pot fi formate plecînd de la propoziţiile elementare (6), (6'), aplicînd operaţia binară:

$$\langle P, Q\rangle \to PQ.$$

Propoziţiile F_α astfel obţinute vor fi numite *funcţii propoziţionale* de „argumentele" (6).

Tautologiile construite în nota citată şi cele indicate mai sus sînt funcţii propoziţionale de unul, două, trei sau patru argumente care au fost notate A, B, C, D, P, P_1, P_2. Aceste funcţii propoziţionale au următoarea proprietate remarcabilă: *Oricum am înlocui, în oricare din tautologiile indicate, fiecare argument prin una din propoziţiile O, I, obţinem o propoziţie echivalentă cu I.*

Vom demonstra proprietatea reciprocă:

($\mathcal{S}$). *Fie $F_\alpha(A)=F_\alpha(A_1, A_2, \ldots)$ una din funcţiile propoziţionale construite mai sus. Dacă pentru fiecare aplicaţie*

$$\varphi : \{A_1, A_2, \ldots\} \to \{O, I\}$$

propoziţia $F_\alpha(\varphi(A_1), \varphi(A_2), \ldots)$ este echivalentă cu I, atunci $F_\alpha(A) \equiv I$, deci $F_\alpha(A)$ este o tautologie.

Pentru a dovedi această proprietate vom observa că, dacă înlocuim fiecare simbol A_i prin O sau I, funcţiile $F_\alpha(A)$ devin propoziţii F_α^φ şi fiecare din aceste propoziţii este echivalentă fie cu O fie cu I. Vom folosi notaţiile:

$$A_i^\varphi = \begin{cases} A_i, & \text{dacă } \varphi(A_i) = I \\ A_iO, & \text{dacă } \varphi(A_i) = O, \end{cases} \qquad (i = 1, 2, \ldots).$$

$$F_\alpha(\varphi) = F_\alpha(\varphi(A_1), \varphi(A_2), \ldots)$$

$$F_\alpha^\varphi(A) = \begin{cases} F_\alpha(A_1, A_2, \ldots) & \text{dacă } F_\alpha(\varphi) \equiv I \\ F_\alpha(A_1, A_2, \ldots)\cdot O & \text{dacă } F_\alpha(\varphi) \equiv O. \end{cases}$$

Vom dovedi proprietatea ($\mathcal{S}$) cu ajutorul formulei

$$(A_1^\varphi, A_2^\varphi, \ldots ; F_\alpha^\varphi(A)) \equiv I, \tag{10}$$

adevărată pentru orice aplicaţie $\varphi : \{A_1, A_2, \ldots\} \to \{O, I\}$.

Formula (10) se stabileşte prin inducţie în raport cu „lungimea" simbolului α.

Să presupunem că $\alpha = \lambda\mu$. În acest caz, $F_\alpha = F_\lambda F_\mu$ şi

$$F_\alpha^\varphi = F_\alpha^\varphi(A) = \begin{cases} F_\lambda^\varphi F_\mu^\varphi, & \text{dacă } F_\lambda(\varphi) \equiv F_\mu(\varphi) \equiv I \\ F_\lambda^\varphi O \cdot F_\mu^\varphi, & \text{dacă } F_\lambda(\varphi) \equiv O,\ F_\mu(\varphi) \equiv I \\ F_\lambda^\varphi O \cdot F_\mu^\varphi O, & \text{dacă } F_\lambda(\varphi) \equiv F_\mu(\varphi) \equiv O \\ (F_\lambda^\varphi \cdot F_\mu^\varphi O)O, & \text{dacă } F_\lambda(\varphi) \equiv I,\ F_\mu(\varphi) \equiv O. \end{cases} \tag{11}$$

Folosind echivalenţele (1), (2), (3) şi aplicînd, în fiecare din cele patru cazuri ce apar în (11), de două ori, regula *Modus Ponens*, deducem că dacă

$$(A_1^\varphi, A_2^\varphi, \ldots ; F_\lambda^\varphi(A)) \equiv (A_1, A_2^\varphi, \ldots ; F_\mu^\varphi(A) \equiv I,$$

Scanned with OKEN Scanner

atunci avem și echivalența (10). Rezultă că inducția funcționează și că *echivalența* (10) *este adevărată, oricare ar fi simbolul* α.

Să presupunem acum că este îndeplinită ipoteza din proprietatea ($\mathscr{F}$). În acest caz, vom avea $F_\alpha^\varphi(A) = F_\alpha(A)$, pentru orice φ (și pentru simbolul α fixat!). În acest caz vom avea, din (10),

$$(A_1^\varphi, A_2^\varphi, \ldots ; \quad F_\alpha(A)) \equiv I,$$

oricare ar fi aplicația $\varphi : \{A_1, A_2, \ldots\} \to \{O, I\}$.

Aplicînd de mai multe ori formula (5), în care alegem succesiv $A = A_1, A_2, \ldots$, deducem, folosind și regula *Modus Ponens*, că $F_\alpha(A) \equiv I$, deci $F_\alpha(A)$ este o tautologie.

Proprietatea ($\mathscr{F}$) ne dă criteriul de recunoaștere a tautologiilor la care ne-am referit mai sus. Într-adevăr, fiecare propoziție $F_\alpha(A)$ conține un număr finit, să zicem n, de propoziții elementare A_i. Pentru a vedea dacă $F_\alpha(A)$ este o tautologie, vom înlocui, în toate modurile posibile, propozițiile A_i ce apar în $F_\alpha(A)$, prin O sau I. Folosind relațiile (0), obținem în fiecare caz o propoziție echivalentă cu O sau cu I. Pentru ca $F_\alpha(A)$ să fie tautologie, va fi *suficient* să verificăm că, oricare ar fi înlocuirea făcută, obținem o propoziție echivalentă cu I. Rezultă că după 2^n înlocuiri, putem recunoaște dacă $F_\alpha(A)$ este tautologie. Dacă în considerațiile noastre nu considerăm drept propoziții decît simbolurile O, I, A_i și $F_\alpha(A)$, și dacă nu introducem alte tautologii în afara celor ce se deduc prin aplicarea axiomelor date în nota precedentă, atunci condiția dată în proprietatea ($\mathscr{F}$) este atît suficientă, cît și necesară.

Dacă însă propozițiile A_i sînt ele însele formate cu ajutorul altor propoziții, atunci este posibil ca să apară și tautologii ce nu satisfac criteriul din proprietatea ($\mathscr{F}$).

De exemplu, dacă $A_1 = BB$, atunci A_1 este o tautologie ce nu verifică acel criteriu. Oricum, criteriul stabilit furnizează o *condiție suficientă*, ce poate fi utilizată pentru a rezolva exercițiile propuse în nota precedentă.

ASUPRA UNOR OPERAȚII CU FUNCȚII INTEGRABILE

de lector univ. dr. **Constantin V. Crăciun**, București

0. Introducere. După cum se știe, este adevărată următoarea

0.1. Teoremă. *Dacă* $f, g : [a, b] \to \mathbf{R}$ *sînt două funcții integrabile, atunci funcțiile* $|f|$ *și* fg *sînt integrabile.*

În multe cărți de analiză matematică (tratate sau cursuri universitare) demonstrarea acestor proprietăți se face cu ajutorul criteriului de integrabilitate al lui *Lebesgue*. În manualele de liceu ele sînt prezentate într-un caz particular, pentru funcțiile continue.

În cele ce urmează, bazîndu-ne pe [1] și [2], vom demonstra integrabilitatea funcțiilor $|f|$ și fg (f și g integrabile *Riemann*) fără a folosi criteriul integral al lui *Lebesgue*. În încheiere, vom arăta, printr-un exemplu ([3]), următorul fapt : compunerea a două funcții integrabile nu este totdeauna o funcție integrabilă.

1. Integrabilitatea modulului unei funcții integrabile

1.1. Teoremă. *Dacă* f *este o funcție integrabilă pe* $[a, b]$, *atunci funcția* $|f|$ *este integrabilă pe* $[a, b]$ *și*

$$\left| \int_a^b f(x)\,dx \right| \leqslant \int_a^b |f(x)|\,dx.$$

Demonstrație. Pentru orice mulțime nevidă $A \subseteq [a, b]$, notăm : $M = M_A(f) = \sup_A f$; $m = m_A(f) = \inf_A f$; $M' = M'_A(|f|) = \sup_A |f|$; $m' = m_A(|f|) = \inf_A |f|$.

1°. Dacă $f \geqslant 0$ pe $A \Rightarrow (M' = M$ și $m' = m) \Rightarrow M' - m' = M - m$.

2°. Dacă $f \leqslant 0$ pe $A \Rightarrow (M' = -m$ și $m' = -M) \Rightarrow M' - m' = M - m$.

3° Dacă f ia pe A atît valori pozitive cît și negative, atunci $M' = \max\{M, -m\} \Rightarrow M' - m' \leqslant M' \leqslant M - m$.

Scanned with OKEN Scanner

Din inegalitatea (5), pentru Δ astfel determinat, avem

$$S_\Delta(f^2) - s_\Delta(f^2) < \varepsilon$$

și deci, tot în baza criteriului lui *Darboux*, deducem că f^2 este integrabilă pe $[a, b]$.

2.2. Teoremă. *Dacă f și g sînt integrabile pe $[a, b]$, atunci funcția fg este integrabilă pe $[a, b]$.*

Demonstrație. Consecință imediată a Propoziției 2.1 de mai sus și a egalității

$$fg = \frac{1}{4}\left[(f+g)^2 - (f-g)^2\right].$$

Observații. 1. Reciproca teoremei nu este adevărată. Într-adevăr, considerăm funcția din exemplul de la teorema 1.1. Luînd $f = g$, constatăm că $(fg)(x) = 1$, pentru orice $x \in [a, b]$, de unde rezultă că fg este integrabilă pe $[a, b]$, cu toate că nici f, nici g nu e integrabilă pe $[a, b]$.

2. Dacă $f, g : [a, b] \to \mathbf{R}$ sînt două funcții integrabile, în general, avem

$$\int_a^b (fg)(x)\,dx \neq \int_a^b f(x)\,dx \cdot \int_a^b g(x)\,dx.$$

Exemplu. Fie $f, g : [0, 2] \to \mathbf{R}$, $f(x) = 1$, $(\forall)\, x \in [0, 2]$ și $g(x) = x$, $(\forall) x \in [0,2]$. Deducem

$$\int_0^2 f(x)g(x)\,dx = \int_0^2 1 \cdot x\,dx = \frac{x^2}{2}\Big|_0^2 = 2 \text{ și}$$

$$\int_0^2 f(x)\,dx \cdot \int_0^2 g(x)\,dx = \int_0^2 1 \cdot dx \cdot 2 = 2 \cdot 2 = 4.$$

Rezultă că

$$\int_0^2 (fg)(x)\,dx \neq \int_0^2 f(x)\,dx \cdot \int_0^2 g(x)\,dx.$$

3. Compunerea a două funcții integrabile

Este cunoscut faptul că față de operația de compunere a două funcții, atît clasa funcțiilor continue cît și clasa funcțiilor derivabile sînt închise (stabile). Nu același lucru se întîmplă dacă se consideră clasa funcțiilor integrabile *Riemann*. Mai precis: *prin compunerea a două funcții integrabile nu se obține totdeauna o funcție integrabilă.*

Acest fapt va fi pus în evidență în acest paragraf printr-un exemplu.

Exercițiul 1. Să se arate că funcția lui *Riemann* $f : [0, 1] \to \mathbf{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} 0, \text{ dacă } x \text{ este irațional sau } x = 0, \\ \dfrac{1}{q}, \text{ dacă } x = \dfrac{p}{q}, \text{ unde } \dfrac{p}{q} \text{ este o fracție ireductibilă,} \end{cases}$$

este integrabilă pe $[0, 1]$.

Soluție. Fie $\varepsilon > 0$ inferior lui 1 și un număr natural $m > \dfrac{2}{\varepsilon}$. Evident că în intervalul $[0,1]$ există un număr finit k de numere raționale al căror numitor este mai mic decît m

Scanned with OKEN Scanner

Fie Δ o diviziune arbitrară a intervalului $[0,1]$. Rezultă că există cel mult $2k$ intervale parțiale $\Delta_1', \Delta_2', \ldots, \Delta_{2k}'$, astfel încît suma lungimilor lor este mai mică decît $\frac{\varepsilon}{2}$ și care conțin cele k numere $\frac{1}{q}$.

Notăm cu $\Delta_1'', \Delta_2'', \ldots, \Delta_r''$ celelalte intervale parțiale din diviziunea Δ.

Fie $M_i' = \sup\{f(x), x \in \Delta_i'\}$, $m_i' = \inf\{f(x), x \in \Delta_i'\}$ și $l(\Delta_i')$ = lungimea intervalului Δ_i'.

Deoarece în fiecare din intervalele parțiale Δ_i'' există atît puncte iraționale x în care $f(x) = 0$ cît și puncte raționale $x = \frac{p}{q}$, $q > m$ și astfel încît $f\left(\frac{p}{q}\right) = \frac{1}{q} < \frac{1}{m}$, avem:

$$S_\Delta(f) - s_\Delta(f) = \sum_{i=1}^{2k} (M_i' - m_i')\, l(\Delta_i') + \sum_{i=1}^{r} (M_i'' - m_i'')\, l(\Delta_i'').$$

Ținînd seama de relațiile $M_i' - m_i' < 1$, $m_i'' = 0$, $M_i'' < \frac{1}{m}$, rezultă că $S_\Delta(f) - s_\Delta(f) <$

$$< \sum_{i=1}^{2k} l(\Delta_i') + \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{r} l(\Delta_i'') < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{1}{m} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

și deci, conform criteriului lui *Darboux*, f este integrabilă pe $[0, 1]$.

Pentru calculul integralei $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$ observăm că $s_\Delta(f) = 0$, deoarece în orice subinterval al lui Δ marginea inferioară a lui f este 0. Deducem imediat că integrala *Darboux* inferioară este $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = 0$. Din integrabilitatea lui f rezultă că $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = 0$.

Exercițiul 2. Compunerea a două funcții integrabile *nu* este totdeauna o funcție integrabilă.

Soluție. Împreună cu funcția lui *Riemann* din exercițiul 1, considerăm funcția

$$g: [0, 1] \to \{0, 1\},\ g(x) = \begin{cases} 0, & \text{dacă } x = 0 \\ 1, & \text{dacă } 0 < x \leqslant 1. \end{cases}$$

Deoarece este monotonă, funcția g este integrabilă.

Fie $h = g \circ f: [0, 1] \to \mathbf{R}$. Avem:

$$h(x) = \begin{cases} 0, & \text{dacă } x \text{ este irațional sau } x = 0, \\ 1, & \text{dacă } x \text{ este rațional,} \end{cases} \qquad x \in [0, 1],$$

funcție care se știe că este neintegrabilă *Riemann*. Rezultă că, deși f și g sînt amîndouă integrabile, totuși $h = g \circ f$ *nu* este integrabilă.

Observație. Compunerea $h = g \circ f$ dintre o funcție integrabilă f și o funcție continuă g este totdeauna o funcție integrabilă ([3], pag. 149—150).

Bibliografie

[1]. *E. Fischer*, Intermediate Real Analysis. Springer-Verlag New York, Heidelberg, Berlin, 1983.

[2]. *A. Doneddu*, Fonctions réelles d'une variable réelle. Vuibert, Paris, 1984.

[3]. *G. Flory*, Exercices de topologie et d'analyse. Tome 2. Vuibert, Paris, 1976.

Scanned with OKEN Scanner

ECUAȚIA $p^n = q^n + r^n$

de Marian Deaconescu, asist. univ., Timișoara

Scopul notei de față este stabilirea următorului rezultat:

Propoziție. *Ecuația* $x^n = y^n + z^n$ *nu are soluții de forma* (p, q, r, n) *unde* p, q, r *sînt numere prime și* $n \in \mathbf{N}$, $n > 1$.

Acest rezultat este un caz particular al Marii Teoreme a lui *Fermat* și o extindere a următorului rezultat din [1]:

Lemă. *Fie* p, q *numere prime astfel încît* $p^m - q^n = 1$. *Atunci*:

a) $p = 2$, $n = 1$, $q = 2^m - 1$ *sau*

b) $q = 2$, $m = 1$, $p = 2^n + 1$ *sau*

c) $p = 3$, $m = 2$, $q = 2$, $n = 3$.

Demonstrația propoziției. Presupunem, prin reducere la absurd, că există o soluție (p, q, r, n) a ecuației, cu proprietățile din enunț. În orice caz, numerele p, q, r sînt distincte și exact unul din ele este egal cu 2. Dacă $p = 2$, se obține $2^n = q^n + r^n$, contradicție cu $q > 2$, $r > 2$. Deci $q = 2$ sau $r = 2$, ceea ce conduce la una din egalitățile $2^n = p^n - q^n$ sau $2^n = p^n - r^n$. Ne ocupăm doar de prima, cealaltă tratîndu-se în mod analog. Distingem cazurile:

I) n este impar. Atunci, cum $2^n = (p - q)(p^{n-1} + p^{n-2}q + \ldots + q^{n-1})$, se obține că $p^{n-1} + p^{n-2}q + \ldots + q^{n-1} = 1$, deoarece a doua paranteză este un număr impar. Pe de altă parte, pentru $n \geqslant 3$, avem că $p^{n-1} + p^{n-2}q + \ldots + q^{n-1} > 1$. Rezultă $n = 1$, contradicție cu alegerea lui n.

II) $n = 2t$. Atunci $2^n = (p^t + q^t)(p^t - q^t)$ și există $k \in \mathbf{N}$ astfel încît $p^t + q^t = 2^k$, $p^t - q^t = 2^{2t-k}$. Atunci $2p^t = 2^k + 2^{2t-k}$, adică

$$p^t = 2^{k-1}(1 + 2^{2(t-k)}). \tag{1}$$

Deoarece p este prim, rezultă $k = 1$ și relația (1) devine

$$p^t = 1 + 4^{t-1}. \tag{2}$$

Egalitatea (2) poate avea loc doar pentru $p = 3$. Atunci, transcriind (2) sub forma $3^t - 2^{2(t-1)} = 1$, se poate aplica lema în cazul b). Putem avea:

$$3 = 2^{2(t-1)} + 1, \text{ deci } 2(t-1) = 1, \text{ absurd,}$$

sau

$$t = 2,\ 2(t-1) = 3, \text{ absurd.}$$

Deoarece presupunerea că există soluții ale ecuației cu proprietățile din enunț conduce la contradicții, propoziția este demonstrată.

Corolar. Soluțiile ecuației $x^n = y^n + z^n$, de forma (p, q, r, n) unde p, q, r sînt numere prime și $n \in \mathbf{N}$ sînt $(p, 2, r, 1)$, unde p și r sînt prime gemene.

BIBLIOGRAFIE

[1]. *D. S. Passman*, Permutation groups, curs litografiat, Yale University, 1967.

Scanned with OKEN Scanner

ASUPRA UNOR TEHNICI DE REZOLVARE A UNOR INEGALITĂȚI (ÎN LEGĂTURĂ CU PROBLEMA 0 : 469, G.M. 2/1986)

de C. Caragea și D. Arventiev, profesori, Constanța

Problema 0 : 469 (autor *V. Cîrtoaje*) din G.M. 2/1986, care este generalizarea unei probleme date la a XXV-a O.I.M., ne-a atras în mod deosebit atenția. Enunțul acestei probleme este următorul:

Fie $a_1, a_2, \ldots, a_n$ *numere reale nenegative* $(n \geq 3)$, *iar* p *și* q *numere reale care satisfac relațiile*:

$$p \geq \frac{n-1}{3n-1}; \quad \frac{2n}{n-1}\,p + \frac{n-2}{3n}\,q = 1.$$

Să se demonstreze că $p(\Sigma a_1)^3 + q\Sigma a_1a_2a_3 \geq (\Sigma a_1)(\Sigma a_1a_2)$.

Generalizarea s-a făcut în două sensuri: atît al coeficienților variabilelor cît și al numărului lor.

Modul în care am rezolvat ambele generalizări credem că este demn de reținut și considerăm că ar putea înarma pe cititori cu noi instrumente pentru rezolvarea unor inegalități dificile.

Fie $f(X) = (X - a_1)(X - a_2)\ldots(X - a_n) = X^n - d_1X^{n-1} + d_2X^{n-2} + \ldots + (-1)^n d_n$, unde $d_1 = \Sigma a_1$, $d_2 = \Sigma a_1a_2$, $d_3 = \Sigma a_1a_2a_3$, etc. Polinomul $f(X)$ are toate rădăcinile reale și pozitive și rezultă atunci, ca o consecință a teoremei lui *Rolle* că și toate derivatele lui $f(X)$ de ordin $\leq n-1$ au rădăcinile reale și pozitive. Deci

$$f^{(n-3)}(X) = A_n^{n-3}X^3 - d_1A_{n-1}^{n-3}X^2 + d_2A_{n-2}^{n-3}X - d_3A_{n-3}^{n-3}$$

(A_n^k = aranjamente de n luate cîte k) are rădăcinile reale pozitive, fie ele x_1, x_2, x_3.

Folosind relațiile lui *Viète*, avem:

$$x_1 + x_2 + x_3 = \frac{3}{n}\,d_1; \quad x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 = \frac{6}{n(n-1)}\,d_2;$$

$$x_1x_2x_3 = \frac{6\,d_3}{n(n-1)(n-2)}.$$

Inegalitatea din enunț devine

$$p\,d_1^3 + q\,d_3 \geq d_1d_2$$

sau

$$p'\left(\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}\right)^3 + q'x_1x_2x_3 \geq \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}\cdot\frac{x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1}{3}$$

$\left(\text{după ce am notat } p' = \frac{2n}{n-1}\,p,\ q' = \frac{n-2}{3n}\,q\right)$, cu $p' + q' = 1$, $p' \geq \frac{3}{4}$ $\left(p' = \frac{7}{9}\right.$ este valoarea pentru problema dată la a XXV-a O.I.M.$\left.\right)$.

În continuare, pentru a simplifica notația, ne ocupăm de inegalitatea:

$$p\left(\frac{\Sigma a}{3}\right)^3 + q\,abc \geq \frac{\Sigma a}{3}\cdot\frac{\Sigma ab}{3},\ \text{cu}\ p \geq \frac{3}{4},\ p+q=1, \qquad (*)$$

unde $a, b, c \geq 0$.

Se poate observa că $p = \frac{3}{4}$ este minimal („cel mai bun"). Dacă $c = 0$ rezultă:

$$p\left(\frac{a+b}{3}\right)^3 \geq \frac{a+b}{3}\cdot\frac{ab}{3},\ (\forall)\ a, b > 0$$

care este echivalentă succesiv cu

$$pa^2 + pb^2 + 2pab \geq 3ab \Leftrightarrow pa^2 + pb^2 + ab(2p-3) \geq 0,\ (\forall)\ a, b > 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow p\left(\frac{a}{b}\right)^2 + (2p-3)\frac{a}{b} + p \geq 0,\ (\forall)\ \frac{a}{b} > 0,$$

sau, notînd $\frac{a}{b} = u$, obținem $pu^2 + (2p-3)u + p \geq 0$, $(\forall)\ u > 0$. Notînd cu u_1 și u_2 rădăcinile trinomului, deoarece $p \leq 1$ (fiind minimal) și $u_1 + u_2 = (3-2p)/p > 0$, trinomul nu poate avea ambele rădăcini reale negative și deci pentru a fi pozitiv pentru orice $u > 0$, este necesar și suficient ca $\Delta \leq 0$, adică $p \geq \frac{3}{4}$.

Notînd $A = \frac{a}{a+b+c}$, $B = \frac{b}{a+b+c}$, $C = \frac{c}{a+b+c}$, inegalitatea (*) de demonstrat devine $\frac{p}{27} + q\,ABC - \frac{\Sigma AB}{9} \geq 0$, cu $A + B + C = 1$. Din $A + B + C = 1$, rezultă $A \leq \frac{1}{3}$ sau $B \leq \frac{1}{3}$ sau $C \leq \frac{1}{3}$. Fie $C \leq \frac{1}{3}$ și $A \leq B$. Considerînd $A_1 = A + \varepsilon$, $B_1 = B - \varepsilon$ cu $\varepsilon \in (0, B - A)$, $C_1 = C$, avem $A_1 + B_1 + C_1 = A + B + C = 1$ (așadar, o variantă la metoda lui *Sturm*). Să arătăm că:

$$\frac{p}{27} + qABC - \frac{\Sigma AB}{9} \geq \frac{p}{27} + q\,A_1B_1C_1 - \frac{\Sigma A_1B_1}{9} \Leftrightarrow (B - A - \varepsilon)(9qC - 1) \leq 0.$$

Dar $B - A - \varepsilon > 0$ și deci, dacă $q \leq 0$, ultima inegalitate este adevărată; dacă $q > 0$ avem $q \leq \frac{1}{4}$ $\left(\text{din}\ p \geq \frac{3}{4}\ \text{și}\ p + q = 1\right)$, $C \leq \frac{1}{3} < \frac{4}{9} \Rightarrow 9qC - 1 < 0$ și, de asemenea, inegalitatea este adevărată.

Luînd $\varepsilon = \frac{B-A}{2}$, $A_1 = \frac{A+B}{2} = B_1$, e suficient să demonstrăm că

$$p + 27qA_1^2C_1 - 3(A_1^2 + 2A_1C_1) \geq 0,\ \text{cu}\ 2A_1 + C_1 = 1,\ C_1 \leq \frac{1}{3}\ \text{și}\ A_1 \geq \frac{1}{3}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Eliminînd pe C_1, apoi pe A_1, obținem de demonstrat că:

$f(A_1) = 54(1-p)A_1^3 + 9A_1^2(3p-4) + 6A_1 - p \leqslant 0$, cu $A_1 \geqslant \frac{1}{3}$ sau

$g(C_1) = 27(1-p)C_1^3 + 9C_1^2(6p-5) - 3C_1(9p-7) + 4p - 3 \geqslant 0$, cu $0 \leqslant C_1 \leqslant \frac{1}{3}$.

Folosind derivatele obținem:

1) Dacă $p > 1$, ecuația $f'(A_1) = 0$ are rădăcinile $\frac{1}{3}$ și $\frac{1}{9(1-p)}$ și deoarece $f\left(\frac{1}{3}\right) = 0$ și $A_1 \geqslant \frac{1}{3}$ și $p > 1$, rezultă $f'(A_1) \leqslant 0$, deci $f(A_1) \leqslant 0$, $(\forall) A_1 \geqslant \frac{1}{3}$.

2) Dacă $p < 1$, ecuația $g'(C_1) = 0$ are rădăcinile $\frac{1}{3}$ și $\frac{-9p+7}{9(1-p)} < \frac{1}{3}$ și întrucît $g(0) = 4p - 3 \geqslant 0$ oricare ar fi poziția lui $\frac{-9p+7}{9(1-p)}$ față de zero, rezultă că $g(C_1) \geqslant 0$, $(\forall) C_1 \in \left[0, \frac{1}{3}\right]$.

3) Dacă $p = 1$, rezultă $q = 0$, deci $\frac{1}{3} \geqslant A_1B_1 + B_1C_1 + C_1A_1 \Leftrightarrow (A_1 + B_1 + C_1)^2 \geqslant 3(A_1B_1 + B_1C_1 + C_1A_1) \Leftrightarrow A_1^2 + B_1^2 + C_1^2 \geqslant A_1B_1 + B_1C_1 + C_1A_1$, inegalitate cunoscută.

Deci $\frac{p}{27} + qABC - \frac{\Sigma AB}{9} \geqslant \frac{p}{27} + qA_1B_1C_1 - \frac{\Sigma A_1B_1}{9} \geqslant 0$, egalitatea avînd loc cînd $A_1 = B_1 = C_1 = \frac{1}{3}$, deci și $A = B = C = \frac{1}{3}$ sau $a = b = c$.

Cu aceasta inegalitatea este complet demonstrată.

REZOLVAREA ÎN Z* A ECUAȚIILOR $x^{y^z} = y^{z^x}$ ȘI $x^{y^z} = z^{y^x}$

de Florin Vulpescu-Jalea, profesor, București

Scopul acestui articol este determinarea tuturor soluțiilor întregi și nenule ale ecuațiilor

$$x^{y^z} = y^{z^x}, \quad (1) \text{ și } x^{y^z} = z^{y^x}, \quad (2).$$

Teorema 1. *Soluțiile întregi și nenule ale ecuației* (1) *sînt*:

$$\begin{cases} x = 2, \\ y = 4, \\ z = 1; \end{cases} \quad \begin{cases} x = 4, \\ y = 2, \\ z = 1; \end{cases} \quad \begin{cases} x = -4, \\ y = -2, \\ z = 1; \end{cases} \quad \begin{cases} x = -2, \\ y = -4, \\ z = 1; \end{cases} \quad \begin{cases} x = a, \\ y = a, \\ z = b; \end{cases} \quad \begin{cases} x = -2a, \\ y = 2a, \\ z = 2c; \end{cases}$$

cu $a, b \in \mathbf{Z}^*$; $c \in \mathbf{N}^*$.

Demonstrație. Să observăm, pentru început, că pentru $x, y, z \in \mathbf{Z}^*$, egalitatea (1) poate avea loc numai dacă x și y au aceeași paritate. Deoarece ecuația (1) este simetrică în x și y, este suficientă rezolvarea ei în ipoteza $x \leqslant y$. Ținînd cont de această condiție, după semnul numerelor x, y, z, deosebim șase cazuri.

Scanned with OKEN Scanner

Cazul I: $x, y, z \in \mathbf{N}^*$.

1°. Dacă $z = 1$, obținem $x^y = y^x$. Soluțiile naturale ale acestei ecuații sînt, conform cu [1], p. 171–172, $x = 2$, $y = 4$ și $x = y = a$; $a \in \mathbf{N}^*$.

2°. Dacă $x = 1$, rezultă $y = 1$, deci $x = y$.

3°. Dacă $x \geqslant 2$ și $z \geqslant 2$, vom arăta că $x = y$. Într-adevăr, ridicînd egalitatea (1) la puterea $x^{-z}y^{-z}$, obținem

$$x^{x^{-z}} = y^{y^{-z}}. \tag{3}$$

Considerăm funcția $f: [2, +\infty) \to \mathbf{R}$, definită prin $f(x) = x^{x^{-z}}$.

Avem $f'(x) = x^{x^{-z}-z-1}(1 - \ln x^z)$. Dar $1 - \ln x^z < 1 - \ln 2^2 < 0$.

În consecință, $f'(x) < 0$, $(\forall)\, x \geqslant 2$. Deci f este strict descrescătoare. De aici rezultă că egalitatea (3) are loc numai pentru $x = y$.

În continuare vom folosi următoarele notații:

$$\begin{cases} \text{dacă } x \in \mathbf{Z} - \mathbf{N}, & \text{fie } x = -u;\ u \in \mathbf{N}^*, \\ \text{dacă } y \in \mathbf{Z} - \mathbf{N}, & \text{fie } y = -v;\ v \in \mathbf{N}^*, \\ \text{dacă } z \in \mathbf{Z} - \mathbf{N}, & \text{fie } z = -w;\ w \in \mathbf{N}^*. \end{cases} \tag{4}$$

Cazul II: $x \in \mathbf{Z} - \mathbf{N}$; $y, z \in \mathbf{N}^*$. Se constată că egalitatea (1) poate avea loc numai dacă y este par, deoarece în caz contrar membrul sting este negativ. În acest caz obținem

$$u^{y^z} = y^{(-u)^z}. \tag{5}$$

Dacă z este impar, egalitatea (5) este imposibilă, întrucît membrul ei drept este subunitar. Dacă z este par, atunci (5) are formă analoagă cu (1). Conform cazului I, obținem $u = y$. Deci $x = -2a$, $y = 2a$, $z = 2c$; $a, c \in \mathbf{N}^*$.

Cazul III: $z \in \mathbf{Z} - \mathbf{N}$; $x, y \in \mathbf{N}^*$. Ecuația (1) devine

$$x^{y^{-w}} = y^{x^{-w}},$$

ceea ce prin ridicare la puterea $x^w y^w$, conduce la

$$x^{x^w} = y^{y^w}. \tag{6}$$

Deoarece funcția $g: [1, +\infty) \to \mathbf{R}$, $g(x) = x^{x^w}$ este strict crescătoare, din (6) rezultă $x = y$.

Cazul IV: $x, y \in \mathbf{Z} - \mathbf{N}$; $z \in \mathbf{N}^*$. Egalitatea (1) se scrie

$$(-u)^{(-v)^z} = (-v)^{(-u)^z}$$

ceea ce, indiferent de paritatea lui z este echivalent cu $(-u)^{v^z} = (-v)^{u^z}$. Cum u și v au aceeași paritate, ultima egalitate este analoagă cu (1). În conformitate cu I, deducem $x = -4$, $y = -2$, $z = 1$ sau $x = a$, $y = a$, $z = c$; $a \in \mathbf{Z} - \mathbf{N}$, $c \in \mathbf{N}^*$.

Cazul V: $x, z \in \mathbf{Z} - \mathbf{N}$; $y \in \mathbf{N}^*$. Obținem

$$(-u)^{y^{-w}} = y^{(-u)^{-w}}.$$

Dacă y este impar, membrul sting este negativ iar cel drept pozitiv. Dacă y este par, membrul sting nu este număr real. Deci nu există soluții.

Cazul VI: $x, y, z \in \mathbf{Z} - \mathbf{N}$. Avem de rezolvat ecuația

$$(-u)^{-(v)^{-w}} = (-v)^{(-u)^{-w}}.$$

1°. Dacă w este par, atunci $(-u)^{v^{-w}} = (-v)^{u^{-w}}$. Cum u și v au aceeași paritate, rezultă $u^{v^{-w}} = v^{u^{-w}}$. Ridicînd la puterea $u^w v^w$, obținem $u^{u^w} = v^{v^w}$. Această egalitate fiind analoagă cu (6), deducem $x = y$.

2°. Dacă w este impar, atunci $(-u)^{-v^{-w}} = (-v)^{-u^{-w}}$. În continuare, această egalitate se ridică la puterea -1 și se procedează ca la VI. 1°, rezultînd, din nou, $x = y$.

Scanned with OKEN Scanner

Sintetizînd cele de mai sus, obținem cele șase soluții enumerate în enunțul teoremei. Cu aceasta demonstrația este încheiată.

Teorema 2. *Soluțiile întregi și nenule ale ecuației* (2) *sînt*:

$$\begin{cases} x = -1, \\ y = 2a, \\ z = 1; \end{cases} \quad \begin{cases} x = 1, \\ y = 2a, \\ z = -1; \end{cases} \quad \begin{cases} x = a, \\ y = b, \ cu \ a, b \in \mathbf{Z}^*. \\ z = a; \end{cases}$$

Demonstrație. Se constată imediat că dacă egalitatea (2) are loc, atunci x și z au aceeași paritate. Întrucît ecuația (2) este simetrică în x și z, vom considera doar cazul $x \leqslant z$. După semnul numerelor x, y și z, distingem șase cazuri.

Cazul I: $x, y, z \in \mathbf{N}^*$. Avem trei situații.

1°. Dacă $x = 1$ sau $y = 1$, din (2), rezultă $x = z$.

2°. Dacă $x = y = 2$, egalitatea (2) devine $2^{2^2} = z^z$. Vom arăta că această relație are loc numai pentru $z = 2$. Într-adevăr, $z = 1$ nu verifică egalitatea, iar $z = 2$ verifică. Pentru $z \geqslant 3$, vom demonstra, prin inducție, că $2^{2^z} > z^4$. Dacă $z = 3$ obținem $2^8 > 3^4$, ceea ce este adevărat. Pentru $z + 1$ trebuie dovedit că $2^{2^{z+1}} > (z + 1)^4$. Dar

$$z \geqslant 3 \Rightarrow z^2 > z + 1 \Rightarrow z^4 > (z + 1)^2.$$

Atunci, conform ipotezei de inducție, deducem

$$2^{2^z} \rhd z^4 \blacktriangleright (z + 1)^2 \Rightarrow 2^{2^z} \rhd (z + 1)^2 \Rightarrow 2^{2^{z+1}} > (z + 1)^4,$$

ceea ce trebuia arătat. În consecință, și în acest caz obținem $x = z$.

3°. Dacă ($x \geqslant 2$, $y \geqslant 3$) sau ($x \geqslant 3$, $y \geqslant 2$), atunci prin ridicare la puterea y^{-x-y}, egalitatea (2) este echivalentă cu

$$x^{y-x} = z^{y-z}. \tag{7}$$

Introducem funcția $f : [2, +\infty) \to \mathbf{R}$, definită prin $f(x) = x^{y-x}$. Obținem $f'(x) = y^{-x} x^{y-x-1} \cdot (1 - x \ln x \ln y)$. Cum ($x \geqslant 2$, $y \geqslant 3$) sau ($x \geqslant 3$, $y \geqslant 2$), rezultă

$$x \ln x \ln y \geqslant 2 \ln 2 \ln 3 \blacktriangleright 2 \ln 2 = \ln 4 \blacktriangleright 1.$$

Deci $f'(x) < 0$, $(\forall)\, x \in [2, +\infty)$. De aici deducem că funcția f este injectivă, ceea ce conform cu (7), implică $x = z$.

Vom folosi mai departe notațiile (4).

Cazul II: $x \in \mathbf{Z} - \mathbf{N}$; $y, z \in \mathbf{N}^*$. Ecuația (2) se scrie

$$(-u)^{v^2} = z^{v-z}.$$

Pentru ca și membrul stîng al acestei egalități să fie pozitiv, este necesar ca y să fie par. Atunci obținem

$$u^{v^2} = z^{v-z}. \tag{8}$$

1°. Dacă $u = 1$, din (8), rezultă $z = 1$. Deci în acest caz soluția ecuației (2) este $x = -1$, $y = 2a$, $z = 1$; $a \in \mathbf{N}^*$.

2°. Dacă $u \geqslant 2$, egalitatea (8) se scrie sub forma echivalentă

$$u^{v^{z+u}} = z. \tag{9}$$

Se demonstrează ușor, prin inducție după n, că

$$a^n > n; \ a \geqslant 2, \ n \in \mathbf{N}^*. \tag{10}$$

Scanned with OKEN Scanner

Folosind (10) și faptul că $y \geqslant 2$, avem:

$$z + u > z \Rightarrow y^{z+u} > y^z > z \Rightarrow u^{y^{z+u}} > u^z > z,$$

în contradicție cu (9). Deci, în cazul II. 2° nu avem soluții.

Cazul III: $y \in \mathbf{Z} - \mathbf{N}$; $x, z \in \mathbf{N}^*$. Egalitatea (2) devine

$$x^{(-v)^z} = z^{(-v)^x}.$$

Cum x și z au aceeași paritate, ultima egalitate conduce la $x^{v^z} = z^{v^x}$, ceea ce, conform cazului 1, este posibil numai pentru $x = z$.

Cazul IV: $x, y \in \mathbf{Z} - \mathbf{N}$; $z \in \mathbf{N}^*$. Trebuie studiată egalitatea

$$(-u)^{(-v)^z} = z^{(-v)^{-u}}.$$

Pentru ca cei doi membri să aibă același semn, este necesar ca v să fie număr par. Atunci

$$u^{(-v)^z} = z^{(-v)^{-u}}. \tag{11}$$

1°. Dacă u și z sînt pari, din (11), deducem

$$u^{v^z} = z^{v^{-u}} \Leftrightarrow u^{v^{z+u}} = z.$$

Deoarece $u \geqslant 2$, ultima egalitate este analoagă relației (9). Procedînd deci ca la II. 2°, nu obținem soluții.

2°. Dacă u și z sînt impari, ecuația (11) se scrie $u^{-v^z} = z^{-v^{-u}}$, ceea ce este echivalent cu $u^{v^z} = z^{v^{-u}}$. Pentru $u \geqslant 2$, această egalitate este identică cu cea obținută la IV.1°. Dacă $u = 1$, atunci $z = 1$. Deci, în acest caz obținem soluția $x = -1$, $y = 2a$, $z = 1$; $a \in \mathbf{Z} - \mathbf{N}$.

Cazul V: $x, z \in \mathbf{Z} - \mathbf{N}$; $y \in \mathbf{N}^*$. Trebuie rezolvată ecuația

$$(-u)^{y^{-w}} = (-w)^{y^{-u}}.$$

Prin ridicare la puterea y^{u+w}, obținem $(-u)^{y^u} = (-w)^{y^w}$, de unde indiferent de paritatea lui y, rezultă

$$u^{y^u} = w^{y^w}. \tag{12}$$

1°. Dacă $u = 1$ sau $y = 1$, din (12) obținem $u = w$, deci $x = z$.

2°. Dacă $u \geqslant 2$, $y \geqslant 2$, atunci funcția $g : [2, +\infty) \to \mathbf{R}$, $g(u) = u^{y^u}$ fiind injectivă, din (12) rezultă $u = w$, adică $x = z$.

Cazul VI: $x, y, z \in \mathbf{Z} - \mathbf{N}$. Ecuația (2) devine

$$(-u)^{(-v)^{-w}} = (-w)^{(-v)^{-u}}.$$

Ridicînd la puterea $(-1)^w(-v)^{u+w}$ și ținînd cont că u și w au aceeași paritate, deducem $(-u)^{v^u} = (-w)^{v^w}$, ceea ce, oricare ar fi paritatea lui v, este echivalent cu $u^{v^u} = w^{v^w}$. Această egalitate este analoagă cu (12), și conduce deci la $x = z$.

În conformitate cu cele de mai sus, rezultă că soluțiile întregi și nenule ale ecuației (2) sînt:

$$\begin{cases} x = -1, \\ y = 2a, \\ z = 1; \end{cases} \quad \begin{cases} x = 1, \\ y = 2a, \\ z = -1; \end{cases} \quad \begin{cases} x = a, \\ y = b, \\ z = a; \end{cases} \text{ cu } a, b \in \mathbf{Z}^*,$$

ceea ce trebuia demonstrat.

Scanned with OKEN Scanner

Observație. Din modul în care a fost demonstrat cazul 1 al teoremelor 1 și 2, rezultă că:

(a) dacă $x, y, z \in [2, +\infty)$, atunci $x^{y^x} = y^{z^x} \Leftrightarrow x = y$,
și respectiv,

b) dacă $x, y, z \in [3, +\infty)$, atunci $x^{y^x} = z^{y^x} \Leftrightarrow x = z$.

Bibliografie

[1]. *W. Sierpinski*, „Ce știm și ce nu știm despre numerele prime", Editura Științifică, București, 1966.

CAPCANELE INFINITULUI ÎN MATEMATICA ELEMENTARĂ

de **Cristian Calude**, asist. univ. dr. și **Elena Calude**, profesoară, București

Ne propunem să discutăm cîteva exemple în care infinitul poate să apară „mascat" în probleme și raționamente matematice elementare. Începem cu problema numărul 3 propusă la concursul de depistare a elevilor din clasa a IV-a cu aptitudini deosebite pentru matematică (București, iunie 1984), prezentată și rezolvată de *A. Dumitru* și *Gh. Herescu* în G.M. 12/1984, p. 452. Reproducem integral textul problemei și soluția autorilor.

Un tren parcurge distanța de 60 km dintre București și Ploiești într-o oră. În același timp cu trenul, o rîndunică pornește în zbor din București spre Ploiești cu o viteză de 90 km/h și ajunge mai devreme decît trenul la destinație, apoi se întoarce zburînd spre tren pînă la întîlnirea cu el. Efectuează mai multe zboruri, pînă cînd ajunge odată cu el la Ploiești. Ce distanță a parcurs rîndunica de la București la Ploiești făcînd aceste zboruri?

Soluție. **Rîndunica ajunge la Ploiești în același timp cu trenul,** *deci zborul a durat o oră. Distanța parcursă de rîndunică în această oră este de* 90 *km.*

Această problemă diferențiază candidații care încearcă, în mod infructuos (la nivelul clasei a IV-a), să calculeze „pe bucăți" traseul parcurs de rîndunică de cei care *observă* că zborul rîndunicii durează *exact o oră*, care este timpul necesar pentru ca trenul să ajungă la Ploiești. Această observație se bazează esențial pe ipoteza, marcată de noi cu litere aldine așa cum în textul problemei cît și în cel al soluției, potrivit căreia rîndunica ajunge la Ploiești în același timp cu trenul.

Să analizăm mai detaliat enunțul problemei și anume să ne întrebăm dacă ipoteza discutată mai sus este compatibilă cu și independentă de celelalte date ale problemei. Să ne plasăm într-un cadru puțin mai general: admitem că trenul pleacă din B spre P cu viteza de v km/h, rîndunica zboară cu u km/h, $0 < v < u$, iar distanța dintre B și P este de x km, $x > 0$. Procesul se desfășoară ca în scenariul din problema dată elevilor (partea fără aldine). Datele „reale" sînt $v = 60$, $u = 90$, $x = 60$.

Să notăm cu $a(n)$ distanța parcursă de tren pînă la a n-a întîlnire cu rîndunica și cu $t(n)$ timpul în care trenul parcurge distanța $a(n)$. Inițial $a(0) = 0$, $t(0) = 0$. Un calcul simplu arată că $a(n+1)$ se obține adunînd la $a(n)$ suma dintre distanța parcursă de tren în timp ce rîndunica străbate distanța $x - a(n)$ și spațiul parcurs de tren pînă la următoarea întîlnire cu rîndunica (în a doua etapă rîndunica zboară din P către tren). Exprimînd în formule ideea de mai sus ajungem la recurența

$$a(n+1) = a(n) + (x - a(n))v/u + v(x - a(n) - (x - a(n))v/u)/(u + v) =$$
$$= 2vx/(u + v) + a(n)(u - v)/(u + v).$$

Notînd cu b raportul $(u - v)/(u + v)$ deducem inegalitatea

$$0 < 1 - 2v/(u + v) = b < 1.$$

Recurența anterioară se explicitează imediat (folosind suma unei progresii geometrice):

$$a(n) = 2vx(b^n - 1)/((u + v)(b - 1)) = x(1 - b^n),\ n \geqslant 0.$$

În problemă, $a(n) = 60(1 - 5^{-n})$.

Se vede acum că pentru orice număr natural $n > 0$,

$$t(n) = a(n)/v = x(1 - b^n)/v \neq x/v,$$

unde x/v este timpul în care trenul parcurge distanța BP. Deci, pentru orice număr natural $n > 0$, *P nu poate fi locul în care trenul și rîndunica se întîlnesc a n-a oară* (după scurgerea timpului $t(n)$). *Aparent*, am ajuns la concluzia că ipoteza din problemă vine în contradicție cu celelalte date ale problemei! Situația analizată este asemănătoare cu celebrul paradox al lui *Ahile* descris de *Zenon* din Eleea. Ducînd mai departe analogia, am putea „argumenta" că trenul nu ajunge de fapt niciodată în P, deoarece el parcurge mai întîi distanța $a(1)$, apoi $a(2) - a(1)$, apoi $a(3) - a(2), \ldots$ la nesfîrșit.

Explicația este simplă: sîntem în prezența unui *proces infinit* care nu trebuie tratat cu mijloace convenabile numai proceselor finite. *Trenul și rîndunica se vor întîlni în P după x/v ore*; această afirmație se obține trecînd la limită în expresia lui $t(n)$:

$$\lim_{n\to\infty} t(n) = \lim_{n\to\infty} x(1 - b^n)/v = x/v,$$

deoarece $b \in (0, 1)$. Să reținem următoarele fapte: i) trenul și rîndunica se întîlnesc în P după ce s-au întîlnit în prealabil de o *infinitate* de ori, ii) timpul scurs de la plecarea din B pînă la întîlnirea din P este *finit*, iii) seria $\sum_{n=0}^{\infty} (a(n+1) - a(n))$ este convergentă și are ca sumă distanța parcursă de tren, BP.

Evident, motive ce nu mai au nevoie de explicație au determinat pe autorii problemei în discuție să adauge enunțului o ipoteză dependentă de (dar compatibilă cu) celelalte date.

P. R. Halmos discută o variantă a acestei probleme în articolul „The legend of *John von Neumann*", Amer. Math. Monthly 80(1973), 382–394. Cînd i s-a spus problema, *von Neumann* (unul din cei mai reprezentativi matematicieni ai secolului nostru, recunoscut încă din copilărie pentru viteza neobișnuită cu care efectua calcule complicate) a indicat instantaneu soluția. Dezamăgit, cel care enunțase problema a exclamat: „Oh, probabil că ați cunoscut dinainte trucul!". „Care truc?", a replicat *von Neumann*, „tot ce-am făcut este să calculez suma unei serii infinite".

METODA REDUCERII LA ABSURD ÎN REZOLVAREA PROBLEMELOR DE ARITMETICĂ

de **V. Arsinte**, profesor, Mangalia

Metoda reducerii la absurd este o metodă generală de rezolvare a problemelor de matematică. Cu toate acestea, există pînă în prezent un număr foarte redus de probleme de aritmetică care se pot rezolva numai cu această metodă. În gimnaziu folosirea ei e mai frecvent întîlnită în rezolvarea problemelor de geometrie și numai un număr restrins de elevi sînt capabili să utilizeze acest instrument. Tocmai din aceste motive, articolul de față își propune să familiarizeze de timpuriu elevii cu această metodă.

La baza metodei reducerii la absurd stă legea terțului exclus, adică dintre două propoziții contradictorii, una e adevărată și cealaltă falsă, iar altă posibilitate nu există. Metoda constă în a admite provizoriu ca adevărată propoziția contradictorie problemei date, apoi în baza acestei presupuneri se deduc o serie de consecințe, ce duc la un rezultat absurd, deoarece ele contrazic datele problemei (care se dau), fie un adevăr stabilit mai înainte. Practic se presupune că ceea ce se cere nu e adevărat. Apoi pe baza presupunerii făcute, se fac o serie de deducții logice, care vor scoate în evidență că presupunerea făcută duce la o absurditate. Deci, presupunerea făcută nu este posibilă și rămîne adevărată ceea ce se cere în problemă. De exemplu;

Problema 1. *Într-un aprozar sînt 19 lăzi de mere de două calități. Să se arate că există cel puțin 10 lăzi de mere de aceeași calitate.*

Soluție. Presupunem prin absurd că nu există 10 lăzi de mere de o calitate. Deci vor fi cel mult 9 lăzi de mere din fiecare calitate, adică în aprozar vor fi în total cel mult $9 \cdot 2 = 18$ lăzi de mere. Contradicție cu enunțul problemei. Rezultă că există cel puțin 10 lăzi de mere de o calitate.

Această problemă simplă se încadrează într-o categorie mai largă de probleme care se rezolvă cu ajutorul principiului lui *Dirichlet*, adică:

Scanned with OKEN Scanner

Dacă $n \cdot k + 1$ obiecte sînt dispuse în k celule, atunci cel puțin într-una din celule se află cel puțin $n + 1$ obiecte.

Într-adevăr, presupunem prin absurd că nu există vreo celulă în care se află $n+1$ obiecte. Atunci în fiecare celulă se află cel mult n obiecte. Deci în total sînt cel mult $n \cdot k$ obiecte, contradicție! Rezultă că există o celulă cu cel puțin $n + 1$ obiecte.

În rezolvarea unei probleme folosind principiul lui *Dirichlet* dificultatea constă în a stabili care sînt celulele și obiectele. Desigur în prima problemă celulele erau calitățile de mere iar obiectele erau lăzile. În continuare dăm o problemă care se rezolvă folosind principiul lui *Dirichlet*:

Problema 2. *Într-o pădure sînt mai mult de 3720 de arbori. Printre ei, cel mult o zecime au o înălțime de mai mult de 30 m și cel mult o cincime de mai puțin de 4 m. Să se demonstreze că există doi copaci care au aceeași înălțime în centimetri.*

Soluție. Între 4 m și 30 m sînt $(30-4) \cdot 100 = 2600$ cm. Cel mult $3720 : 10 = 372$ arbori au mai mult de 30 m și cel mult $3720 : 5 = 744$ arbori au mai puțin de 4 m. Deci, cu înălțimea între 4 m și 30 m sînt cel puțin $3720-372-744 = 2604$ arbori. Aplicînd principiul lui *Dirichlet*, există doi copaci care au aceeași înălțime în centimetri.

Dar metoda reducerii la absurd se poate folosi nu numai în probleme care se rezolvă cu ajutorul principiul lui *Dirichlet*. De exemplu:

Problema 3. *La un concurs la care au participat 3 pionieri s-au pus 10 întrebări. Pentru fiecare răspuns corect, un pionier primește 10 puncte și pentru fiecare răspuns greșit este penalizat cu 5 puncte. Știind că concurenții au obținut în total 240 de puncte și că al doilea a răspuns corect la cu 3 întrebări mai multe decît primul, să se afle la cîte întrebări a răspuns corect fiecare.*

Soluție. Punctajul total maxim pe care puteau să-l obțină cei trei pionieri este de $3 \cdot 10 \cdot 10 = 300$ de puncte. Presupunem prin absurd că al doilea pionier nu a răspuns corect la toate întrebările, deci ar fi fost cel puțin o întrebare la care nu a răspuns corect. Atunci primul nu a răspuns corect la cel puțin 4 întrebări și deci cei trei pionieri împreună ar fi obținut cu cel puțin $(1 + 4) \cdot (10 + 5) = 75$ de puncte mai puțin decît dacă ar fi răspuns corect toți, la toate întrebările, adică ar fi obținut cel mult $300-75=225$ de puncte, contradicție! Deci al doilea a răspuns corect la toate întrebările și a obținut $10 \cdot 10 = 100$ de puncte. Primul a răspuns corect la 7 întrebări și a obținut $7 \cdot 10 - 5 \cdot 3 = 55$ de puncte, iar al treilea a obținut $240 - 100 - 55 = 85$ de puncte.

Folosind metoda falsei ipoteze sau observînd că a obținut cu 15 puncte mai puțin decît dacă ar fi răspuns corect la toate întrebările, rezultă că al treilea a răspuns corect la 9 întrebări.

PROBLEME REZOLVATE PENTRU GIMNAZIU

Clasa a V-a

Problema E : 9059* (G.M. 2/1987, pag. 87)

Determinați două fracții ordinare de forma $\frac{a}{b}$ *și* $\frac{a}{c}$, *unde* $a, b, c \in \mathbb{N}^*$ *astfel încît*

$$\frac{a}{b} - \frac{a}{c} = \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{c}.$$

* * *

Soluție. Relația din enunț se mai poate scrie

$$\frac{ac - ab}{bc} = \frac{a^2}{bc} \text{ sau } a(c - b) = a^2 \text{ deci } c - b = a.$$

Fie $m, n \in \mathbb{N}^*$ astfel încît $m > n$. Dacă luăm $c = m$, $b = n$, $a = m - n$ avem fracțiile $\frac{m-n}{n}$, $\frac{m-n}{m}$ care verifică relația din enunț.

Scanned with OKEN Scanner

Soluție bună au dat: *Crețu Letiția-Marcela*, cl. a V-a, Șc. gen. nr. 1 Darabani; *Burcă Janina*, cl. a V-a, Lic. „Frații Buzești" Craiova; *Melian Constantin*, cl. a V-a, Șc. gen. nr. 1 Ilva Mare.

Problema E : 9060* (G.M. 2/1987, pag. 87)

Fie un număr A de forma $\overline{abcd}$ scris în baza zece. Să se arate că dacă $a + c = b + d$, atunci numărul A se divide cu 11.

* * *

Soluție. Avem succesiv:

$$A = \overline{abcd} = 1000a + 100b + 10c + d.$$

Ținînd seama de condiția din enunț avem:

$$A = 1000(b - c + d) + 100b + 10c + d = 1000b - 1000c + 1000d + 100b + 10c + d =$$
$$= 1100b - 990c + 1001d = 11(100b - 90c + 91d).$$

Deci A se divide cu 11.

Soluție bună au dat: *Ciobanu George*, cl. a V-a, Șc. gen. nr. 8 Slatina; *Dorin Ștefu*, cl. a V-a, Șc. gen. nr. 6 Turda; *Gaber Alexandru*, cl. a IV-a, Șc. gen. nr. 2 Craiova.

Clasa a VI-a

Problema E : 9065* G.M. 2/1987, pag. 88)

Să se determine cel mai mic pătrat perfect care începe cu 1985.

Ioan Bogdan, profesor, Ciceu-Giurgești, Bistrița-Năsăud

Soluție: Încercăm extragerea radicalului din numerele de forma 1985, $\overline{1985a}$, $\overline{1985ab}$, $\overline{1985abc}$, $\overline{1985abcd}$, ..., unde $a, b, c, d, \ldots$ sînt cifre în baza 10.

Pentru numărul 1985 avem:

$\sqrt{1985}$	44
16	$84 \cdot 4 = 336$
$=385$	
336	
$=49$	

deci 1985 nu este pătrat perfect.

Pentru numerele de forma $\overline{1985a}$ avem:

$\sqrt{\overline{1985a}}$	140
1	$24 \cdot 4 = 96$
$=98$	$280 \cdot 0 = 0$
96	
$= \overline{25a}$	
0	
$\overline{25a}$	

și se observă că avem „rest", deci numerele $\overline{1985a}$ nu pot fi pătrate perfecte.

Pentru numerele de forma $\overline{1985ab}$ avem:

$\sqrt{\overline{1985ab}}$	445
16	$84 \cdot 4 = 336$
$=385$	$885 \cdot 5 = 4425$
336	
$=49ab$	
4425	
$=uvw$	

Scanned with OKEN Scanner

Scanned with OKEN Scanner

și cum $u \in \{4, 5\}$, înseamnă că avem „rest", deci nici numerele de forma $\overline{1985ab}$ nu sînt pătrate perfecte.

Pentru numerele de forma $\overline{1985abc}$ avem:

$\sqrt{\overline{1985abc}}$	1409
1	$24 \cdot 4 = 96$
$=98$	$280 \cdot 0 = 0$
96	$2809 \cdot 9 = 2581$
$=25\overline{2a}$	
0	
$25\overline{abc}$	
25281	

și se observă că restul este zero dacă și numai dacă $a = 2$, $b = 8$, $c = 1$. Așadar, cel mai mic pătrat perfect care începe cu 1985 este numărul $1985281 = 1409^2$.

Soluție bună au dat: *Bacalu I. Drayoș*, cl. a VI-a, Șc. gen. nr. 117 București; *Șarcanț George*, cl. a VI-a, Șc. gen. nr. 23 Brăila; *Ghidănac Lucrefia*, cl. a VI-a, Șc. gen. nr. 8 Slatina.

Clasa a VII-a

Problema E : 3071* (G.M. 2/1987, pag. 89)

Să se afle care din numerele $\sqrt{\sqrt{13} - \sqrt{11}}$ *și* $\sqrt{\sqrt{19} - \sqrt{17}}$ *este mai mare. Generalizare.*

Patrik Popescu-Pampu, elev, București

Soluție. Vom da direct următoarea generalizare:

Dacă $0 \leqslant a < b$ și $k > 0$, avem:

$$\sqrt{\sqrt{a+k} - \sqrt{a}} > \sqrt{\sqrt{b+k} - \sqrt{b}}, \tag{1}$$

Într-adevăr, pentru aceasta e suficient să demonstrăm că:

$$\sqrt{a+k} - \sqrt{a} > \sqrt{b+k} - \sqrt{b}, \tag{2}$$

Notăm $x = \sqrt{a+k} - \sqrt{a}$, $y = \sqrt{b+k} - \sqrt{b}$. Avem:

$$x = \sqrt{a+k} - \sqrt{a} = \frac{(\sqrt{a+k} - \sqrt{a})(\sqrt{a+k} + \sqrt{a})}{\sqrt{a+k} + \sqrt{a}} = \frac{a+k-a}{\sqrt{a+k} + \sqrt{a}} = \frac{k}{\sqrt{a+k} + \sqrt{a}}$$

$$y = \sqrt{b+k} - \sqrt{b} = \frac{(\sqrt{b+k} - \sqrt{b})(\sqrt{b+k} + \sqrt{b})}{\sqrt{b+k} + \sqrt{b}} = \frac{b+k-b}{\sqrt{b+k} + \sqrt{b}} = \frac{k}{\sqrt{b+k} + \sqrt{b}}$$

Deoarece $a < b$, vom avea $\sqrt{a+k} + \sqrt{a} < \sqrt{b+k} + \sqrt{b}$ și atunci $\frac{k}{\sqrt{a+k} + \sqrt{b}} >$

$> \frac{k}{\sqrt{b+k} + \sqrt{b}}$, adică $x > y$, deci inegalitatea (2) este adevărată și aceasta încheie soluția.

Luînd $a = 11$, $b = 17$, $k = 2$, obținem $\sqrt{\sqrt{13} - \sqrt{11}} > \sqrt{\sqrt{19} - \sqrt{17}}$.

Soluție bună au dat: *Lăsărman Renata*, cl. a VI-a, Șc. gen. nr. 3 Dej; *Noroc Monica*, cl. a VII-a, Șc. gen. nr. 13 Botoșani; *Mitroi Mihaela*, cl. a VII-a, Șc. gen. nr. 10 Galați.

Clasa a VIII-a

Problema E : 9082* (G.M. 2/1987, pag. 90)

Se consideră polinoamele :

$$P(x) = x^3 - 6x + 11x - 6 \text{ şi } Q(x) = ax + b,\ a \neq 0.$$

Să se rezolve ecuaţia : $P(Q(x)) = 0$ şi să se găsească o relaţie între rădăcinile acestei ecuaţii, independentă de a şi b.

Alexandru Blaga, profesor, Satu Mare

Soluţie. Avem $P(x) = (x-1)(x-2)(x-3)$, deci $P(1) = P(2) = P(3) = 0$. Dacă există $x_1 \in \mathbb{R}$ astfel încît $Q(x_1) = 1$, atunci $P(Q(x_1)) = 0$, deci x_1 este soluţie pentru ecuaţia dată. Din $Q(x_1) = 1$ rezultă că $x_1 = \dfrac{1-b}{a}$. În mod analog determinăm şi rădăcinile $x_2 = \dfrac{2-b}{a}$, $x_3 = \dfrac{3-b}{a}$ ale ecuaţiei $P(Q(x)) = 0$. Deoarece gradul acestei ecuaţii este trei, rezultă că x_1, x_2, x_3 sînt toate rădăcinile ecuaţiei date. Se observă că $2x_2 = x_1 + x_3$, egalitate ce constituie o relaţie între rădăcinile ecuaţiei date, independentă de a şi b.

Soluţie bună au dat : *Ilea Irina*, cl. a VIII-a, Şc. gen. Curtea de Argeş ; *Petrescu Ruxandra*, cl. a VIII-a, Şc. gen. nr. 8 Cîmpina ; *Grainic Marius*, cl. a IX-a, Lic. „Horia, Cloşca şi Crişan" Alba Iulia.

PROBLEME REZOLVATE PENTRU LICEU

Clasa a IX-a

Problema 21009* (G.M. 2/1987, pag. 91)

Rezolvaţi în $\mathbb{R}^n$ sistemul de ecuaţii :

$$(x_1 + x_2)^2 = x_3,\ (x_2 + x_3)^2 = x_4,\ \ldots,\ (x_n + x_1)^2 = x_2.$$

(Matematika v şcole, nr. 4/1986)

Soluţie. Se observă că, dacă $(a_1, \ldots, a_n)$ este soluţie a sistemului, atunci $(a_k, \ldots, a_n, a_1, \ldots, a_{k-1})$ este, de asemenea, soluţie a sistemului, $(\forall)\ k \in \{2, \ldots, n\}$. Deci, putem presupune că $a_1 \geqslant a_j$, $(\forall)\ j \in \{2, \ldots, n\}$.
Avem $a_2 = (a_n + a_1)^2 \geqslant (a_n + a_{n-1})^2 = a_1$, deoarece $a_1 \geqslant a_{n-1}$. Rezultă că $a_2 \geqslant a_1$. În continuare, $a_3 = (a_1 + a_2)^2 \geqslant (a_1 + a_n)^2 = a_2$, deoarece $a_2 \geqslant a_1 \geqslant a_n$, deci $a_3 \geqslant a_2$. În mod asemănător rezultă că $a_n \geqslant a_{n-1} \geqslant \ldots \geqslant a_2 \geqslant a_1$. Dar $a_1 \geqslant a_n$, deci $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$.
Deci, dacă $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ este soluţie a sistemului, atunci $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$. Din prima ecuaţie a sistemului obţinem $8a_1 = a_1$, deci $a_1 \in \left\{0, \dfrac{\sqrt{2}}{4}, -\dfrac{\sqrt{2}}{4}\right\}$. În concluzie soluţiile sistemului sînt de forma $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, cu

$$a_1 = a_2 = \ldots = a_n \in \left\{0, \frac{\sqrt{2}}{4}, -\frac{\sqrt{2}}{4}\right\}.$$

Soluţie bună au dat : *Petrescu Sorin*, cl. a IX-a, Lic. mat. fiz. nr. 3 Bucureşti ; *Marin Ion*, cl. a IX-a, Lic. „Eftimie Murgu".

Scanned with OKEN Scanner

Problema 21014* (G.M. 2/1987, pag.91)

Fie $n \in \mathbf{N}^*$ *dat şi* $x, y \in \mathbf{R}$, *astfel încît*

$$x + n\sqrt[n]{\frac{x}{y}} = \frac{n+1}{y}.$$

Ce valori poate lua produsul $x \cdot y$?

Liviu Pîrşan, Bucureşti

Soluţie. Dacă $x > 0$, $y > 0$, atunci relaţia din enunţ devine

$$x + n\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}} = \frac{n+1}{y} \text{ sau } xy + n\sqrt{xy} = n + 1,$$

cu soluţia convenabilă $xy = 1$.

Dacă $x < 0$, $y < 0$ atunci notăm $x = -u$, $y = -v$ cu $u > 0$ şi $v > 0$ şi avem

$$-u + n\frac{\sqrt{u}}{\sqrt{v}} = -\frac{n+1}{v} \text{ sau } uv - n\sqrt{uv} - n - 1 = 0,$$

cu soluţia convenabilă $uv = (n+1)^2$. În acest caz rezultă că $xy = (-u)(-v) = uv = (n+1)^2$. În concluzie

$$xy = \begin{cases} 1, \text{ dacă } x > 0, \ y > 0. \\ (n+1)^2, \text{ dacă } x < 0, \ y < 0. \end{cases}$$

Soluţie bună au dat: *Mitnea Marius*, cl. a IX-a, Lic. ind. 2 Găeşti; *Vasile Diana*, cl. a IX-a, Lic. „Gh. M. Murgoci" Brăila.

Clasa a X-a

Problema 21074* (G.M. 4/1987, pag. 155)

Se dau numerele naturale $P(n) = n^4 + 6n^3 - 7n^2 - 36n + 36$ *şi* $Q(n) = n^4 + 12n^3 + 41n^2 + 30n$, *unde* n *este număr natural,* $n \geq 3$. *Dacă* $d \in \mathbf{N}$ *este c.m.m.d.c. al numerelor* $P(n)$ *şi* $Q(n)$, *să se arate că* $d \geq 51$.

Gh. Efrim, profesor, Brezoi, Vîlcea

Soluţie. Numerele date se scriu sub forma

$$P(n) = (n-2)(n-1)(n+3)(n+6), \ Q(n) = n(n+1)(n+5)(n+6).$$

Dacă notăm cu d cel mai mare divizor comun al lui $P(n)$ şi $Q(n)$, iar cu d_1 cel mai mare divizor comun pentru $(n-2)(n-1)(n+3)$ şi $n(n+1)(n+5)$, atunci, evident: $d = (n+6)d_1$.

În produsele $(n-2)(n-1)$ şi $n(n+1)$ se află cîte un factor par. Rezultă că $2 | d_1$. Făcînd pe rînd $n = 3k$, $n = 3k+1$; $n = 3k+2$, $(k \in \mathbf{N}^*)$ se observă că în fiecare din produsele $(n-2)(n-1)(n+3)$ şi $n(n+1)(n+5)$ există un factor multiplu de 3 şi atunci $3 | d_1$. Prin urmare $6 | d_1$ şi atunci $6(n+6) | d$, de unde $d \geq 6(n+6)$. Dar pentru $n \geq 3$ avem $n+6 \geq 9$ şi prin urmare $d \geq 6 \cdot 9 = 54$.

Soluţie bună au dat: *Tănase Andreea*, cl. a X-a, „Ienăchiţă Văcărescu" Tîrgovişte; *Pisai Bogdan*, cl. a X-a, Lic. mat. fiz. nr. 1 Bucureşti.

Scanned with OKEN Scanner

Clasa a XI-a

Problema 21026* (G.M. 2/1987, pag. 93)

Definim şirul $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *astfel încît* $a_0 = 0$, $a_1 = 1$ *şi* $(n+1)a_{n+1} - (n+x+1)a_n + xa_{n-1} = 0$, $(\forall)\, n \geqslant 1$, *unde* $x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ *este fixat. Să se arate că şirul* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *este convergent şi să i se calculeze limita. Să se arate că ecuaţia* $1 + xa_{n+1} = 0$ *are numai rădăcini simple.*

Mihail Bencze, profesor, Braşov

Soluţie: Relaţia de recurenţă se mai poate scrie sub forma

$$\frac{a_{k+1} - a_k}{a_k - a_{k-1}} = \frac{x}{k+1}, \quad (\forall)\ k \geqslant 1.$$

Făcînd $k = 1, 2, \ldots, p$ şi înmulţind egalităţile obţinute rezultă

$$\frac{a_{p+1} - a_p}{a_1 - a_0} = \frac{x^p}{(p+1)!}, \text{ deci } a_{p+1} - a_p = \frac{x^p}{(p+1)!}, \tag{1}$$

Făcînd $p = 1, 2, \ldots, n-1$ în (1) şi adunînd egalităţile respective, obţinem

$$a_n - a_0 = \sum_{p=1}^{n-1} \frac{x^p}{(p+1)!},$$

de unde:

$$a_n = 1 + \frac{1}{x}\sum_{k=2}^{n} \frac{x^k}{k!}, \tag{2}$$

După cum se ştie, seria $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ este convergentă, suma sa fiind e^x. Atunci, ţinînd seama de (2), şirul (a_n) este convergent şi limita sa este:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 1 + \frac{1}{x}\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} - 1 - x\right) = 1 + \frac{1}{x}(e^x - 1 - x) = \frac{e^x - 1}{x}.$$

Folosind de asemenea (2), ecuaţia $1 + xa_{n+1} = 0$ se scrie succesiv:

$$1 + x\left(1 + \frac{1}{x}\sum_{k=2}^{n+1} \frac{x^k}{k!}\right) = 0 \Leftrightarrow \sum_{k=0}^{n+1} \frac{x^k}{k!} = 0, \tag{3}$$

Funcţia polinomială $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f(x) = \sum_{k=0}^{n+1} \frac{x^k}{k!}$ are derivata $f'(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$. Dacă f ar avea o ră-

Scanned with OKEN Scanner

dăcină multiplă $\alpha \in C$, atunci $f(\alpha) = f'(\alpha) = 0$, deci $f(\alpha) - f'(\alpha) = 0$, adică $\frac{\alpha^{n+1}}{(n+1)!} = 0$, deci $\alpha = 0$; dar $f(0) \neq 0$ şi am obţine o contradicţie. În concluzie, ecuaţia (3) are numai rădăcini simple.

Soluţie bună au dat: *Trufin Valentin*, cl. a XI-a, Lic. „Eudoxiu Hurmuzache" Rădăuţi; *Rotaru Tiberiu*, cl. a XI-a, Lic. de informatică, Iaşi.

Clasa a XII-a

Problema 21033* (G.M. 2/1987, pag. 94)

Să se calculeze integrala:

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{a \sin x + b \cos x}{c \sin x + d \cos x}\, dx, \text{ unde } c \cdot d > 0.$$

M. Haivas, cercet. ştiinţific, Iaşi

Soluţie. Vom determina constantele reale A şi B astfel încît să avem egalitatea de funcţii:

$$a \sin x + b \cos x = A(c \sin x + d \cos x) + B(c \sin x + d \cos x)'.$$

Rezultă:

$$\begin{cases} Ac - Bd = a \\ Ad + Bc = b. \end{cases} \tag{1}$$

Soluţia sistemului (1) este:

$$A = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2},\ B = \frac{bc - ad}{c^2 + d^2}.$$

Rezultă că integrala este:

$$I = \frac{1}{c^2 + d^2}\left((ac + bd)\, x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + (bc - ad) \cdot \ln|c \sin x + d \cos x| \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \right) =$$

$$= \frac{1}{c^2 + d^2}\left((ac + bd) \cdot \frac{\pi}{2} + (bc - ad) \ln \frac{c}{d} \right).$$

PROBLEME PENTRU CICLUL PRIMAR

9. Irina are trei coşuleţe. În primul sînt 15 bile roşii, în al doilea sînt 15 bile albastre, iar în al treilea 15 bile negre. Irina scoate 5 bile din coşuleţul cu bile roşii şi 3 bile din coşuleţul cu bile albastre şi le distriibuie în toate coşurile. Găsiţi cel puţin 5 posibilităţi în care le poate distrbui.

Viorel Radu, elev, Hîrşova

Scanned with OKEN Scanner

10. Găsiți două numere care îndeplinesc simultan condițiile :

a) suma lor este 38 ;

b) al doilea număr micșorat cu 5 este egal cu primul mărit de două ori.

Ioana Merișescu, învățătoare, Constanța

11. Calculați suma numerelor pare de forma $\overline{abcd}$, care îndeplinesc simultan condițiile :

1) cifra miilor este 1 ;

2) cifra zecilor este cu 2 mai mare decît cifra unităților ;

3) cifra sutelor reprezintă jumătate din suma cifrelor ce reprezintă unitățile și zecile ;

4) suma cifrelor fiecărui număr este mai mare decît 5 și mai mică decît 20.

Ioana Merișescu, învățătoare, Constanța

12. Mihai, Andrei și Ioana au împreună 360 timbre. Dacă Mihai i-ar da lui Andrei 15 timbre și Ioanei 35 timbre, atunci Mihai ar avea de 3 ori mai puține decît Ioana și de 2 ori mai puține decît Andrei. Cîte timbre a avut fiecare ?

Mariana Bucșan, învățătoare, Hîrșova

13. Găsiți numerele de două cifre care sînt egale cu dublul sumei cifrelor.

* * *

14. Considerați 5 numere naturale consecutive. Arătați că suma lor se împarte exact la 5. Justificați răspunsul.

* * *

15. Un vagon încărcat cu materiale cîntărește 32,45 tone. Știind că masa unui vagon gol este de 22,45 tone, să se afle masa totală a materialelor încărcate în 15 vagoane. (Se consideră vagoanele încărcate în mod egal și cu același fel de materiale).

* * *

16. Dacă la măcinatul grîului se pierde a 100-a parte din el, cîte kilograme de făină se vor obține din 1,5 t de grîu ?

* * *

PROBLEME PENTRU GIMNAZIU

Clasa a V-a

E : 9347*. Determinați ultima cifră a numărului :

$$A = 142^1 + 142^2 + 142^3 + \ldots + 142^{26}.$$

* * *

Scanned with OKEN Scanner

E : 9348. Descompuneți numărul $A = 18^3 - 2^3 - 16^3$ în produs de factori.

* * *

E : 9349. Demonstrați că numărul $\overline{abab} - \overline{baba}$ se divide cu 909.

* * *

E : 9350. Calculați :

$$3\frac{1}{117} \cdot 4\frac{1}{118} - 1\frac{116}{117} : 5\frac{118}{119} - \frac{5}{119}.$$

* * *

E : 9351*. Verificați egalitatea :

$$55554 \cdot 55559 \cdot 55552 - 55556 \cdot 55551 \cdot 55558 =$$

$$= 66665 \cdot 66670 \cdot 66663 - 66667 \cdot 66662 \cdot 66669.$$

* * *

E : 9352*. Să se verifice egalitatea :

$$\frac{43^3 + 17^3}{43^3 + 26^3} = \frac{43 + 17}{43 + 26}.$$

Dați și alte exemple de numere naturale a, b, c, astfel încît să avem :

$$\frac{a^3 + b^3}{a^3 + c^3} = \frac{a + b}{a + c}.$$

* * *

Clasa a VI-a

E : 9353. Să se găsească toate perechile de numere întregi (x, y) astfel ca $3[y(x + 1) - x - y] - 2xy = 2$.

Mircea Grosam, profesor, Suceava

E : 9354*. Se consideră triunghiul isoscel ABC cu $AB = AC$ și $m(\widehat{BAC}) < 90°$. Perpendicularele în A pe laturile AB, AC întîlnesc înălțimile din B și C în punctele B', respectiv C'. Punctul de intersecție al celor două înălțimi fiind notat cu H, să se demonstreze că :

a) Patrulaterul $AB'HC'$ este romb ;

b) $B'C' \| BC$;

c) $AH \perp BC$.

Ion Ilea, profesor, Curtea de Argeș

Scanned with OKEN Scanner

E : 9355*. În triunghiul ABC avem $\hat{A} = 3\hat{B}$.

a) Dacă $D \in (BC)$ astfel încît $CD = AC$ și E este simetricul lui A față de B, să se arate că $BE \perp AB$;

b) Dacă bisectoarea exterioară a unghiului $\hat{C}$ intersectează pe AB în F, să se arate că $BC = CF$.

Ion Morteanu, profesor, Curtea de Argeș

E : 9356. Cantitatea totală de porumb, grîu și cartofi contractată cu statul, de la C.A.P. Titești, jud. Argeș, este de 1656 tone.

Să se calculeze cîte tone de porumb, grîu și cartofi s-au contractat cu statul, știind că raportul dintre cantitatea de porumb și grîu este $\frac{13}{15}$, iar raportul dintre cantitatea de grîu și cartofi este $\frac{15}{64}$.

Virginia Tică-Diaconu și *Vasile Tică-Diaconu*, profesori, Cîmpulung—Muscel

E : 9357*. Fie $x, y, z, t \in \mathbf{Z}$ și p prim, $p > 2$, astfel încît verifică relația

$$(xy - z)(xy + z) = p + 2zt + t^2.$$

Să se arate că numerele $|z + t|$ și $|xy|$ sînt naturale consecutive.

Gheorghe D. Alexe, profesor, Însurăței, Brăila

E : 9358. a) Fie numărul $A = 2^n + 3^n + 216\,(2^{n-6} + 3^{n-6})$, unde $n \in \mathbf{N}$, $n \geqslant 6$.

Care este valoarea logică a propozițiilor:

(p_1) Numărul A este divizibil cu 7;

(p_2) Ultima cifră a numărului A este 7.

b) Arătați că fracția

$$\frac{2^n + 3^n + 216\,(2^{n-6} + 3^{n-6})}{4^n + 5^n + 8000(4^{n-6} + 5^{n-6})}$$

se simplifică cu 7, oricare ar fi $n \in \mathbf{N}$, $n \geqslant 6$.

Vasile Negoiță, profesor, Dofteana, Bacău

Clasa a VII-a

E : 9359. Să se arate că dacă $-2 \leqslant x \leqslant 0$, $y = -2x - 2$, $z = -x - 2$, atunci $\sqrt{2x^2 + y^2 + 2xy + 4x + 4} + \sqrt{y^2 + 2z^2 - 2yz + 4z + 4} = 2\sqrt{2}$.

C. Ionescu-Țiu

E : 9360*. Să se determine ultimele trei cifre în baza 10 ale lui 5^n, unde $n \in \mathbf{N}$, $n \geqslant 3$.

Petre Simion, profesor, București

Scanned with OKEN Scanner

E : 9361. Fie ABC un triunghi echilateral. Din centrul O al cercului circumscris ducem $OD \perp BC$, $D \in AC$.

Să se determine lungimile segmentelor AD și DC, cunoscînd că latura triunghiului este de $12\sqrt{3}$.

Mihaela Ioniță, elevă, Pănătău, Buzău

E : 9362*. Să se demonstreze că ecuația $\left[\frac{3x+1}{2}\right]+\left[\frac{3x+2}{2}\right]=6$ nu are soluții întregi.

Alexandru Vlase, elev, Sucecava

E : 9363. Fie polinomul $P(a, b) = 41ab + 29a^3 + 10a^2 + 87a^2b + 21b^2 + 12a^4$. Se cere :

a) Să se descompună în factori polinomul $P(a, b)$;

b) Să se afle valoarea numerică a polinomului pentru $a = 2$ și $b = 3$.

Daniel Diaconu, elev, Pătîrlagele, Buzău

E : 9364*. a) Reprezentați într-un sistem de axe ortogonale xOy graficele funcțiilor $f_1 : [0, 1] \to \mathbf{R}, f_1(x) = -x + 1$ și $f_2 : [0,5] \to \mathbf{R}, f_2(x) = -x + 5$.

b) Fie A și B punctele de intersecție ale graficului funcției f_1 cu axele de coordonate ($A \in Oy$, $B \in Ox$), iar C și D punctele de intersecție ale graficului funcției f_2 cu axele de coordonate ($C \in Ox$, $D \in Oy$). Considerînd că A, B, C, D sînt patru localități ce trebuie alimentate cu curent electric de la aceeași termocentrală, este posibil ca ea să fie situată la egală distanță de cele patru localități? Dacă este posibil, stabiliți grafic poziția și aflați coordonatele sale.

c) Dacă M este mijlocul lui AB și N mijlocul lui BC, iar O' punctul care reprezintă termocentrala, determinați $\widehat{MO'N}$.

Mihai Guraliuc, profesor, Pănătău, Buzău
Donia Guraliuc, profesoară, Pătîrlagele, Buzău

Clasa a VIII-a

E : 9365*. Să se rezolve în mulțimea numerelor reale sistemul :

$$\begin{cases} 2x^2 + y^2 + z^2 = 15 \\ xy + xz = 5 \\ 3x - y - 2z = -5. \end{cases}$$

Florea Mitricoiu, profesor, Poiana Mare, Dolj

E : 9366. Fie pătratul $ABCD$ de latură a. Se consideră pe CD un punct E și notăm $AE \cap BC = \{G\}$, iar cu H mijlocul segmentului AG. Să se precizeze poziția lui E pe CD știind că $2DH = AC$.

C. T. Nedelcu, inginer, Moreni

Scanned with OKEN Scanner

E : 9367. Să se determine cel mai mic număr $x \in \mathbf{N}$, pentru care numărul $4x^3 + 5x^2 - 23x - 6$ este divizibil cu 1989.

Valer Pop, profesor, Şanţ, Bistriţa-Năsăud

E : 9368*. Fie paralelipipedul dreptunghic $ABCDA'B'C'D'$. Să se determine raportul volumelor celor două corpuri obţinute prin secţionarea paralelipipedului cu planul care trece prin vîrful A, mijlocul M al muchiei BC şi mijlocul N al muchiei DD'.

Ion Lupşor, profesor, Rapolt, Hunedoara

E : 9369. Să se demonstreze că, dacă M, N şi P sînt centrele de greutate a trei feţe ale tetraedrului $ABCD$, iar Q un punct oarecare din planul celei de-a patra feţe, atunci raportul dintre volumele tetraedrelor $ABCD$ şi $MNPQ$ este 27.

Marius Crainic, elev, Alba Iulia

E : 9370*. Să se determine numerele întregi p şi q astfel încît ecuaţiile

$$(p+1)x^2 + (2p+1)x - 2 = 0,$$

$$2x^2 + (q+4)x + 2q = 0$$

să admită aceleaşi soluţii.

Eugen Onofraş, profesor, Ploieşti

PROBLEME PRELIMINARE DE TIP O.I.M. PENTRU ELEVII DIN GIMNAZIU

O.G. : 65. Se dă $x + \frac{1}{x} = a$. Să se calculeze $x^{17} + \frac{1}{x^{17}}$ în funcţie de a.

* * *

O.G. : 66. Determinaţi cifrele a, b şi c astfel încît

$$\overline{abc} \cdot \overline{abc} = \overline{nbac},$$

unde n este cifră sau număr natural.

Vasile Berinde, matematician, Baia Mare

PROBLEME PENTRU LICEU

Clasa a IX-a

21345. Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale sistemul de ecuaţii:

$$(x_3 + x_4 + x_5)^5 = x_1;\ (x_4 + x_5 + x_1)^5 = x_2;\ (x_5 + x_1 + x_2)^5 = x_3;$$

$$(x_1 + x_2 + x_3)^5 = x_4;\ (x_2 + x_3 + x_4)^5 = x_5.$$

Lucian Tuţescu, profesor, Craiova

Scanned with OKEN Scanner

21346*. Să se rezolve în numere reale ecuația

$$x^2\left(\frac{1}{1+x^4}+\frac{1}{2+x^6}+\frac{1}{3+x^8}+\ldots+\frac{1}{n+x^{2(n+1)}}\right)=$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n+1},$$

unde n este un număr natural nenul.

Dumitru Acu, lector univ., Sibiu

21347. Să se arate că dacă numerele $x, y \in \mathbf{N}^*$ satisfac ecuația $3x^2+3x+1=y^2$, atunci există $z \in \mathbf{N}^*$, astfel încît $y=z^2+(z+1)^2$.

Gh. Szöllöszy, profesor, Sighetu Marmației

21348*. Să se rezolve ecuația:

$$\left[\frac{x^4+1}{x+1}\right]=\frac{x^3+2x+1}{3x+1},$$

unde $[a]$ reprezintă partea întreagă a numărului real a, iar $x \in \mathbf{Z}$.

Toni Mihalcea, elev, Focșani

21349*. Dacă O este centrul cercului înscris în patrulaterul $ABCD$ atunci punctele A, O, C sau B, O, D sînt coliniare dacă și numai dacă $OA \cdot OB + OC \cdot OD = OA \cdot OD + OB \cdot OC$.

Neculai Roman, profesor, Șcheia, Iași

21350. Fie $a, b, c \in \mathbf{R}$, $a^2-4b<0$. Care este valoarea de adevăr a propozițiilor:

(p) Există $\max\limits_{x\in\mathbf{R}} \dfrac{x^2+ax+b}{x^2+2cx+c^2}$; (q) Există $\min\limits_{x\in\mathbf{R}} \dfrac{x^2+ax+b}{x^2+2cx+c^2}$.

Nicolae Bișboacă, profesor, Alba Iulia

21351. Fie funcțiile cu coeficienți reali

$$f_1(x)=a_1x^2+b_1x+c_1,\ f_2(x)=a_2x^2+b_2x+c_2,\ \text{cu } x\in\mathbf{R},\ a_1\neq a_2$$

$$\text{și } \Delta=(b_1-b_2)^2-4(a_1-a_2)(c_1-c_2).$$

Dacă $g:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ verifică relația $f_1\circ g\circ f_2=f_2\circ g\circ f_1$, atunci:
a) pentru $\Delta=0$, sistemul $(g\circ f_1)(x)=(g\circ f_2)(x)=x$ are cel puțin o soluție;
b) pentru $\Delta>0$, sistemul $(g\circ f_1\circ g\circ f_2)(x)=(g\circ f_2\circ g\circ f_1)(x)=x$ are cel puțin o soluție.

Cristian Turcu, profesor, Izvoarele, Prahova

Scanned with OKEN Scanner

21352*. Să se determine numărul natural n știind că poligonul regulat $A_1A_2\ldots A_n$ are următoarea proprietate: există un punct M pe arcul mic $\overset{\frown}{A_1A_2}$ al cercului circumscris, astfel încît

$$\frac{1}{A_4M}=\frac{1}{A_1M+A_2M}-\frac{1}{A_3M+A_2M}.$$

(În legătură cu problema 5756).

C.T. Nedelcu, inginer, Moreni

21353. Dacă a, b, c sînt lungimile laturilor unui triunghi înscris în cercul de rază egală cu unitatea, atunci:

$$a+b+c\geqslant abc.$$

Titu Andreescu, profesor, Timișoara

21354*. Se dau n numere reale pozitive $a_1, a_2, \ldots, a_n$, astfel încît $a_1+a_2+\ldots+a_n=1$. Să se arate că:

$$\sqrt{4a_1+1}+\sqrt{4a_2+1}+\ldots+\sqrt{4a_n+1}\leqslant\sqrt{n(n+4)}.$$

Ioan Crișan, profesor, Arad

21355. Să se arate că dacă suma distanțelor unui punct variabil situat în interiorul unui triunghi la laturile lui este constantă, atunci triunghiul este echilateral.

Mircea Lascu, profesor, Zalău

21356. Să se determine numărul natural n, $n\geqslant 2$, astfel încît egalitatea

$$|z_1-z_2|^2+|z_2-z_3|^2+\ldots+|z_n-z_{n-1}|^2+|z_n-z_1|^2=$$
$$=n(|z_1|^2+|z_2|^2+\ldots+|z_n|^2)$$

să aibă loc oricare ar fi numerele complexe $z_1, z_2, \ldots, z_n$ cu $z_1+z_2+\ldots+z_n=0$.

Să se dea o interpretare geometrică a rezultatului găsit.

D. Acu, lector univ., Sibiu

21357*. Să se arate că dacă între lungimile laturilor a, b, c ale unui triunghi ABC are loc relația

$$(a-b)^2+(c-b)^2=b^2,$$

atunci $B\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)\setminus\left\{\frac{\pi}{3}\right\}$.

Gheorghe Marchitan, profesor, Suceava

Scanned with OKEN Scanner

21358. Să se rezolve ecuația:

$$11^x + 14^x = 25^x - 2(\sqrt{154})^x.$$

Elena Stoica, profesoară, București

Clasa a XI-a

21359. Să se rezolve sistemul de ecuații:

$$x^2 + y^2 + z^2 + 4x - 6y - 2z + 5 = 0;$$
$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y + 4z - 27 = 0;$$
$$x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 4y + 2z - 25 = 0;$$
$$x^2 + y^2 + z^2 - 6x - 8y - 4z + 3 = 0;$$
$$x^2 + y^2 + z^2 + 6x - 4y - 8z + 23 = 0;$$
$$x^2 + y^2 + z^2 + 4x + 4y - 10z + 17 = 0.$$

C. Ionescu-Țiu

21360*. Fie $a \in \mathbf{R}^*$ și funcțiile $f, g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$; $h : \mathbf{R} \to \mathbf{R}^* - \{1\}$ așa încît $g(x + a) = g(x)$ și $h(x + a) = h(x)$, $(\forall)x \in \mathbf{R}$. Să se demonstreze că:

$f(x + a) = h(x) \cdot f(x) + g(x)$, $(\forall)\, x \in \mathbf{R}$ dacă și numai dacă

$$f(x) = (h(x)^{\left[\frac{x}{a}\right]} \cdot f\left(a\left\{\frac{x}{a}\right\}\right) + \frac{(h(x))^{\left[\frac{x}{a}\right]} - 1}{h(x) - 1} \cdot g(x), (\forall)x \in \mathbf{R}.$$

(În legătură cu problema **21039** din G.M. nr. 3/1987).

D. M. Bătinețu-Giurgiu, profesor, București

21361. Dacă $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ sînt matrice așa încît $A^3 = B^3 = 0$ și $f : \mathcal{M}_n(\mathbf{C}) \times \mathcal{M}_n(\mathbf{C}) \to \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ este o funcție așa încît

$$f(X, Y) = A - B + AX - YB + AX^2 - Y^2B, (\forall)\, X, Y \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C}),$$

atunci $f(B, A) = 0 \Leftrightarrow f(-A, -B) = 0$.

Dumitru Crăciun, profesor, Fălticeni

21362*. Dacă $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbf{N}}$ sînt șiruri de numere reale așa încît $b_n \neq b_{n+1}, (\forall)n \in \mathbf{N}$, $\sup\limits_{n\in\mathbf{N}} \left|\dfrac{b_{n+1}}{b_{n+1} - b_n}\right| \in \mathbf{R}_+^*$ și există $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = u \in \mathbf{R}$, atunci există $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} = u$.

Silviu Stössel, profesor, București

21363. Fie $X \in \mathcal{M}_n(A_n)$ o matrice simetrică, unde $A_n = \{1, 2, \ldots, n\}$ așa încît pe fiecare linie a matricei X, elementele sînt distincte. Să se,

Scanned with OKEN Scanner

determine $n \in \mathbf{N}^*$ așa încît suma elementelor de pe diagonala principală a matricei X să fie un număr impar.

Michaella Iacobina, profesoară, Suceava

21364. Fiind dați $a \in \mathbf{R}_+^*$, $b \in \mathbf{R}$ și $k \in \mathbf{N}_+^*$, să se determine termenul general al șirului definit de recurența $x_{n+k} = a \cdot x_n + b$, $(\forall)\, n \in \mathbf{N}$ cu condițiile inițiale $x_i = c_i \in \mathbf{R}$, $i = \overline{0, n-1}$.

Fl. Vulpescu-Jalea, profesor, București

21365*. Dacă $A \in \mathcal{M}_3(\mathbf{C})$ este o matrice așa încît $\mathrm{Tr}(A) = \mathrm{Tr}(A^3) = 0$, atunci $\det A = 0$. Reciproca este adevărată?

Andrei Ștefan, elev, Buhuși

Clasa a XII-a

21366. Se consideră familia de drepte:

$$d_a : (2-a)x + (3+5a)y + 3a - 1 = 0,\ a \in \mathbf{R}.$$

a) Să se calculeze $\bigcap_{a \in \mathbf{R}} d_a$;

b) Fie $M = \{d_a \mid a \in \mathbf{R}\}$. Să se definească pe M o lege de compoziție internă „$*$" astfel încît $(M, *) \simeq (\mathbf{R}, +)$, ca grupuri abeliene.

Daniel Sitaru, profesor, Drobeta Tr. Severin

21367*. Fie $\mathcal{M}_n$ mulțimea matricilor pătratice de ordin $2n+1$ ($n \in \mathbf{N}^*$), notate $M_n(\alpha, \beta) = (m_{ij}(\alpha, \beta))$, unde $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$ și unde

$$m_{ij}(\alpha, \beta) = \begin{cases} \alpha, \text{ dacă } i = j \neq n+1 \\ \beta, \text{ dacă } i + j = 2(n+1),\ i \neq j, \\ 1, \text{ dacă } i = j = n+1 \\ 0, \text{ în caz contrar} \end{cases}$$

pentru orice $i, j = \overline{1; 2n+1}$. Să se arate că:

1°. $\det M_n(\alpha, \beta) = (\alpha^2 - \beta^2)^n$, $(\forall)\, n \in \mathbf{N}^*$;

2°. $(\mathcal{M}_n, \cdot)$ este monoid comutativ;

3°. $(\mathcal{M}_n, \cdot) \simeq (\mathcal{A}, \cdot)$, unde $\mathcal{A} = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} \middle|\ \alpha, \beta \in \mathbf{R} \right\}$.

Virgil Nicolă, profesor, București

21368. Să se găsească polinoamele P și Q cu coeficienți reali care verifică simultan condițiile:

1°. $P(Q(x) + 1) = Q(P(x)) + 1$, $(\forall)\, x \in \mathbf{R}$;

2°. $Q(P(x) + 1) = P(Q(x)) + 1$, $(\forall)\, x \in \mathbf{R}$;

3°. $P(0) = Q(0) = 0$.

D. Săvulescu, profesor, Bacău și *L. Tuțescu*, profesor, Craiova

Scanned with OKEN Scanner

21369. Aflați primitivele funcției $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$,

$$f(x) = \frac{x^{5n-1} + x^{n-1}}{x^{6n} + 1}, \, n \in \mathbf{N}^*.$$

Dumitru Acu, lector univ., Sibiu

21370. Să se determine parametrul real m astfel încît ecuația

$$x^4 + mx^3 - 6x^2 - 4x + 1 = 0$$

să admită rădăcina $x = \operatorname{tg}(\pi/16)$. Pentru m determinat, să se rezolve ecuația obținută.

Doru Oprișa, Hunedoara

21371*. Să se calculeze $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^3 x}{e^x + 1} \, dx$.

Liliana Niculescu, profesoară, Craiova

21372*. Să se calculeze $\int \frac{\cos 2x}{\sin x(2x \sin x - \cos x)} \, dx$.

Daniel Lesnic, student, București

PROBLEME PREGĂTITOARE PENTRU O.I.M. ȘI O.B.M.

O : 539. Dacă $a \in \mathbf{N}^* \setminus \{1\}$, $b, m, n \in \mathbf{N}^*$ și $(a, b) = 1$, să se arate că $a^n + b^n$ divide $a^m - b^m$ dacă și numai dacă m este multiplu par de n.

I. Cucurezeanu, Constanța

O : 540. Un paralelipiped $[ABCDA'B'C'D']$ are vîrfurile A și O fixe și diagonala $[AC']$ de lungime constantă. Să se determine locul geometric al vîrfului A' al paralelipipedului.

Augustin Stan, profesor, Oradea

O : 541. Fie $p \in \mathbf{N}^*$ un număr prim impar și $k \in \mathbf{N}^* \setminus \{1\}$. Notăm, $A_n = \{1, 2, \ldots, n\}$ și $M = \{x \in A_n \mid x^2 - 1 \equiv 0 \pmod{p^k}\}$. Să se demonstreze că

$$1 + \sum_{i \geq k} \left[\frac{n+1}{p^i} \right] + \sum_{i \geq k} \left[\frac{n-1}{p^i} \right] = \operatorname{Card} M.$$

V. Zidaru, profesor, Sfîntu Gheorghe

Scanned with OKEN Scanner

PROBLEME PENTRU CONCURSUL ANUAL AL REZOLVITORILOR

Clasele a IX-a și a X-a

C : 761. În planul $\mathscr{P}$ se consideră triunghiul ABC și funcția $f : \mathscr{P} \to \mathscr{P}$, $f(X) = (p-a)AX^2 + (p-b)BX^2 + (p-c)CX^2$ unde notațiile sînt cele obișnuite. Să se determine $\min_{X \in \mathscr{P}} f(X)$ și poziția punctului $X \in \mathscr{P}$ pentru care se realizează acest minim.

Mircea Lascu, profesor, Zalău și *Ciprian Neacșu*, student, București

C : 762. Să se determine polinoamele $f \in \mathbf{R}[X]$ cu rădăcinile $x_k \in \mathbf{R}$, $k = \overline{1, n}$, așa încît $f = \sum_{k=1}^{n} (s - x_k)(X - x_k)^n$, unde $n \in \mathbf{N}^* - \{1\}$ și s este suma rădăcinilor polinomului.

Marius Burtea, profesor, Alexandria

C : 763. Să se determine șirul $(a_n)_{n \geq 1}$ așa încît $a_1 = 1$ și $a_{n+1} = a_n + (\sqrt{a_n})$, $(\forall) n \in \mathbf{N}^*$, unde prin (a) am notat întregul cel mai apropiat de $a \in \mathbf{R}$.

I. Cucurezeanu, profesor, Constanța

C : 764. Să se arate că oricare ar fi poligonul convex de laturi $a_1, a_2, \ldots, a_n$ și semiperimetru p, există inegalitatea :

$$\sum_{k=1}^{n} a_k (p - a_k)^{n-1} \geq \frac{n(n-2)^{n-1}}{2^{n-1}} \cdot \prod_{k=1}^{n} a_k.$$

Marian Dincă, profesor, Perșani, Brașov

Clasele a XI-a și a XII-a

C : 765. Dacă $f \in \mathbf{R}[X]$, să se demonstreze că :

a) Dacă $f(x) \geq 0$, $(\forall) x \in \mathbf{R}$, atunci $\det f(A) \geq 0$, $(\forall) A \in \mathscr{M}_m(\mathbf{R})$, $m \in \mathbf{N}^*$;

b) Dacă $(\exists) m \in 2\mathbf{N}^* + 1$ cu $\det f(A) \geq 0$, $(\forall) A \in \mathscr{M}_m(\mathbf{R})$, atunci $f(x) \geq 0$, $(\forall) x \in \mathbf{R}$.

D. M. Bătinețu-Giurgiu și *Fl. Vulpescu-Jalea*

C : 766. a) Fie $t \in \mathbf{R}_+^*$. Să se determine toate funcțiile continue $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ așa încît funcțiile $\sin \circ f$ și $\cos \circ f$ sînt periodice cu perioada t.
b) Să se arate că $(\forall)\ t \in \mathbf{R}_+^*$ există funcții $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ continue, așa încît funcția $\sin \circ f$ nu are perioada t, dar funcția $\cos \circ f$ are perioada t.

D. M. Bătinețu-Giurgiu și *Fl. Vulpescu-Jalea*

C : 767. Pentru $a \in \mathbf{R}$, $b \in \mathbf{R}^*$ considerăm funcția $f_{a+bi} : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$, $f_{a+bi}(x + iy) = x + (a + bi)y$, $(\forall)\ x, y \in \mathbf{C}$ și notăm $G = \{f_{a+bi} | a \in \mathbf{R}, b \in \mathbf{R}^*\}$.
a) Să se demonstreze că mulțimea G este grup necomutativ în raport cu compunerea funcțiilor;
b) Considerăm și grupul $H = \{f_{a,b} | a \in \mathbf{R}^*, b \in \mathbf{R}\}$ unde $f_{a,b} : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f_{a,b}(x) = ax + b$, $(\forall)\ x \in \mathbf{R}$, operația fiind de asemenea compunerea funcțiilor.

Scanned with OKEN Scanner

Să se demonstreze că aplicația $u : H \to G$, $u(f_{a,b}) = f_{-\frac{b}{a}+\frac{1}{a}}$, este un izomorfism de grupuri.

Ioana Munteanu, profesoară, Focșani

C : 768. Dacă $f : [a, b] \to [a, b]$ este o funcție cu proprietatea lui *Darboux* așa încît $f \circ f$ este cu variație mărginită pe $[a, b]$, atunci pentru orice $n \in \mathbf{N}^*$ funcția $\underbrace{f \circ f \circ \ldots \circ f}_{2^n \text{ ori}}$ admite primitive pe $[a, b]$. (O funcție $g : [a, b] \to \mathbf{R}$ este cu variație mărginită pe $[a, b]$ dacă $(\exists)\ M \in \mathbf{R}_+^*$ așa încît oricare ar fi $\Delta = (x_0, x_1, \ldots, x_n)$ diviziune a intervalului $[a, b]$, are loc inegalitatea $\sum_{k=0}^{n-1} |f(x_{k+1}) - f(x_k)| < M$).

Daniel Lesnic, student, București

PROBLEME DE INFORMATICĂ

I : 327. Dacă σ este o permutare de n elemente, unde $n \leqslant 100$, să se elaboreze un program parametrizat pentru determinarea valorii minime $k \in \mathbf{N}^*$ pentru care $\sigma^k = e$.

Silviu Crăciunaș, matematician, C.C.U.B.

I : 328. Fie $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ o funcție continuă. Dacă pe ecranul terminalului pot fi activate grafic 255×175 puncte, să se determine un algoritm de transformare a coordonatelor utilizator (x, y) cu $y = f(x)$, astfel încît graficul funcției să fie reprezentat în întregime într-o fereastră a ecranului de dimensiunea $p \times p$ cu $p \leqslant 175$.

Silviu Crăciunaș, matematician, C.C.U.B.

RUBRICA REZOLVITORILOR DE PROBLEME

SATU-MARE (MEHEDINȚI) Lic. ind. 6 cl. V Harsangi Alexandru (80), Brînduşeanu Ioana (50), Mateiaș Ioan (50), Turlea Florina (50), Zolceac Andreea (80); Ș. g. 2 cl. IV Piscoain Laurian (200); Ș. g. 8 cl. V Horvat Camelia (60); Ș. g. 14 cl. V Burian Angela (90), Buzatu Adrian (90), Pirici Diana (90), Silaghi Mirela (90), Șandor Margareta (108), Ster Nadia (120), cl. VI Oros Marcel (160), Olabi Ștefania (160); Ș. g. 20 cl. III David Ionuț (100); **SĂCEL** (MARAMUREȘ) Ș. g. cl. VI Danci Camelia (80), Danci Malina (85), Mihai Claudia Autica (85), Risăuv Elena (85); **SĂPATA DE SUS** (ARGEȘ) Ș. g. cl. V Turcu Mihaela (87); **SCORȚENI** (PRAHOVA) Ș. g. cl. IV Bogoțoiu Adrian (100), Oprea Florentin (100), Fortună Ciprian (150), Surcelea Codruț (100), Oprea Florin (100); **SFÎNTU-GHEORGHE** (COVASNA) Lic. mat. fiz. cl. VI Danciu Claudia (80), Vișan Ana-Maria (116), cl. XI Sima Verginica (135); **SIBIU** (SIBIU) Ș. g. 5 cl. V Sîrbu Răzvan (160); Ș. g. 21 cl. V Sorea Dan (100); Lic. „Gh. Lazăr" cl. IX Schitan Diana (122), cl. X Mihai Mihaela Anca (132), Costea Ciprian Mihai (120), Crișan Oana Cătălina (132), Houțan Elena (100), cl. XI Cîmpu Cristina (100), Caldea Adina (100), Matesan Ionela (92), Pașteanu Adriana (100), Răchită Delia (150), Tatu Mioara-Ioana (150), Simulescu Maria (132), Simtea Mihai (160), cl. XII Baniaș Andreia (96), Bucurenciu Vasile (120), Bucuțoi Alexandru (168), Jereghi Mirela, Lungoci Cosmin (196), Șerban Marcel (100); Ș. g. 12 Marcu Cristina (110); Lic ped. cl. V Pop Tiberiu (80); **SIMERIA** (HUNEDOARA) Ș. g. 2 cl. VI Dinulescu Ovidiu (98); **SINAIA** (PRAHOVA) Ș. g. 2 cl. V Andrei Mirela Gabriela (164), Birdea Claudia (100), Chițu Sorina (158), Ispas Valentin (100), Mărășescu Elena (100), Neacșu Cristina (100), Neagu Ionel (100), Goran Florentina (102), Nareș Cătălin (100), Oancea Loredana (100), Usturoi Alina (100), Simion Florin (103); Suditu Florin (100); **SLATINA** (OLT) Ș. g. 2 cl. V Suvezeanu Codruța (70); Ș. g. 3 cl. V Obageanu Cristina (120,

Rebenciuc Marius (80), Ursu Elena (90), Spînu Ioana (86); Ş. g. 4 cl. V Pîrvu Rodica (70), Militaru Milica Mia (78); Ş. g. 8 cl. VI Criveanu Silvia (90), Cucu Marcela (110), Marinescu Ana-Maria (100), Raţă Marius (98), Rădulnea Adrian (90), Priţa Georgeta (90), Savu Robert (90), Şerban Doiniţa (90), Vîlcov Roxana (178), Voiculeţ Costinel Alin (100), cl. V Maican Adriana (178), Mocofan Marian (101), Nicolae Roxana (108), Georgescu Lioara (104), Voichiţa Cătălin (100); Lic. „I. Minulescu" cl. IX Săvulescu Sorin (93); **SUCEAVA** (SUCEAVA) Ş. g. 4 cl. VI Ciocan Ioan (120); **SURINA** (VRANCEA) Ş. g. 1 cl. VI Hărăboi Laurenţiu (80); **ŞIMLEUL SILVANIEI** (SĂLAJ) Ş. g. cl. V Peliceanu Cristian Mihai (90); **TECUCI** (GALAŢI) Ş. g. 2 cl. V Gavrilliţă Veronica (55), cl. VI Stănculescu Lenica, (69), Lupu Sonelia (100); Ş. g. 5 cl. IV Bădălan Daniela (79), Stratulat Dorinela (80), cl. V Goiu Ciprian Aurelian (70), Hagiu Daniela (62), cl. VI Gherasim Monica (60), Neglci Mihai (60); fără menţiunea clasei: Cîdu Elena (80), Stoica Marinela (90); Ş. g. 6 cl. VII Mihai Ovidiu Eduard (79), Topală Florinel (100); Ş. g. 8 cl. V Borş Viorel Cristinel (120), Ilie Liviu (153); Ş. g. 10 cl. V Ciochină Mihai (80), cl. VI Călnlan Marius (75), cl. VII Deliu Petre (80), Dumitrache Veronica (67); fără menţiunea şcolii: Bălan Liviu (50), Capmare M. (57), Dănilă Daniel (68), Ghintuială Crina (80), Vîlcu Mirea Adrian (15); **TEIŞ** (DÎMBOVIŢA) Ş. g. cl. VI Pădurean Stoicescu Viorica (110), cl. VII Stoicescu Rodica (249); **TEIUŞ** (ALBA) Ş. g. cl. V Ciocănel Cristina Iuliana (60), cl. VIII Ciortea Elisabeta (78); **TIGVENI** (ARGEŞ) Ş. g. cl. V Ciocănel Cristina (80), Deaconescu Carmen (80), Honeag Elena (80), cl. VII Pleşiţă Ion (75); **TIMIŞOARA** (TIMIŞ) Ş. g. 6 cl. VI Broda Gabriela (78), Crăsteţi Minodora (98), Sipoş Laura Alina (77); Ş. g. 7 cl. VI Demjan Tunde Eniko (99), Oprea Petrică (60), Vraniantu Anca (80); Ş. g. 26 cl. VI Ugarcovici Ilie Drăgan (170); Lic. „N. Lenau" cl. V Decean Flaviu (90); Lic. mat. fiz. 1 Turcu Flavius (249); **TISLISCEA** (BISTRIŢA-NĂSĂUD) Ş. g. cl. V Vălean Mihai (55); **TITU** (DÎMBOVIŢA) Ş. g. Titu-Gară cl. VI Cîrstea Mirela Claudia (100), Manole Cristina (119), Rozner Ramona (120), Vlad Roxana (127); **TÎRGOVIŞTE** (DÎMBOVIŢA) Ş. g. 2 cl. V Catrina George (50), Constantinescu Simona (160), Enache Cătălin (80), Răducanu Elena Magdalena (70), Tănase Cătălin (200), cl. VI Chivoiu Pompilia (83); Ş. g. 5 cl. V Anton Răzvan (60), David Bogdan (50), Dobrinoiu Oliver (98), Flaider Bogdan (156), Iacob Laura (75), Nedelcu Daiana (199), Vasile Cristian (80), cl. VI Botea Roxana (170); fără menţiunea clasei: Botea Alin (130), Ş. g. 10 cl. V Niţoi Anca (30); Lic. ind. 6 cl. VI Popoacă Anamaria (80); **TÎRGU-BUJOR** (GALAŢI) Ş. g. 2 cl. VIII Jugănaru Eliza (62), Ochianu Mihaela (75), Radu Mihaela (120), Rotaru Violeta (100); **TÎRGU-JIU** (GORJ) Ş. g. 4 fără menţiunea clasei: Toma Ovidiu (80); Ş. g. 12 cl. III Petra Carolina (79); Lic. „T. Vladimirescu" cl. IX Dijmonescu Diana (100); **TÎRGU-MUREŞ** (MUREŞ) Ş. g. 9 cl. VII Stan Ileana (240); Ş. g. 14 cl. V Ignat Ciprian Loghin (35), cl. VI Popovici Vlad (131). Sămărghiţan Vasile (100); Ş. g. 15 cl. V Hîrgan Vasile (85), Pătru Vlad (90); **TÎRGU NEAMŢ** (NEAMŢ) Ş. g. 3 cl. V Oltea Camelia (126), cl. VI Maftei Cristian (129), Maftei Lucian (140), Muraru Ciprian (138), cl. VII Cojocaru Cristinel (160), Popa Iulia (157); Ş. g. 5 cl. V Cozma Mirabela (80). Dabija Ciprian (79), Munteanu Luminiţa (72), Obreja Liviu (72), Paraschiv Carmen (79), cl. VI Baciu Nicoleta (79), cl. VII Dănilă Dan (98), Ghenţu Marie-Jeanne (110), Ungureanu Sinziana (79), cl. VIII Munteanu Dan (210), Rotaru Constantin (60); **TIRLISUA** (BISTRIŢA-NĂSĂUD) Ş. g. cl. V Cătuna Isidar-Ştefan (80), Eocean Marius (65), Vălean Cozma Mihai (144); **TULCEA** (TULCEA) Ş. g. 10 cl. V Arvatu Iuliana (50), cl. VI Boldea Arina (110); Lic. „S. Haret" cl. VII Drăgan Delia-Monica (226), Largu Mihaela (80); **TURDA** (CLUJ) Ş. g. 4 cl. IV Bălgărădean Mihaela (80); Ş. g. 6 cl. VI Aur Adriana (72), Căpuşan Maria (80), Gaspar Hilda (80), Moldovan Alin (80); Ş. g. 7 cl. VI Mureşan Ioana Daniela (100); Ş. g. 8 cl. VII Zain Laura (98); Ş. g. 10 cl. V Trandafir Camelia (50); **TURNU MĂGURELE** (CARAŞ-SEVERIN) Ş. g. 5 cl. VI Ichim Ana-Maria (79), cl. VII Potecaru Adrian (175);

VALEA LUPULUI (IAŞI) Ş. g. cl. VII Boandă Elena (100), Iacob Florin (100), Răileanu Carmen (80); **VASLUI** (VASLUI) Ş. g. cl. VI Burghelea Cristina (100), Ciobanu Cornelia (100), Mihailiuc Simona (100), Miron Ana-Maria (40); Ş. g. 6 cl. VI Asoltani Mona-Alina (80), Chircă Paul Cristinel (75), Maftei Dan-Constantin (90); fără menţiune de clasă: Dobrovolski Dan (109); **VĂLENI** (BACĂU) Ş. g. cl. VI Beligan Dragoş (190); **VĂLENII DE MUNTE** (PRAHOVA) Ş. g. 1 cl. VIII Burlacu Ion Daniel (80), Ş. g. 7 cl. V Chirobocea Alain (40); **VICTORIA** (BRAŞOV) Lic. ind. chimie cl. XII Birsan Dorian (168), Florea Lucian (108), Grama Sorin (120);

AIUD (ALBA) Lic. ind. „A. Iancu" cl. IX Kohr Gabriela (120), Kohr Mirela (120); **ARAD** (ARAD) Lic. ind. 12 „M. Constantinescu" cl. V Blaga Radu Lucian (80); cl. VI Purice Monica Maria (80); Lic. „I. Slavici" cl. V Verzea Onorina (110), cl. VII Verzea Valentin (120); **BACĂU** (BACĂU) Ş. g. 5 cl. V Drăguşanu Gianina (78); Ş. g. 18 cl. VII Ionaşcu Codrina (120); Ş. g. 19 cl. VII Văsăi Constantin (174); Lic. ped. „Ştefan cel Mare" cl. V Dobrotă Veronica (80); fără menţiune de şcoală: Iordache Sorana (125); **BAIA MARE** (BAIA MARE) Lic. ind. 8 cl. V Radu Ana-Maria (70), cl. VI Crăciun Mariana (80), Rus Mugurel (90); **BEIUŞ** (BIHOR) Ş. g. cl. VII Pelea Cosmin (110); Lic. „S. Vulcan" cl. VI Hera Odette (130), cl. VII Moş Tiberiu (90); **BÎRLAD** (VASLUI) Ş. g. 11 cl. V Grosu Renata (30), Vlasu Mirela (20); **BOTOŞANI** (BOTOŞANI) Ş. g. 7 cl. VI Foca Cristina Veronica (150); Ş. g. 13

Scanned with OKEN Scanner

cl. V Sfecliș Florin (80); Lic. ped. cl. V Neculau Silvia (75); **BRAȘOV** (BRAȘOV) Ș. g. 5 cl. V Dobrescu Alina (70); Ș. g. 7 cl. VII Bonghe Otilia (88), Tomas Marius (98); Ș. g. 27 cl. VII Stroescu Camelia (89); **BRĂILA** (BRĂILA) Ș. g. 31 cl. V Stoian Roxana Paula (110), cl. VI Niculescu Ionel (90), Tudor Constantin (86); **BUCUREȘTI** Ș. g. 1 cl. III Teodorescu Ștefan (50), cl. IV Paven Horia-Apostol (80); Ș. g. 15 cl. VII Popescu Ioana (250); Ș. g. 19 cl. V Costinescu Alexandra (30); Ș. g. 56 cl. VI Smărăndolu Liviu (150); Ș. g. 59 cl. VII Dumitrescu Loredana (60); Ș. g. 172 cl. VII Dumitrescu Sorin (70); fără mențiune de școală : cl. V Zegre Iustin (30);

CAPU CODRULUI (SUCEAVA) Ș. g. fără mențiune de clasă : Catargiu Cătălin (53); Catargiu Octavian-Vasile (50); **CARACAL** (OLT) Ș. g. 6 cl. VI Ciocan Cornel Florinel (206); **CĂLĂRAȘI** (CĂLĂRAȘI) Ș. g. 4 cl. V Frăsin Veronica (90), cl. VI Zevedei Denisa (130); **CÎMPINA** (PRAHOVA) Ș. g. 2 cl. VI Stoian Cătălin (90); **CLUJ-NAPOCA** (CLUJ) Lic. „E. Racoviță" cl. X Dan Coman (80); **COCIUBA MARE** (BIHOR) Ș. g. Cociuba Mare cl. VIII Stăniș Lenuța (96); **COMIȘANI** (DÎMBOVIȚA) Ș. g. Comișani cl. VI Andrei Claudia (80), Coman Daniela (160); **CONSTANȚA** (CONSTANȚA) Ș. g. 16 cl. VII Caraman Costin (110), ; Ș. g. 28 cl. VII Ambro Florin (100); **CRAIOVA** (DOLJ) Ș. g. 21 cl. VII Popescu Lăcrămioara Simona (130); Ș. g. 22 cl. VI Rusu Adrian (100), cl. VII Circotă Narcisa (98); Lic. ped. cl. V Terpeziceanu Aniela (110); **CRISTOLȚ SĂLAJ** Ș. g. Cristolț cl. V Pop Florica (70);

DROBETA-TR. SEVERIN (MEHEDINȚI) Ș. g. 9 cl. VI Ghijan Paula Cerasela (60); **UDEȘTII VECHI** (TIMIȘ) Ș. g. cl. VII Mateaș Raveica (100); **FĂGĂRAȘ** (BRAȘOV) Ș. g. 6 cl. VI Dan Vasile (80); Lic. „R. Negru" cl. XI Cornea Ciprian (110); **FETEȘTI** (IALOMIȚA) Ș. g. 7 cl. VI Tudor Adriana (60); **FOCȘANI** (VRANCEA) Ș. g. 9 cl. V Popovici Beatrice (80); **GALAȚI** (GALAȚI) Ș. g. 6 cl. V Tufă Simona (90); Ș. g. 17 cl. V Ursu Ecaterina (130), Ș. g. 25 cl. V Bohocea Cristian (100), cl. VII Goldură Doriana (160), Ionescu Constantin (105); Lic. mat. fiz. „V. Alecsandri" cl. IX Istrate Gabriel (180); **GHELARI** (HUNEDOARA) Ș. g. cl. V Jurj Sorin (70); **GH. GHEORGHIU-DEJ** (BACĂU) Ș. g. 8 cl. V Voicea Crina (29); Ș. g. 10 cl. VI Gheoldum Isabela Elena (100); **GUGEȘTI** (VRANCEA) Ș. g. 1 cl. V Farkaș Monica (90); **HUȘI** (VASLUI) Ș. g. 3 cl. V Crăciun Mihaela (83); **IAȘI** (IAȘI) Lic. mat. fiz. „C. Negruzzi" cl. IX Roșca Cristian (110); Lic. „Național" cl. V Lazăr Roxana (175), cl. VI Drăgan Valentin (110), cl. VII Czeller Ștefana-Cristina (110); **LEREȘTI** — CÎMPULUNG MUSCEL (ARGEȘ) Ș. g. cl. IV Neagu Bogdan (40); **LITENI** (SUCEAVA) Ș. g. cl. V Cojocaru Florin (90); **LUPENI** (HUNEDOARA) Ș. g. 3 cl. VI Popa Irina (110); **MEDIAȘ** (SIBIU) fără mențiune de școală cl. VI Moldoveanu Camelia (30);

ORADEA (BIHOR) Ș. g. 11 cl. VI Georgescu Marius (70); Lic. fil. ist. cl. VII Constandi Cătălina (100); **PAȘCANI** (IAȘI) Ș. g. 5 cl. V Grindu Andrei (70), Neața Daniel (87); **PETRU RAREȘ** (BISTRIȚA-NĂSĂUD) fără mențiune de școală Cîmpan Marin (50); **PITEȘTI** (ARGEȘ) Ș. g. 4 cl. VI Iordănescu Nicolae Marian (110); **PLOIEȘTI** (PRAHOVA) Ș. g. 3 cl. V Radu Zoe (50), cl. VI Ioniță Camelia (45); Ș. g. 12 cl. IV Dinu Tiberiu (130); Ș. g. 26 cl. V Neagoe Sofia (50), Sitaru Alexandru (50); Ș. g. 28 cl. V Aldescu Iuliana (80); **POIANA** (GORJ) Ș. g. cl. VI Sgaibă Marius (80); **RÎMNICU VÎLCEA** (VÎLCEA) Ș. g. 1 cl. VI Voicilă Cătălin (30); **ROMAN** (NEAMȚ) Ș. g. 3. cl. VI Joimir Brîndușa Maria (35); **SEBEȘ** (ARAD) Ș. g. cl. VII Dinga Ramona (120); **SIBIU** (SIBIU) Ș. g. 2 cl. VII Tritean Sanda (100); **SIGHETU MARMAȚIEI** (MARAMUREȘ) Ș. g. 3 cl. VI Chindris Claudia (100), Moldovan Olimpia (109); **SINAIA** (PRAHOVA) Ș. g. nr. 1 „G. Enescu" cl. VII Pietroșanu Monica (100); **SLATINA** (OLT) Ș. g. 5 cl. VI Mândică Cosmin (90), ; **ȘOMCUȚA MARE** (MARAMUREȘ) Ș. g. 1 cl. V Sanda Liana (95); **ȘOTÎNGA** (DÎMBOVIȚA) Ș. g. 1 cl. V Burducea Maria (35); **STÎRCIU** (SĂLAJ) Ș. g. cl. V Pavel Alin (70); **TÎRGOVIȘTE** (DÎMBOVIȚA) Ș. g. 8 cl. V Simionescu Iuliana (107), Vlaicu Alexandru (310), cl. VII Dumitrescu Gabriel (90); **TORMAC** (TIMIȘ) Ș. g. Tormac cl. V Csaki Gyongyi (80); Gauz Maria (100); **VADURI** (NEAMȚ) Ș. g. cl. V Bordeianu Lucian (50), cl. VII Albu Cosmin (91), Doarbeș Ciprian (85); **VALCĂU DE JOS** (SĂLAJ) Ș. g. cl. V Ghilca Mariana (70); **VASLUI** (VASLUI) Ș. g. 5 cl. V Solomon Sandu (100); Ș. g. 6 cl. VII Scuteicu Gina-Bianca (110); **VIZANTEA** (VRANCEA) Ș. g. Vizantea Răzășească cl. VII Urloiu Cătălin (40); **VÎNĂTORI NEAMȚ** (NEAMȚ) Ș. g. 1 cl. V Lica Viorica (88).

AIUD (ALBA) Ș. g. 1 cl. VII David Liliana (99); **ALEXANDRIA** (TELEORMAN) Ș. g. 2 cl. V Loghin Irina (89); **AZUGA** (PRAHOVA) Ș. g. 5 Bădilă Cornelia (97); cl. VII Oprea Denisa (72), cl. VIII Anghiescu Valentina (87); **BACĂU** (BACĂU) Ș. g. 5 cl. V Iliescu Sebastian (63), Preda Radu (100); Ș. g. 16 cl. VI Pop Daniel Andrei (66), cl. VII Niță Cristian (81), Niță Marilena (81); Ș. g. 18 cl. VII Bratu Cristina Daniela (109), Burghelea Isabela (100), Iordache Sorana (116), Vasiliu Mihai (131), cl. VIII Darie Irina (97); Ș. g. 19 cl. VI Jămneală Diana (110), Leporda Roxana (75), Mîndrilă Corina (97), Tigler Cristina (42); Ș. g. 20 cl. V Bercu Nicoleta (108), Sus Tac Mihaela (102), cl. VI Tinteanu Cristina (129), cl. VII Năsturaș Claudiu (158), Ojog Bogdan (149); Ș. g. 27 cl. V Ciorsoiu Simona (34); Lic. ind 3 cl. IX Iacob Elena (35); fără mențiune de școală : cl. VIII Bairac Ioana (32); **BAIA MARE** (MARAMUREȘ) Ș. g. 4 cl. V Zoicaș Mihaela (54); Ș. g. 14 cl. VI Fernea Aurel (65); **BALȘ** (OLT) Lic. ind. 1 cl. XI Nica Luci (80); **BĂIȚA** (HUNEDOARA) Ș. g. cl. VI Iacob Mirela (30); **BĂLAN**

Scanned with OKEN Scanner

(SĂLAJ) Ş. g. cl. VII Georgea Maria (109) : **BEIUŞ** (BIHOR) Lic. „S. Vulcan" cl. VI Craiovan Corina (89), Bădulescu Laura (167) ; **BISTRIŢA** (BISTRIŢA-NĂSĂUD) Ş. g. 2 cl. V Uzoni Marcela (38) ; **BÎRLAD** (VASLUI) Ş. g. 8 cl. V Lefter Teona (94), cl. VI Acostioaie Cătălina (82) ; Ş. g. 11 cl. VI Popa Lucian (109), cl. VII Rogojină Maria (86) ; **BÎRZEŞTI** (ARGEŞ com. Hîrtieşti) cl. V Fritea Făniţa (62), Pătrulescu Cornelia-Elena (138) : **BOBOC** (BUZĂU) cl. V Stătescu Costel (43) ; **BOCŞA** (CARAŞ-SEVERIN) Lic. ind. 2 cl VI. Bobeică Angelica (91) : **BOGATA DE SUS** (CLUJ) cl. VI Ciascai Daniel (122), Rohan Maria (96) ; **BOTOŞANI** (BOTOŞANI) Ş. g. 7 cl. V Atudosie Cristina (88), cl. VI Avasiloaiei Luciana (89), Gulea Ioan-Eugeniu (169), Nucuţă Cristina-Paula (127) ; Ş. g. 8 cl. VI Mihailov Victor (30) ; Ş. g. 13 cl. V Buznosu Laura (99), Creţu Daniela (130), Tănase Adrian (83), cl. VI Lupancu Cătălin Constantin (137), Virlan Violeta (120), cl. VII Alupoaie Bogdan (98), Tănăsoaie Loredana (136) ; **BRAŞOV** (BRAŞOV) Ş. g. 3 cl. VI Brătucu Cosmin (143) ; Ş. g. 5 cl V Dragomir Mariana (49), Tira Adrian (105), cl. VIII Bidu Liliana (60) ; Ş. g. 22 cl. VI Ene Alina (58), Simion Mihaela (124) ; Ş. g. 27 cl. V Bucur Oliver (72), cl. VI Niţu Teodor (80), cl. VII Dragotă Ovidiu (140), Hermenean Ioana (72), Ştefan Georgiana (30) ; fără menţiune de şcoală : Furnică Radu (50), Gherman Alina (53) ; **BRATIA-DEAL** (VÎLCEA com. Galicea) cl. V Oprea Patricia Daniela (33) ;

BRĂILA (BRĂILA) Ş. g. 6 cl. V Lepădatu Carmen (41) ; Ş. g. 7 cl. VII Iliescu Laura (100) ; Ş. g. 10 cl. V Chelu Laura-Camelia (55) ; Ş. g. 12 cl. VI Dulgheru Alina (124) ; Ş. g. 22 cl. VII Trufaşu Viorica (254) ; Ş. g. 23 cl. VI Stroe Delia (129) : Ş. g. 28 cl. V Fătu Daniela (28) : **BUCIUMI** (SĂLAJ) Ş. g. cl. V Cubineţ Anca (137) ; **BUCUREŞTI** Ş. g. 5 cl. V Giurgea Florin (73), cl. VII Soare Bogdan (100) ; Ş. g. 11 cl. V Tudose Elena (97), cl. VII Popescu Patrick (280) ; Ş. g. 15 cl. VII Popescu Ioana (290) ; Ş. g. 20 cl. IV Masgras Elena (30) ; Ş. g. 21 cl. VI Palancă Radu (100) ; Ş. g. 56 cl. V Smărăndoiu Liviu (280) ; Ş. g. 57 cl. VII Drugea Iulia (145), Ş. g. 58 cl. V Trifu Loredana (38), cl. V Trandafirescu Mihai (10) ; Ş. g. 85 cl. VIII Fluieraşu Andrei (198) ; Ş. g. 117 cl. V Tabarcea Ion (144) ; Ş. g. 122 cl. VI Sută Safalin Cristina (39) ; Ş. g. 150 cl. V Vătăşescu Veronica (40) ; Ş. g. 172 cl. V Dumitrescu Cătălin (63) ; Ş. g. 174 cl. VI Vişan Alina (40) ; Ş. g. 194 cl. VI Moca Ruxandra (103) : Ş. g. 206 cl. VI Cojocaru Cecilia (43), Rusescu Roberto (48) ; Lic. ind. 27 cl. X Ticău Daniel (104) ; Lic. ind. 34 cl. VII Caprini Andreea (105) ; Lic. ind. „D. Cantemir" cl. IX Băjenaru Viorel (99) ; Lic. ind. „I.L. Caragiale" cl. VI Popoviciu Bogdan (84) ; Lic. arte plast. „N. Tonitza" cl. VI Ursu Justin (60) ; **CARACAL** (OLT) Ş. g. 2 cl. VIII Sucă Clara (110) ; Lic. ind. 1 cl. IX Ciobanu Cristian (108) ; **CARANSEBEŞ** (CARAŞ-SEVERIN) Ş. g. 8 cl. V Bordaş Aurelia (95). Pipa Daria (89) ; **CÎNDEŞTI** (BOTOŞANI) Ş. g. 1 cl. VI Hrinciuc Luminiţa (30) ; **CÎMPENI** (ALBA) Ş. g. cl. IV Crişan Cornel (150) ; **CÎMPINA** (PRAHOVA) Ş. g. 2 cl. VIII Vasile Valentin (30) ; **CLUJ-NAPOCA** (CLUJ) Ş. g. 6 cl. V Crăciun Cora (60), Listeş Ovidiu (60) ; **COMIŞANI** (DÎMBOVIŢA) Ş. g. cl. VI Bîrlodeanu Radu (150) ; **COSTEŞTI** (VÎLCEA) Ş. g. cl. VII Constantinescu Alina (145) ; **CONSTANŢA** (CONSTANŢA) Ş. g. 11 cl. V Ionescu Daniela (30) ; Ş. g. 24 cl. V Drăgună Raluca (80) ; Ş. g. 32 cl. VII Palangă Claudia (89) ; **CRAIOVA** (DOLJ) Ş. g. 22 cl. VI Poenaru Ilie (78) ; Ş. g. 32 cl. V Ştefănică Elvira (65), cl. VI Ciobanu Stela (57) ; Lic. „Fr. Buzeşti" cl. V Arsenoiu Paul (100), Cristovici Laurenţiu (87), Dorobanţu Cristina (99), Efrem Oana (100), Necşulescu Cristina (100), Penescu Mihaela (98), Pescăruş Cristina (100), Roşulescu Laura (100), Stamate Sorin (80), Şerbănescu Dragoş (66), Ştefănescu Miruna (100), Tobă Mihai (65), Totora Mihaela (100), Vlăsceanu Simona (99), Zamfir Mirel (100), cl. VI Buce Dan (80) ;

DEJ (CLUJ) Ş. g. 3 cl. V Cîmpean Cecilia (93) : **DRĂGĂNEŞTI-OLT** (OLT) Ş. g. cl. VI Dumitrescu Sorin (33) ; **DROBETA-TR. SEVERIN** (SEVERIN) Ş. g. 9 cl. VI Gradin Adina (66) ; Ş. g. 16 cl. V Rotara Mihai (28) ; **DUDEŞTI** (BRĂILA) Ş. g. cl. V Pîrpiliu Iulian (40) ; **HUNEDOARA** (HUNEDOARA) Ş. g. 1 cl. V Moţ Ovidiu (100) ; **HUŞI** (VASLUI) Ş. g. 2 cl. VII Antonică Mihaela (232), Borş Elena (120), Cristea Anca (120), Dănilă Adrian (120), Moldoveanu Costel (118), Ripeanu Irina (110), cl. VIII Bogdan Liliana (98), Borş Elena (98), Ciolpan Ionela (100), Mîcnea Petru (98), Savin Natalia (125) ; Ş. g. 3 cl. V Crăciun Mihaela (40), Drăghici Violeta (35), Marcu Antoniu (60), Popa Sebastian (68), Romilă Tania (79), Toncu Cătălin (30), Munteanu Gheorghe (92) ; **IAŞI** (IAŞI) Lic. „Naţional" cl. VI Iancu Iulia (41), cl. VII Grăcian Vasile (100), Osoianu Mihaela (30) ; Lic. „C. Negruzzi" cl. XI Apreutesei Gabriela (100) ; **LIPOVA** (ARAD) Ş. g. cl. VI Maxim Andreea (60) ; **LUCIENI** (DÎMBOVIŢA) Ş. g. cl. VII Ungureanu Mihaela (57) ; **LUPENI** (HUNEDOARA) Ş. g. 2 cl. VI Benedek Monica (98), Grunvald Claudiu (198) ; **MEDIAŞ** (HUNEDOARA) Ş. g. 2 cl. IV Plopeanu Doru (70) ; **ORADEA** (BIHOR) Ş. g. 6 cl. V Mocuţa Simona (90) ; Ş. g. 20 cl. VI Brasso Ileana (70), Jurca Felicia (90) ; **ORŞOVA** (MEHEDINŢI) Ş. g. cl. VI Petronescu Claudiu (44) ; **PĂUNEŞTI** (VRANCEA) Ş. g. 1 cl. IV Bostan Florin (119), cl. VII Dumitru Lucica (103) ; **PIATRA NEAMŢ** (NEAMŢ) Ş. g. 12 cl. V Bălănescu Irina (120) ; **PITEŞTI** (ARGEŞ) Ş. g. 3 cl. VI Pătroi Dragoş (90) ; Ş. g. 15 cl. V Popescu Adrian (100), cl. VI Stan Adrian (50) ; **PLOIEŞTI** (PRAHOVA) Ş. g. 3 cl. V Petre Elena (57), cl. VII Aldea Felicia (70), Bănică Adriana (140) ; Ş. g. 10 cl. V Cosma Andreea (60), cl. VI Lupu Denis (60), Petre Mihail (48) ; Ş. g. 14 cl IV Stoicescu Cristina (30) ; Lic. ped. cl. IX Roşu Leonard (100) ; Ş. g. 26 cl. VII Stoicescu Ileana (110) ;

Scanned with OKEN Scanner

RÎMNICU VÎLCEA (VÎLCEA) Ş. g. 1 cl. V Capşa Diana (60), Nadolu Mihai (60), Scorţar Monica (115), cl. VI Bănuţă Nicoleta (50), Nicu Diana (50), Perşa Adriana (54), Tudorache Julien (60); Lic. mat. fiz cl. VII Băducu Cristina (70); Lic. ind. 7 cl. VI Ichim Daniela (100), Stroe George (80), Lic. ind. 8 cl. V Antonescu Liviana (100); **ROMAN** (NEAMŢ) Ş. g. 7 cl. V Smil Mădălina (70); Ş. g. 11 cl. VI Agafiţei Bogdan (89), Brînzei Daniela (64), Cadar Loredana (210), Gavriluţă Marius (80), Ciobanu Robert (50), Otea Claudiu (88), Rusu Cristina (100), Vega Gabriel (80), Toma Delia (85); **SATU MARE** (MARAMUREŞ) Ş. g. 10 cl. V Rut Angela (28); **SĂLĂTRUCU** (ARGEŞ) Ş. g. 1 cl. III Matei Tatiana (40); **SEBIŞ** (ARAD) Ş. g. cl. VII Străuţ Radu (84); **SIBIU** (SIBIU) Ş. g. 2 cl. VIII Tritean Sanda (60); **SLATINA** (OLT) Ş. g. 4 cl. V Drăghici Cristian (75); Ş. g. 5 cl. V Trandafir Cecilia (110), cl. VI Brănescu Mihaela (123), Sulger Irinel (110), cl. VII Ionescu Roxana (90), Mirea Elena (130), Răduţ Mihaela (80); **SUCEAVA** (SUCEAVA) Ş. g. 2 cl. V Iftime Gabriela (93), Irimescu Adela (90); cl. VII Ştefan Oana (145),; Ş. g. 14 cl. V Amăroaiei Adrian (54); **ŞOMCUTA MARE** (MARAMUREŞ) Ş. g. 1 cl. VI Nicoară Nicoleta (100); **TECUCI** (GALAŢI) Ş. g. 2 cl. V Bucium Rodica (83), Cîrlig Mirela (84), Lupu Ionela (93), Motoca Paula (74); Ş. g. 5 cl. V Ifrim Mihaela (80), Ilie Iulian (30); **TIMIŞOARA** (TIMIŞOARA) Ş. g. 8 cl. V Iacob Adrian (34), cl. VII Galerian Teodor (99); Lic. „C.D. Loga" cl. V Citescu Ion (85); **TÎRGOVIŞTE** (DÎMBOVIŢA) Ş. g. 8 cl. V Enache Adriana (40), Pasca Simona (37), Radu Carmen (50); **TÎRGU JIU** (GORJ) Ş. g. 12 cl. V Baucuba Ana (100), Buzura Adrian (100), Pascu Monica (90), cl. VI Bădulescu Călin (86), cl. VII Anghel Nicoleta (90), Adela (70); **TÎRGU MUREŞ** (MUREŞ) Ş. g. cl. VI Stan Ileana (125); **VASLUI** (VASLUI) Ş. g. 3 cl. V Egorov Ana (69), Găbureac Carmen (76); Miron Ana (68), Popa Geta (89); Ş. g. 6 cl. VIII Cucu Valentin (81); **VLĂHIŢA** (HARGHITA) Ş. g. 2 cl. VII Kovacs Zoltan (65); **ZALĂU** (SĂLAJ) Lic. mat. fiz. cl. VII Bota Marius (50), Breban Ovidiu (75), cl. IX Sandu Speranţa (82).

AFUMAŢI (DOLJ) Ş. g. cl. VIII Preda Dumitru-Felician (160); **AIUD** (ALBA) Ş. g. 1 cl. V Vlad Carmen (49), Zurgălău Rareş (117), cl. VI Cristea Anca (270), Părăian Andreea (200); Lic. ind. „A. Iancu" Pădureanu Mircea (100); **ALBA IULIA** (ALBA) Ş. g. 1 cl. V Agavriloaie Isabela (100), Chiriluţ Carmen (50), Popa Cristina (100), Tănase Alina-Silvia (80); Ş. g. 2 cl. VII Crişan Marius (80); Ş. g. 6 cl. VI Urian Monica (110); Ş. g. 7 cl. VI Ionaşcu Alina Carmen (57), Duma Ovidiu (50), Leister Brigitte (90), Şerban Marilena (85), Popiuc Iulia (90), Todea Mihaela (100); Ş. g. 8 cl. VI Rusan Claudiu (90); **ALBEŞTI** (ARGEŞ) Ş. g. cl. VI Bichiru Alexandru (76); **ALEŞA** (BIHOR) Ş. g. cl. VI Homonai Andreea (139); **ALMAŞU** (SĂLAJ) Ş. g. cl. V Ignat Florina (100), Petruş Marius (90); **ALEXANDRIA** (TELEORMAN) Ş. g. 2 cl. VI Niţulac Mihai (100); Ş. g. 3 cl. V Baciu Oana (80), cl. VI Bandulea Alina (89), Berceanu Adrian (76), Giba Aurelia (98), Puchin Mirela (130), Reteulescu Călin (90), Sună Carmen (80), Ş. g. 5 cl. VI Păscuţ Angelica (84); **AMĂREŞTI** (VÎLCEA) cl. V Popa Dorina (60); **ARAD** (ARAD) Ş. g. 4 cl. VI Ileta Alina (150); Ş. g. 5 cl. IV Ciocu Ciprian (170); Ş. g. 13 cl. V Butu Răzvan (120), Virog Mihai (100); Ş. g. 18 cl. III Hărduţ Gabriel (30), cl. V Iungu Claudiu (105), Timiş Adrian (90); Ş. g. 19 cl. VI Lazăr Ciprian (70); Lic. ind. 13 cl. V Cornea Dacian (80), Fodoran Lucian (75), cl. VII Bogdan Cristina (84), Feteanu Simona Ancuţa (80), Sudrijan Corina (90); Lic. „I. Slavici" cl. IX Verzea Valentin (120); **ARDUD** (SATU MARE) Ş. g. cl. VII Borhidan Claudiu (90), Cărbunescu Aron (77), Huber Vasile (80), Schladrler Magdalena (100); **AZUGA** (PRAHOVA) Ş. g. cl. V Dron Cătălina (90), Sbârnă Ana-Maria (180), cl. VI Bădilă Cornelia (100), cl. VII Diaconu Marilena (90), Dumitrescu Cristina (128);

BACĂU (BACĂU) Ş. g. 1 cl. VI Sîrbu Loredana (45); Ş. g. 16 cl. V Ionică Gabriela (119); Ş. g. 18 cl. VI Mitocariu Cristina (40), Oana Claudia (120), cl. VIII Temciuc Oana (150).: Ş. g. 19 cl. VI Goia Irina (69), Lupescu Anca (70), cl. VIII Matei Costel (70); Lic. ped. „Ştefan cel Mare" cl. V Drobotă Veronica (80), Patrichi Lauriana (90); Lic. „G. Bacovia" cl. IX Balaban Elena (45), Berdila Adrian (147), Boghiu Mariana (14), Celmare Adriana (72), Cucu Eduard (138), Sasa Cristina (100); **BAIA MARE** (MARAMUREŞ) Ş. g. 8 cl. VI Zaharia Sorin (120); **BAIA DE FIER** (GORJ) Iliescu Elena (62), cl. III Mihuţescu Elena (100), Turbăceanu Melania (95), cl. IV Meleoancă Maria (90); ; **BALŞ** (IAŞI) Lic. ind. 2 cl. VII Petre Andaluzia (30); **BAND** (MUREŞ) Moldovan Felix (110); **BĂLAN** (HARGHITA) Ş. g. 1 cl. VII Galuovo Rodica (123), Vladovici Eugenia (110); **BEIUŞ** (BIHOR) Ş. g. cl. VII Jovre Dana (138); Lic. „S. Vulcan" cl. V Alexe Mircea (107), Burz Adrian (97), Cireap Darian (125), Mihalcea Nicolae (100), cl. VI Cuc Marioara (124), Morar Ionela (179), Varge Mirela (96), Vesa Camelia (208), cl. VII Bolha Gabriela (99), Codreanu Vlad (145), Frenţ Claudia (87), Martin Angelica (96), Memetea Marius (78), Negreanu Daniela (100), Ungur Mihaela (67); **BOTOŞANI** (BOTOŞANI) Ş. g. 3 Purice Cătălin (130); Ş. g. 7 cl. VI Dumitraşcu Valentin (108), cl. VI Penciuc Carmen (104), Ungureanu Claudia (130), cl. VIII Ene Cristian (120); Ş. g. 13 cl. V Bejenaru Claudiu (115), Lăzureă Vasilica (105), cl. VI Bejenaru Petrică (160), Chiriac Roberta (140), Ciubotariu Felicia (90), Ciubotariu Silviu (130), Condurache Emanuela (79), Gherghel Mihăiţă (100), Maliş Eugenia (93), Mintiei Isabela (150), Patrar Adriana (81), Tiganiuc Ciprian Florica (90); **BOZOVICI** (COVASNA) Ş. g. cl. V Găină Anişoara (60); **BRAŞOV** (BRAŞOV) Ş. g. 5 cl. V Căprău Radu (60); Potroviţă Ioana (70), cl. VIII Rotaru Cristina (49), Stanciu Adriana (50), Urs

Scanned with OKEN Scanner

Alina (50); Ş. g. 22 cl. VI Ovesca Bianca (139), cl. VII Cucuian Silviu (105); Ş. g. 24 cl. V Hogiu Sorin (50); Lic. „Monterus" cl. VII Dumitru Adrian (312), Tătaru Octavian (40); **BRĂILA** (BRĂILA) Ş. g. 7 cl. IV Dervis Monica (95); Ş. g. 10. cl. VIII Ciupercă Mihai (90); Ş. g. 11 cl. VI Popa Ştefania (70); Ş. g 18 cl. V Cauteş Cătălin (80); Ş. g. 22 cl. VIII Vilcu Mihaela (165); Ş. g. 29 cl. VI Manea Mirela (61); Lic. marină cl. IX Negoiţă Cătălin (70); **BUCIUMI** (ALBA) Ş. g. cl. V Cubinet Anca (100); **BUCUREŞTI** Ş. g. 5 cl. VII Stanciu Nicolae (50), Stoica Sergiu (35); Ş. g. 11 cl. VI Albu Irina (150), cl. VII Popescu Patrick (180); Ş. g. 17 cl. VII Ion Roxana (65); Ş. g. 20 cl. V Ungureanu Ştefan (90); Ş. g. 30 cl. VI Tătaru Dana (80); Ş. g. 36 cl. VIII Drapaca Corina (70); Ş. g. 56 cl. VI Smărăndoiu Liviu (150); Ş. g. 57 cl. V Ceapă Paul (230); Ş. g. 70 cl. VII Mihai Andreea (98), Tudorică Andreea (98); Ş. g. 97 cl. VI Lucaciu Cristi (230); Ş. g. 108 cl. VI Cincă Ivona (68), Tudorache Andrei (103); Ş. g. 119 cl. V Grecu Adrian (40); Ş. g. 149 cl. VII Mihai Dana (80); Ş. g. 156 cl. V Dan Diana (57), Tudor Emanuel (30), cl. VI Manolache Ştefan (69); Ş. g. 169 cl. V Dinulescu Adriana (70); Ş. g. 176 cl VI Zorzan Timi (79); Ş. g. 190 cl. VI Costache Victor (47), Pricop Lucian (38); Ş. g. 198 cl. V Rotaru Ioan (20); Ş. g. 206 cl. V Mihai Cristian (60), Lic. „I. L Caragiale" cl. IX Dumitrescu Cristina (40), Olănic Tiberiu (20);

CARANSEBEŞ (CARAŞ SEVERIN) Ş. g. 8 cl. V Albai Ramona (180), Grunţeanu Anelore (99), cl. VI Ghera Isabella (279); Lic. ped. Secan Bogdana (100), **CARACAL** (OLT) Ş. g. 1 cl. V Petcu Cătălin (140); Ş. g. 3 cl. VI Boşogea Mihail (70); Ş. g. 6 cl. V Ştefan Emil (120), Stănescu Alina (75); Ş. g. 7 cl. V Cătălin Vlad (135), Rădulescu Ionuţ (75), cl. VI Firan Claudia (90), Micu Mihai (70); **CĂLĂRAŞI** (CĂLĂRAŞI) Ş. g. 4 cl. V Ciobănescu Tudor (90), Lambu Nicoleta (80), Brici Crenguţa (100); Ş. g. 5 cl. VI Lică Dan (180), Liţu Marian (90), cl. VII Comnea Claudia (48); **CĂLUGĂRENI** (GIURGIU) Lic. agroind. cl. X Enache Florin (70), Leat Liliana (75), Moţoi Gheorghe (75), Moţoi Florin (77), Oprea Victorita (65), Săraru Vasile (75), Alexe Lucică (60), cl. XI Birloiu Mariana (65), Ghetu Liliana. (70), Gospodin Simona (75), Tutuluş Ion (70); **CAŞEIU** (CLUJ) Ş. g. cl. VI Boldor Rodica (100), Groşan Daniel (100), cl. VIII Bojor Claudia (200); **CEICA** (BIHOR) Ş. g. cl. III Sidea Anca (300); **CERNAVODĂ** (CONSTANŢA) Ş. g. 2 cl. V Lojniţă Lucian (80), Stăncescu Raluca (50); Ş. g. 3 cl. V Hânsă Ana (110); **CHEILE BICAZ** (BIHOR) Ş. g. 1 cl. V Săpunaru Luminiţa (78); **CIREŞU** (BRĂILA) Ş. g. Coman Mariana cl. VI VBalaban Mihaela (100); **CÎMPIA TURZII** (CLUJ) Ş. g. 5 cl. VI Crăciun Camelia (79); Lic. ind. cl. X Onişor Ovidiu (108); **CÎMPINA** (PRAHOVA) Lic. ind. 5 cl. IX Drăghici Roxana (110), Tudor Andrei (120); **CÎMPULUNG MOLDOVENESC** (SUCEAVA) Ş. g. 3 cl. V Cucoranu Corneliu (90), cl. VI Sutea Marius (100); **CÎMPULUNG-MUSCEL** (ARGEŞ) Ş. g. 3 cl. IV Coman Cristian (68); cl. V Corbu Adina (60), Tudor Camelia (100), Libordea Laura (40); Lic. ind. 3 cl. XI Stănică Daniel (180); **CLUJ-NAPOCA** (CLUJ) Ş. g. 6 cl. III Moldovan Smaranda (170), cl. VI Listeş Ovidiu (80), Mustăţea Ligia (80), cl. VII Moldovan Mădălina (50), Netea Ioan (80); Lic. mat. fiz. 2 cl. IX Constantin Marius (85); Lic. ind. „N. Bălcescu" cl. VI Ciugudeanu Alina (100), cl. VII Someşan Călin (90); **COCIU** (BISTRIŢA-NĂSĂUD) Ş. g. cl. VII Magdea Emilian (64); **CONSTANŢA** (CONSTANŢA) Ş. g. 2 cl. V Manole Cristian (76); Ş. g. 25 cl. VII Pruiu Oana (120); Ş. g. 38 cl. VI Negulescu Alina (88); Lic. „Mircea cel Bătrîn" Palangă Claudia (94), Pascu Rovena (90); **COSTEŞTI** (VÎLCEA) Ş. g. cl. V Stoican Florin (170); **CRAIOVA** (DOLJ) Ş. g. 1 cl. VI Bamer Ina-Paula (100), Retezatu Mirela (90); Ş. g. 2 cl. V Niţu Sonia (69), cl. VIII Teau Claudiu (130); Ş. g. 21 cl. VIII Teodorescu Dan (120); Ş. g. 22 cl. VI Burci Oana (100); Ş. g. 31 cl. V Dobre Gabriela (98); Ş. g. 31 cl. VI Dumitrescu Cătălin (100), cl. VII Pătuleanu Diana (85); Sîrbu Marius (80); Ş. g. 32 cl. VI Dogaru Florinel (148); Ş. g. 35 cl. VIII Buricea Mihaela (138); Ş. g. 37 cl. V Buricea Bogdan (100); Lic. fil-ist. cl. VII Titoiu Eugen (80), Voicu Claudiu (80); Lic. „F. Buzeşti" cl. V Vasiloiu Claudia (15); Lic. „N. Bălcescu" cl. IX Buricea Adina (90); Lic. ped-cl. VII Boboc Florentina (270); cl. XII Terpeziceanu Aniela (50); **CUDALBI** (CONSTANŢA) Ş. g. 1 cl. V Lungu Constanţa (140); **CUGIR** (ALBA) Ş. g. 2 cl. VI Potochi Roxana (230); **CURTEA** (TIMIŞ) Ş. g. cl. V Nemeşan Nicoleta (80); **CURTEA DE ARGEŞ** (ARGEŞ) Ş. g. 3 cl. V Moratiu Daniel (120); Ş. g. 4 cl. VI Tărboiu Diana (80);

DĂBULENI (DOLJ) Ş. g. 3 cl. V Dărac Ileana (167), Şerban Simona (99); **DĂRĂBANI** (BOTOŞANI) Ş. g. 1 cl. V Aionese Otilia (62), Bărbacariu Silviu (74); Ciobotaru Lăcrămioara (59), Gabor Mariana (60), Iordache Liviu (72), Lazăr Răzvan (58), Plămadă Mihaela (52), Scutaru Mihaela-Viorica (63); **DEJ** (CLUJ) Ş. g. 1 cl. VI Banc Nicoleta Mihaela (62), Mureşan Dorel (95), Tallian Adriana (90); Ş. g. 3 cl. V Hruban Andrei-Horaţiu (105), Tarta Augustin Marian (107), cl. VII Chiuzan Corina-Anca (137), Ilieş Nicoleta (120), Samoilă Cristina (100), cl. VIII Horanguş Adriana (100), Vereş Corina (100); Ş. g. 4 cl. V Bagdasar Luminiţa (88), Caian Romeo Lucian (82), Ciubăncan Dacian Mircea (85), Ciubăncan Narcis Ioan (87), Crişan Theodor (85), Georgiu Liana (60), Ghilvaci Mircea (86), Huberlog Olga (98), Ilca Gabriela Cristina (90), Ilea Cosmin (111), Luduşan Ioana (87), Man Alexandrina (85), Modovan Claudiu (87), Nemeş Alin (78), Panov Lucian (83), Pascaru Florin (85), Popescu Lăcrămioara (88), Roman Ciprian (86), Vlasin Alina (80), cl. VI Lucăcel Mircea (180), cl. VII Buzdugan Sorina (112); **DÎRMĂNEŞTI** (ARGEŞ) Ş. g. cl. V Dumitrache Mariana (48), Ghidan Iuliana (60), Stingulescu

Scanned with OKEN Scanner

Carmen (59), Sultana Mihaela Corina (58), cl. VI Coman Marius Dănuț (92); **DOCTOR PETRU GROZA** (BIHOR) Ș. g. cl. V Bora Nicolae (190), Bianca Doina 180), Cureș Lazăr Cătălin (180), Drăgoi Răzvan (107), Totora Emil (100), cl. VII Comănici Daniel (100), Petriș Cristian (89); **DOROHOI** (BOTOȘANI) Ș. g. 2 cl. VI Alexa Laurențiu (146); **DROBETA-TR. SEVERIN** (MEHEDINȚI) Ș. g. 3 cl. V Măneanu Mădălina (90), Surdu Cornel Mihail (80), Târlui Consuela Georgeta (21), cl. VI Ghidel Liliana (80), Sturek Irina Magdalena (73); Ș. g. 9 cl. V Albișoru Ramona Gabriela (80), Bădoi Steluța (90), Cîrstoiu Luminița (90), Mureșan Gabriel Felician (63), Trăistaru Petrișor (87); **DUDEȘTI** (BRĂILA) Ș. g. cl. V Negreanu Sorina (88), cl. VI Potecă Mihaela (90);

FETEȘTI (IALOMIȚA) Ș. g. 8 cl. V Călin Cezar (80); **FOCȘANI** (VRANCEA) Ș. g. 9 cl. V Apostolescu Oana (92);

GALAȚI (GALAȚI) Ș. g. 2 cl. VI Onciu Claudia (110), Sandu Emil Adrian (58); Ș. g. 3 cl. V Soare Cristina (88); Ș. g. 6 cl. V Bodea Ștefan (200); Gîlcă Ionuț (94); Ș. g. 10 cl. V Efimov Ina (100), Olaru Florentina (70), Roșu Paula (100), Stoica George (80), Verga Alina (96); Ș. g. 18 cl. V Dulă Dolores (60); Moraru Mihaela (60), Rachieru Cerasela-Lenuța (56), Rusu Cristinel (120), Sandu Gianina (39); Ș. g. 24 cl. V Budei Simona (100), Lupică Dana (90), Ștefănescu Bogdan (110), cl. VI Hendoreanu Cristina (150), Hristache Marian (65), Ionescu Iuliana (100), Ionescu Viorica (92), Purcaru Oana-Brîndușa (180), Samoilă Florin (60), Trîmbițașu Vasilica (85), cl. VII Nat Laurențiu (90); Ș. g. 25 cl. V Batog Camelia (120), Cristache Veronica (77), Enache Oana (100), Ivan Aura (120), Teodorescu Laurența (90), cl. VI Moraru Florin (168); Ș. g. 26 cl. VI Sindile Mihai (79); Ș. g. 28 cl. V Costache Cristina (95), cl. VI Adam Gabriela (148), Băncesu Ionuț (150), Cristofor Adelina-Olivia (148), Neagu Rodica (168); Popovici Elena (212), Răducu Cristi (160), Tăbăcaru Daniel (160); Ș. g. 33 cl. V Iancu Cecilia Diana (130), Maraloi Florin (130), Sonu Felicia (126), cl. VI Nucă Mircea (132); Ș. g. 40 cl. II Purdilă Octavian (110); Ș. g. 41 cl. V Spiridonescu Cristina (68), Vlad Ionel (80); Fără mențiune de școală și clasă: Dinu Ioana (85), Fulga Radu (60); Lic. „V. Alecsandri" cl. IX Munteanu Marius (180); Fără mențiune de liceu: cl. IX Manole Eugen (228); **GALBENU** (BRĂILA) Ș. g. cl. VI Ioan Lidia (50); **GEMENELE** (BRĂILA) Ș. g. cl. VIII Gîscă Elena (100); **GHEORHE GHEORGHIU-DEJ** (BACĂU) Ș. g. 8 cl. VI Gorbatâi Bogdan (160); Ș. g. 10 cl. VII Aloman Cristian (82); **GIURGIU** (GIURGIU) Ș. g. 3 cl. V Moldoveanu Alexandru (60); **GÎRBA DE JOS** (ALBA) Ș. g. cl. V Sima Mariana (120); **GLOGOVA** (GORJ) Ș. g. cl. VI Ilie Mădălina Paula (160); **GRĂDINARI** (OLT) Ș. g. cl. VIII Joița Dumitru Daniel (10); **GRUMĂZEȘTI** (NEAMȚ) Ș. g. cl. VI Arsene Cezara (140), Drăgoi Corina (75),; **GUGEȘTI** (VRANCEA) Ș. g. 1 cl. VII Deneanu Aurel (120).

IAȘI (IAȘI) Lic. „C. Negruzzi" cl. V Crișmaru Ioana Georgiana (18), Precupeanu Codrin (50), cl. VI Cașu Radu Daniel (80), Felea Violeta (270), Ionel Lăcrămioara (180), Luca Andra (197); Lic. „Național" Iași cl. V Barbu Cătălina (110), cl. VI Albu Irina (90), cl. VII Chitic Ovidiu (107), Frăsinaru Andrei (180), Hameiuc Cătălin (120), cl. VIII Armat Flavian (100), Căluianu Călina (360), Gălușca Bogdan Dănuț (98); Ș. g. 1 cl. VI Barbacaru Lucian (119), Ciubotaru Ionuț (120), Filip Mircea (120), Mănăilă Mara (119); Ș. g. 3 cl. IV Omer Severin (180); Ș. g. 11 cl. V Arsintescu V. Dorin (100); Ș. g. 13 cl. V Murgu Mikael (78); Ș. g. 22 cl. VI Manole Mugur (90); Lic. „E. Racoviță" cl. VII Agape Dragoș (98); Lic. „G. Ibrăileanu" cl. V Jerca Oltița (110); **IVEȘTI** (GALAȚI) Ș. g. 3 cl. V Ionașcu Ileana-Liliana (90), Ociu Dragoș Cătălin (90); **LEBIȘ** (ARAD) Ș. g. cl. VI Galea Otilia (70); **LEREȘTI** (ARGEȘ) Ș. g. cl. VI Trandafir Dănuț (80); **LIEȘTI** (GALAȚI) Ș. g. 1 cl. VII Stan Daniela (150), cl. VIII Panaite Cristina (100); **LUDOȘ** (SIBIU) Ș. g. cl. V David Maria (75); **LUGOJ** (TIMIȘ) Ș. g. 2 cl. V Agachi Marinela (70), Bădoiu Cristian (60), Bobic Mugurel Cristian (80), Enache Cristian (60), Jucu Marcel (50), Neagu Gheorhhe (80), Nuia Lavinia (50), Pantovici Mirabela (90), Pava Diana (165), Stăncescu Vandana (70), Vincze Monica (160), cl. VI Almani Adela (118), Ambreș Stelian (70), Biriș Lucia (250), Bleomli Simona (40), Boc Laura (60), Brașovean Andreea (130), Buian Marius (120), Cernescu Dana (190), Ciobozorile Loredana (130), Dobre Mirabela (100), Jucu Constantin (120), Jucu Sebastian (190), Murteau Mihaela (80), Murarescu Amelia (100), Ogrinel Laura Cristina (80), Prodan Filofteia Virginia (170), Ruian Marius (110), Schropp Judit (120), Suciu Sorana (70), Toma Melinda (170), Tomes Cosmin (70); Ș. g. 5 cl. V Dragotă Mariana (90); Lic. ind. „C. Brediceanu" cl. XII Frățetan Laura (100); **LUPENI** (HUNEDOARA) Ș. g. 2 cl. VI Albieru Nicoleta-Dalia (90), Anghel Gabriela (76), Bălășoiu Mihaela (70), Bulai Narcisa (70), Ciortia Monica (70), Condoiu Flavius (64), Cunea Daniela (70), Miclăuș Daniela (75), Szatmary Haynal (90), Szebely Simona (100), cl. VII Benedeh Monica (90), Mărgineanu Elena-Luminița (90), cl. VIII Grunvald Claudiu (80);

MĂRGINENI (ARGEȘ) Ș. g. cl. VI Lupu Marian Eugen (100); **MASTACANI** (GALAȚI) Ș. g. cl. VII Grigoraș Daniela (80); **MAURENI** (CARAȘ-SEVERIN) Ș. g. cl. V Boncza Ovidiu (45), Stoian Loredana (45), cl. VI Lucală Simona (70), cl. VII Lucală Emilia (100); **MEHADIA** (CARAȘ-SEVERIN) Ș. g. cl. VI Dumbravă Ionuț (90); **MEHEDINȚI** (PRAHOVA) Ș. g. 1 Roată Ana (106); **METEȘ** (ALBA) Ș. g. cl. VI Ampoltan Silvia (100), Opruță Lidia (100); **MIZIL** (PRAHOVA) Ș. g. 3 cl. VII Alexe Monica (105), Băjan Mirela (100), Ilie Norica (98);

Scanned with OKEN Scanner

MOINEȘTI (BACĂU) Ș. g. 1 cl. V Nedelcu Alen (54), Pricope Ștefana (60), cl. VI Ciobotaru Mariana (85), Iliru Florin (230), cl. VII Balaban Luiza Elena (120); **MORENI** (DÎMBOVIȚA) Ș. g. 1 cl. VI Apostol Radu (80), cl. VIII Iordănescu Mirela (80), Mărgineanu Grațiela (80); Ș. g. 4 cl. VI Dincă Elena Daciana (150), Mihăilescu Cornelia (120), Răduță Gabriela (150), cl. VII Ghiță Ioana Florentina (130); **MOTRU** (GORJ) Ș. g. 1 cl. V Balabuc Claudia (60), cl. VI Ștefan Costina Daciana (111), cl. VII Chirică Ștefan (99), Nanuș Viorela (78), cl. VIII Baiculescu Cornelia (90); Ș. g. 2 cl. VIII Palcu Laura (120); **MOVILENI** (GALAȚI) Ș. g. 1 cl. V Sanie Mihaela (82), Spunie Gabriela (100), cl. VI Rădăcină Ionel (110);

OINGARAȚI (NEAMȚ) Ș. g. Agavriloaie Cătălin (26);

PIATRA NEAMȚ (NEAMȚ) Ș. g. 2 cl. IV Antoniuc Bogdan (360); Ș. g. 4 cl. VI Chirileasa Loredana (68), Popescu Yohanna (80); Ș. g. 27 cl. V Brînză Elena Crina (78); Șelaru Steluța (60), cl. VI Poițelea Marius (166); Ș. g. 28 cl. V Ivan Beatris-Ana (110), Leonte Cătălin (80), cl. VI Miron Irina (80); fără școală cl. VIII Pascan Gabriel (80); **PITEȘTI** (ARGEȘ) Ș. g. 1 cl. IV Braniște Mihail (1110), Ș. g. 8 Necula Lavinia (60); Ș. g. 9 cl. VI Stan Octavian (173); Ș. g. 13 cl. V Andruță Sorin (45), Botofei Florina (58), Ciotir Daniela (21), Duminică Oana (50), Marin Gabriela Roxana (51), Neguț Florina (60), Olteanu Maria (59), Popescu Gheorghe (60), Zarioiu Alin-Marian (112); Ș. g. 15 cl. VII Popescu Adrian Liviu (210); Ș. g. 16 cl. IV Ivan Nadia Loredana (150), cl. V Mirescu Marian (30); **PÎRSCOV** (BUZĂU) Dinu Iuliu (80); **PLOIEȘTI** (PRAHOVA) Ș. g. 3 cl. VI Boloangă Claudia (45), cl. VII Zidaru Cristian (100), cl. VIII Mante Simone (100); Ș. g. 10 cl. VI Cîrtoaje Cristian (172), cl. VIII Chioașcă Margareta (110); Ș. g. 14 cl. V Cașu Ileana Constanța (110); Ș. g. 20 cl. VI Aron Alina Cristina (80), Bucurică Cristian (100), Butan Cristina (88), Copanu Paula (70), Cristea Eduard (75), Ilie Ana-Maria Iuliana (80), Măhărăscu Roxana (85), Soare Adriana Daniela (100) Ș. g. 24 Victoria Gabriel (200); Ș. g. 26 cl. V Burdun Constantin (90), Dumitru Bogdan (90), Popescu Raluca (90), Rușinescu Adrian (80), Voinea Raluca (78), Stan Laura (75), cl. VI Abredean Zenaida Maria (58), Dinu Tiberiu (220); Ș. g. 28 cl. V Bunea Ionuț (87), Dumitrescu Gabriel (70); fără mențiune de școală cl. VI Vornicu Daniela (73), cl. VII Iacob Giliola (95), cl. VII Podeanu Elena (87), Lupu Denis (100); **PLOPENI** (PRAHOVA) cl. VI Stoica Florentina (18); **POIANA** (DÎMBOVIȚA) Ș. g. cl. V Croitoru Virginia (60), Gheorghe Irina Arabella (58), Gheorghe Irina Arabella (110), Vameșu Rodica (58); **POIANA CÎMPINA** (PRAHOVA) cl. VI Vâlcu Bogdan (150); **POIENARII BURCHII** (PRAHOVA) cl. V Giony Șerban (141); **PREDEAL** (BRAȘOV) Lic. ind. cl. VI Pintea Ovidiu (250); **PRIGOR** (CARAȘ-SEVERIN) Ș. g. cl. V Burac Maria (60); **PRUNDENI** (VÎLCEA) cl. V Chelărescu Simona (100), Niță Camelia (90), cl. VII Răducu Mihaela Alina (110), cl. VIII Gheorghe Marius (150), Niță Liviu (140); **PUCNENI** (DÎMBOVIȚA) Ș. g. cl. VI Nedelcu Viorel (60);

RĂDĂUȚI (SUCEAVA) Ș. g. 3 cl. VI Păpușoi Adrian (80), cl. VIII Herman Mihaela (110); **REGHIN** (MUREȘ) Ș. g. 5 cl. V Studie Valentin (182); **REȘIȚA** (CARAȘ-SEVERIN) Lic. mat. fiz. cl. XI Pan Florin (109); **RÎȘNOV** (BRAȘOV) Ș. g. 2 cl. V Lupu Alexandru (90); Ș. g. 4 cl. V Gina Anișoara (105), Ș. g. 5 cl. V Constantin Cristian (80), Baciu Valentin (76), Merișoiu Geanina Nicoleta (80), Tudor Iulia Aniela (80); **RÎMNICU VÎLCEA** (VÎLCEA) Ș. g. 1 cl. V Ciobanu Adina (77); Zaharia Florin (80); Ș. g. 2 cl. V Căpitan Narcisa (43), Dumitrescu Anda (26), Trifa Lucian (20); Ș. g. 7 cl. V Olescu Corina (30); Lic. ind. 1 cl. VII Popescu Ioana (78); Lic. ind. 2 cl. II Cismaru Mihai Andrei (50); Lic. ind. 7 cl. VI Ichim Daniela (120), cl. VI Rarinca Justina (80), cl. VII Popescu Alice Roxana (90); Lic. „N. Bălcescu" cl. VII Ionescu Marius (104), Radu Vasilica (82), cl. IX Petre Simona-Maria (82), **RONA DE SUS** (MARAMUREȘ) Ș. g. cl. IV Orișanu Alexandra (50); **ROȘIORII DE VEDE** (TELEORMAN) Ș. g. 1 cl. VI Bratu Nicușor (115); **ROMAN** (NEAMȚ) Ș. g. 3 cl. VII Anghel Simona Elena (80); Ș. g. 11 cl. VI Azamfiri Gabriela (80), Bucicovschi Oana (79), Dinu Iosif (120), cl. VII Bălăuță Mihaela Geanina (90), Hulpoi Cătălin (80), Turcu Gabriela (245);

SATU MARE (SATU MARE) Ș. g. 6 cl. V Ludasz Arsalya (100), Năsui Nadia (70), cl. VI Moldovan Laura (60); Lic. ind. 6 cl. V Bandula Mihaela (85), Donca Diana (60), Simca Mirela (110); Lic. „M. Eminescu" cl. IX Rojea Sorin (118); **SĂCEL** (MARAMUREȘ) Ș. g. cl. VI Bizău Ioana (60), Mihali Claudia Aurica (60), cl. VIII Magdău Lăcrămioara (90), Poteraşu Simona (111); **SĂPATA DE SUS** (ARGEȘ) Ș. g. cl. V Stanciu Laurențiu (30); **SĂRMAȘU** (MUREȘ) Ș. g. cl. VI Andrași Bogdana Terezia (78); **SEBIȘ** (ARAD) Ș. g. cl. VI Ionuțaș Nina (70), Tabuia Sofia (60); **SIBIU** (SIBIU) Lic. mat. fiz. 1 cl. IX Tritean Sanda (80); Lic. „Gh. Lazăr" cl. IX Dancu Zoița-Lucreția (100), Drăgan Ovidiu (36), Neață Valentin (110), Oprea Cosmina (100), Orlea Sina Lucia (80), cl. XI Comaniciu Anca (130), Dobroș Liliana (120), Dragosim Adela (100), Drâmbărean Mirela (120), Lupe Simona (110), Mașca Simona (120), Nicolae Marius (130), Răulea Gabriela (130), Solomon Claudia (107), Vlad Mirela (108), cl. XII Murescu Aurel (108), Oancea Marius (180); **SIGHETUL MARMAȚIEI** (MARAMUREȘ) Ș. g. 2 Ialoș Cristina Stela (40); **SILIȘTEA** (TELEORMAN) Ș. g. Vița Cristi (73); **SÎRBEȘTI** (GORJ) Ș. g. cl. V Rădulea Bogdan (60), Ruxandra Aurelia (78), cl. VI Baroș Ion (80), Bodescu Ana Maria (45), Zavaski Maria (50); **SLATINA (OLT)** Ș. g. 3 cl. V

Scanned with OKEN Scanner

Marin Irina (54), Moldoveanu Mihaela (90), Mândache Mirela (50), cl. VI Neacșu Cristina (60); Ș. g. 5 cl. VII Mitreanu Bogdan (98); Ș. g. 8 cl. II Dumitrescu Luiza (50), cl. IV Vâlcea Nicoleta (140), cl. V Dohan Robert (89), Drigă Adrian (90), Ene Angela (118), Lungu Eugen (110), Păun Nicoleta (110), Preda Ion Viorel (110), Ștefănescu Alin (100), Tănase Nicoleta (100), cl. VI Agheniței Adrian (170), Dobre Dan (120), Mladin Claudia (150), Șerban Viorel (108); Ș. g. 10 cl. V Alexandru Cosmin (60), cl. VI Răduț Mihaela (90); **SLEANDA** (SĂLAJ) Ș. g. cl. VI Terec Alin (95); **SLOBOZIA** (IALOMIȚA) Ș. g. 7 Stoica Victorița (195); **STEIEERDORF** (CARAȘ-SEVERIN) Ș. g. 2 cl. VIII Boboescu Cornel (100), Lerch Iohan (90); **STOINA** (GORJ) Ș. g. cl. VI Ionescu Cristina (90); **STRAUANE-MUNCELU** (VRANCEA) Ș. g. cl. VI Dragomir Gabriel (60); **STREHAIA** (MEHEDINȚI) Ș. g. cl. V Dănciulescu Dorina Alina (100); Lic. ind. cl. X Jianu Anca (150); **SUCEAVA** (SUCEAVA) Ș. g. 3 cl. VI Grozavu Cezar (100), Mircea Dragoș Iulian (185), cl. VII Turcanu Christian (80); Ș. g. 4 cl. VI Stan Daniel Vasea (50); Ș. g. 5 cl. VII Burlacu Oliviu (28); **ȘIMLEU-SILVANIEI** (MARAMUREȘ) Ș. g. 2 cl. VI Nagy Andrei (150); Ș. g. 1 cl. V Ardelean Adriana (87), Mikola Andrea (100), Pop Arturo (89); Ș. g. 2 cl. V Bărar Vasile (100), Baster Otilia (120), Gutu Alina (100), Trif Sorin (100), cl. VI Racolte Ovidiu (80), cl. VIII Lazăr Livia (100); **ȘOMCUȚA MARE** (MARAMUREȘ) Ș. g. cl. V Luca Florina Mirela (230), Matei Mariana (60), Naghi Rodica (170), cl. VI Ardelean Crina (270), Dod Vivian (228), Dragoș Daniela (120), Frenț Dănuț (210), Gherman Ligia (130), Ilieș Carolina (237), Grobei Gabriel (105), Marc Melinde (301), Micu Cosmin (100), Mureșan Mihaela (110), Oprite Cristian (90), Popa Gabriel (130), cl. VII Asoftei Adina (250), Cosmuțe Maria (250), Muntean Sanda (197), Prună Ioan Dorin (130), Prună Ștefan Paul (230); **ȘTEFAN CEL MARE** (ARGEȘ) Ș. g. cl. IV Vidan Diana (50); **ȘTEFAN CEL MARE** (CĂLĂRAȘI) Ș. g. cl. VII Rianu Florentina (136), Vasilescu Emil (48), Zahiu Vasile (60), cl. VIII Fianu Leonard (140), Marin Nicolae (70), Simion Georgeta (32);

ȚARALUNGENI (BRAȘOV) Ș. g. cl. VII Creangă Bianca (50); **TECUCI** (GALAȚI) Ș. g. 2 cl. IV Iftimie Simone (150); Ș. g. 5 cl. V Luca Viorica (90), Tălmaciu Cornelia (65); Ș. g. 8 cl. V Borș Viorel (90); Ș. g. 10. cl. III Ifrim Gugi (30), cl. V Bulgaru Cristian (80), Manea Ciprian (80), Mitrofan Cristina (80), Rotaru Roxana (80), Tălmaciu Magdalena (40), cl. IV Deliu Marcela (80), Stănculescu Jenica (120), cl. VII Capotă Ionuți (60), Manole Cătălin (101); **TIMIȘOARA** (TIMIȘ) Ș. g. 6 cl. IV Broda Gabriela (55), cl. VI Purja Marius (70); Ș. g. 7 cl. VI Pateanu Paula (100), Vrămiantu Anca (78); Ș. g. 19 cl. VI Marcu Corneliu (80); Ș. g. 27 cl. III Valea Alina (57); Lic. „C. D. Loga" cl. XII Boșcu Dan (240); **TITU** (DÎMBOVIȚA) Ș. g. cl. VI Constantin Mihaela (75); **TIGVENI** (ARGEȘ) Ș. g. cl. V Pleșițe Ion (80), cl. VII Corocaru Mihai (60); **TÎRGOVIȘTE** (DÎMBOVIȚA) Ș. g. 2 cl. V Bolbose Anca (100); Ș. g. 5 cl. V Luca Ruxandra (120), Popescu Ciprian (83), Romanașcu Ștefănuț (99), cl. VI Drogoreanu Domnițe (50); **TÎRGU BUJOR** (GALAȚI) Ș. g. 2 cl. V Aprodu Ana-Maria (98), Carp Simona (100); **TÎRGU JIU** (GORJ) Ș. g. 12 cl. III Cociu Cristian (80), cl. VIII Toma Ovidiu (80); **TÎRGU MUREȘ** (MUREȘ) Ș. g. 14 cl. VI Popovici Elena (30), Suciu Simona (100), Călugăr Lucian (53); Ș. g. 15 Costea Vasile (70), Radu Sofia (80), Sabău Corina (83); **TÎRGU NEAMȚ** (NEAMȚ) Ș. g. 3 cl. VI Humulescu Ana-Laura (160), Tănăsescu Anca (110); **TOPLIȚA** (HARGHITA) Ș g. 4 cl. VIII Butyka Mugurel (240); **TULCEA** (TULCEA) Ș. g. 4 cl. V Dorache Adrian (110); S. g. 10 cl. VI Boldea Arina (120); **TURDA** (CLUJ) Ș. g. 7 cl. VI. Mureșan Ioana (90); **TURNU MĂGURELE** (MEHEDINȚI) Ș. g. 5 cl. VI Ichim Ana-Maria (99); **TURNU SEVERIN** (MEHEDINȚI) Ș. g. 9 cl. V Simion Irina (70);

VADURI (NEAMȚ) Ș. g. cl. V Poboroniuc Violeta (79), cl. VII Bejan Mihaela (30), Ghiureș Domnica (32), Iftimie Valentina (87), Vamanu Mihaela (50); **VALEA DANULUI** (ARGEȘ) Ș. g. cl. VII Ioniță Larisa (60); **VALEA LUPULUI** (IAȘI) Ș. g. cl. VII Ababei Daniel (105), Etcu Elena (80); **VALEA LUI MIHAI** (BIHOR) Ș. g. cl. VII Derșidan Cristian (180); **VASLUI** (VASLUI) Ș. g. 5 cl. VII Solomon Sandu (100), cl. VIII Jomir Constantin (108), Ș. g. 6 cl. V Adam Laura (73), Axinte Violeta (70), Bălău Dumitru (94), Beantonie Adrian (80), Bunescu Irinela (88), Chircă Paul (110), Chiriac Dan (70), Cimpeanu Carmen (100), Escanu Carmen (70), Filip Laurențiu (86), Florea Adrian (80), Grosu Carmen (78), Haraga Simona (164), Horduna Luiza (140), Iancu Mihaela (175), Larion Sonia (70), Marincea Ioan (60), Moișanu Adina (68), Moișanu Sorin-Iurin (80), Pîndaru Mihaela (80), Pop Bejan Ioan (120), Sava Florentina (65); **VĂLENII DE MUNTE** (PRAHOVA) Ș. g. 3 cl. IV Dumitrache Cornelia (130); **VIIȘOARA** (NEAMȚ) Ș. g. Vaduri cl. VII Curcan Violeta; **VIȘINEȘTI** (DÎMBOVIȚA) Ș. g. cl. III Codreanu Diana (52); **VÎLCĂNEȘTI** (PRAHOVA) Ș. g. cl. III Dumitrache Răzvan (70); **VÎNĂTORI** (NEAMȚ) Ș. g. 1 cl. V Zumulescu Ana-Maria (140); Ursachi Gianina (110); **VORONA** (BOTOȘANI) Ș. g. cl. V Burlacu Felicia (74), cl. VI Ivasiuc Ciprian (80); **VORONA MARE** (BOTOȘANI) Ș. g. 1 cl. VI Pinteală Vasile (80), cl. VII Achelăriței Elena (89), Ștefan Elena (80); **VULCAN** (HUNEDOARA) Ș. g. 5 cl. V Afumatu Ionela (765), Badea Alin (80), Imling Meda Alesia (70), Nireștean Luminița (90); Ș. g. 6 cl. VI Becuș Ramona (130), Dobrotă Elena (123), Mușat Maria-Elena (88), Plic Elena (170), Ungur Mihaela (150).

Scanned with OKEN Scanner

BACĂU Ş. g. 16 cl. VI Iasileovschi Geanina (99); cl. VIII Cojocaru Daniela (50); Ş.g. 18 cl. V Roşca Codruţa (130); Ş.g. 19 cl. VI Goia Irina (100), Pricopie Oana (80), Pruteanu Cristian (70), Zamfirescu Loredana (13). **BĂILE HERCULANE** (CARAŞ—SEVERIN) Ş. g. cl. VI Darac Diana (112). **BEIUŞ** (BIHOR) Lic. „Samuil Vulcan" cl. V Heredea Gina (92), cl. VIII Leucuţa Mioara (91). **BISTRIŢA** (BISTRIŢA—NĂSĂUD) Lic. ind. cl. IX Acu Liana (183). **BOTOŞANI** Ş. g. 7 cl. V Samoilă Laura (55), cl. VI Boicu Cristian (65), Cojocaru Stela (56), Ilaş Adina (60); Ş. g. 8 cl. V Cotruţă Robert (130); Ş. g. 12 cl. V Petruc Gabriel (100); Ş. g. 13 cl. VI Munteanu Eliza (100). **BRAŞOV** Ş. g. 5 cl. V Pop Anca (80), cl. VI Suciu Claudia (60), cl. VIII Gutunoi Ioana (60), Mîndruţă Cristina (50), Păvălucă Monica (30); Ş. g. 7 cl. V Botescu Cătălin (40), Marin Irina (20), Mânzariu Olivia (30), Tomas Lucian (30). **BRĂILA** Ş. g. 5 cl. V Catrina Daniela (60); Ş. g. 7 cl. V Vatră Cosmin Ştefan (90); Ş. g. 23 cl. VII Ghionu Adriana (105), Nicolaidis Afrodita (112), Şerban Viorica (64); Ş. g. 31 cl. V Grosu Mariana (130), Matei Corina (140), Ruşescu Răzvan (125), Stan Emil (140), Voicu Roxana (170), cl. VI Petrea Brîndușa (190), Stoian Roxana (180); Lic. „Gh. M. Murgoci" cl. X Candrea Iuliana (109); Lic. ind. 5 cl. VII Rădulescu Horaţiu (172); Lic. ind. „Progresul" cl. XIII Alexandru Dan (120), Neica Manuela (90). **BREZOI** (VÎLCEA) Ş. g. cl. V Ghiţescu Elena (105), cl. VI Tudosie Ana (96). **BUCUREŞTI** Ş. g. 1 cl. V Paven Horia (150); Ş. g. 5 cl. VII Stanciu Nicolae (156); Ş. g. 49 cl. II Calude Andreea (120); Ş. g. 70 cl. V Nica Narcis (100); cl. VI Ionescu Ioana (107), Mincic Bogdan (100); Ş. g. 97 cl. VI Lucaciu Cristinel (150); Ş. g. 89 cl. VI Ionescu Marius (70); Ş. g. 117 cl. V Tabarcea Ion (115); Ş. g. 142 cl. V Ibram Maria (60); Ş. g. 156 cl. V Trăistaru Daniela (50), Tanu Valentina (70); Ş. g. 206 cl. VIII Mihai Cristian (60); Lic. Mat.—fiz. 3 cl. IX Hera Ruxandra (36), cl. XI Popescu Cezar (72); Lic. ind. 36 cl. IX Leu Dragoş (117); Lic. ind. „I. L. Caragiale" cl. IX Iacob Simona (95), Mautu Adrian (40), Mângaţă Corina (55), Mihăilă Daniela (74), Zdorovetchi Cristina (100), cl. X Bobia Luminiţa (80). **BUNTEŞTI** (BIHOR) Ş. g. cl. VI Mateaş Remus (120). **BUZĂU** (BUZĂU) Ş. g. cl. VIII Rotărescu Ecaterina (40).

CĂLĂRAŞI (CĂLĂRAŞI) Ş. g. 1 cl. VII Bologan Adina (90), Naun Lenuţa (90), fără clasă specificată; Negreanu Ruxandra (100); Ş. g. 5 cl. VI Oprea Nicoleta (102), Vişan Petruţa (180), cl. VII Vlăsceanu Mihaela Suzi (95), Zăman Costel (210), fără clasă specificată Breazu Daciana (150); fără şcoală specificată cl. VI Ştefan Violeta (100). **CĂLINEŞTI** (MARAMUREŞ) Ş. g. cu cl. I—X cl. V Godja Ştefan (87), Tudoran Ioana-Pălăguţa (90), **CAPU CODRULUI** (SUCEAVA) Ş. g. cl. V Oanea Paraschiva (110), Vaman Olga (117). **CARACAL** (OLT) Ş. g. 3 cl. VIII Buzatu Paula (100); Ş. g. 5 cl. VIII Jianu Anca (40); Ş. g. 6 cl. V Ionică Mihăiţă Cristinel (120); Ş. g. 7 cl. V Ioniţă Dana Simona (50); fără şcoală specificată cl. VI Cismaru Claudia (58). **CARANSEBEŞ** (CARAŞ—SEVERIN) Ş. g. 2 cl. V Grumeanţu Anelore-Maria (70), cl. VI Iurcec Fleming (70); Lic. pedagogic cl. V Barac Lavinia (26), Dulcă Laura (40), Seracin Andreea (50), Turnea Loredana (60). **CĂŞEIU** (CLUJ) Ş. g. cl. VI Bolodor Paula (108), Groşan Daniel (108); fără cl. specificată Bujor Claudia (205). **CEAMURLIA DE SUS** (TULCEA) Ş. g. cl. VII Pelican Tanţa (130). **CERNAVODĂ** (CONSTANŢA) Ş. g. 2 cl. V Pintilie Laura Nicoleta (110). **CIMPINA** (PRAHOVA) Ş. g. 8 cl. VIII Căciulă Olivia (100); fără şcoală specificată cl. V Ioniţă Claudia (80). **CIMPULUNG** (ARGEŞ) Ş. g. 7 cl. V Măgeanu Noris (95). **CIMPULUNG-MOLDOVENESC** (SUCEAVA) Ş. g. 3 cl. VI Bogoş Liviu (90), Sutea Marius (120), cl. VII Ungureanu Cristian (62).

CIMPULUNG-MUSCEL (ARGEŞ) Ş. g. 5 cl. VII Enache Carmen (70), Nichifor Dragoş (70), Peşet Gabriela-Andreea (120); Ş. g. 7 cl. V Banu Bogdan-Marcel (74), Muşatescu Marian Alin (49); Lic. ind. 3 cl. IX Stănică Daniel (90). **CLUJ-NAPOCA** (CLUJ) Ş. g. 6 cl. VI Rotaru-Herţea Oana (80); Ş. g. 21 cl. V Funar George Sabin (20); Ş. g. 23 cl. IV Silaghi Ioana (90); Lic. mat.-fiz. 2 cl. IX Rusu Radu (65), fără cl. specificată Boier Ioana Maria (60). **CONSTANŢA** (CONSTANŢA) Ş. g. 2 cl. V Demir Emil (30); Ş. g. 30 cl. VI Nenciu Adina-Lorelei (30); Ş.g. 32 cl. V Manole Adrian (50); Ş. g. 38 cl. VII Negulescu Alina (90); fără şcoală specificată cl. V Manole Adrian (79). **CORABIA** (OLT) Ş. g. 3 cl. V Mărghidan Radu (120). **CORBU** (HARGHITA) Ş. g. 1 cl. V Băciuc Camelia (90), Buzilă Mariana (80), Balmoş Lucreţia (90), Goia Mariana (90), Mocanu Adelina (80), Rusu Sabina (90), Tepeş Focşa Romeo (90), Zaiţ Constantin Florin (90), cl. VI Drugă Petrică (90), fără cl. specificată Bălan Ionel (89). **COSTEŞTI** (ARGEŞ) Ş. g. cl. VI Coman Crenguţa (98), Fedorat Camelia (100), Iordache Ionel (46), Popescu Adina (96), Tănase Nicoleta Tatiana (99). **COSTEŞTI** (VÎLCEA) Ş. g. cl. V Crăcană Narcisa (170), Duţă Despina (103). **COTEANA** (OLT) Ş. g. cl. VI Bold Mariana (88). **CRAIOVA** (DOLJ) Ş. g. 2 cl. V Coman George (20); Ş. g. 11 cl. VI Buzatu Gabi (100), Dovlete Olimpia (100), Ionică Aurelia (100), Oprea Lucian (100); Ş. g. 18 cl. VI Jerdoiu Cătălin Ion (6g., Savu Alexandru (60); Ş. g. 19 fără clasă specificată Popescu Cecilia Carmen (80); Ş. 21 cl. VI Micu Cezar (92), cl. VIII Teodorescu Dan (29); Ş. g. 31 cl. V Iordache Anda-Camelia (314), fără clasă specificată Dina Elmira Cezarina (38); Ş. g. 35 cl. VIII Buricea Maria-Mihaela (90); Ş. g. 37 cl. V Cană Nicuşor (98); fără şcoală specificată cl. VI Crăciunescu Radu (122), Marcu Emil (80). **CRIVINA-BURILA MARE** (MEHEDINŢI) Ş. g. Crivina cl. V Fulga Nicolae Constantin (118). **CUGIR** (ALBA) Ş. g. 2 cl. VI

Scanned with OKEN Scanner

Borza Bianca (38), Patachi Roxana (270). **CURTEA** (TIMIŞ) Ş. g. cl. V Cosma Iuliana (75). **CURTEA DE ARGEŞ** (ARGEŞ) Ş. g. 1 cl. V Armeanu Daniel (80); Ş. g. 3 cl. V Cristea Ionică (80) cl. VII Duţeanu Narcis Mihai (160); Ş. g. 4 cl. VI Urda Mihai (135); Ş. g. 5 cl. VII Bulac Adrian Ion (89); Ş. g. 6 cl. V Mihăiescu Diana (148), fără cl. specificată Păun, Mădălina (90). **CUZDRIOARA** (CLUJ) Ş. g. cl. VII Păltineanu Octavian (77).

GALAŢI (GALAŢI) Ş. g. 2 cl. IV Bulgaru Cristian-Marius (19), cl. VI Cheşcă Alina-Beatrice (50), Coman Aurelia (100), Lupu Nicoleta (105), Nechifor Cătălin (130); Ş. g. 5 cl. V Hătăşag Simona (80); Ş. g. 6 cl. VII Florescu Petrişor (100); Ş. g. 9 cl. V Levcovici Cristian (90), Moscu Viorel (88); Ş. g. 10 cl. V Constantin Mirela (103), cl. VI Amariei Rodica (80), Rădulescu Laura (80), Tilihoi Cristian (130), Vasiliu Marinela (170), Visalan Monica (100); Ş. g. 11 cl. VIII Coman Ciprian (20); Ş. g. 24 cl. V Bodeanu George (120), Mantale Raluca (112), Tasu George (56); Ş. g. 25 cl. V Iorga Emil-Răzvan (100), cl. VI Ilie Monica (150), Iurea Corina (140), Scarlat Gianina (110), cl. VIII Toma Cristian (90); Ş. g. 26 cl. VI Porneală Cristian (100); Ş. g. 27 cl. V Boghian Maria (53); Ş. g. 28 cl. V Bamboi Roxana-Raluca (87), Bujoreanu Aurelia (87), Herda Paul (90), Modiga Odeta (200), Moscovici Fabian (80), Munteanu Adrian (80), Stoica Oana (90), cl. VI Andone Carmen Iuliana (110), Astafi Ioan (120), Burghelea Teodor (160), cl. VII Andrei Adrian (160), cl. VIII Darie Dragoş (130), Lungu Mariana (80), Veliche Razvan (180); Ş. g. 31 cl. VII Hristea Dorina (80); Ş. g. 33 cl. VI Buhuş Elena (60), Chiriac Iulian (61), Cozma Lucia (100), Dima Paul-Aurelian (80), Iordache Bogdan-Stelian (100), Lazăr Cristina (92), Năfureanu Oana (90), Nechilciuc Sofia (60), Roibu Mihaela (100), Trifan Valentin (120), Tudose Cerasela (88); Ş. g. 38 cl. V Sîrbu Mircla (95), cl. VI Moraru Radu Cristian (98); Ş. g. 40 cl. VI Carp Camelia (120); Ş. g. 42 cl. VI Liacu Despina (100), cl. VII Balcanu Magdalena (90). **GALICEA** (VÎLCEA) Ş. g. cl. VI Dragomir Iuliana (55). **GĂIEŞTI** (DÎMBOVIŢA) Ş. g. 6 cl. V Velicescu Sorina (110); Ş. g. 28 cl. VI Mirea Georgiana (120). **GĂTAIA** (TIMIŞ) Ş. g. cl. VII Ceaciru Liliana (102). **GAUJANI** (GIURGIU) Ş. g. cl. VI Frîncu Florin (90), Velicu Diana (90). **GÎRBOVA** (ALBA) Ş. g. cl. V Mocan Sebastiana-Diana (80). **GHEORGHE GHEORGHIU-DEJ** (BACĂU) Ş. g. 5 cl. V Marin Otilia (78); Ş. g. 8 cl. V Barbu Daniela (198), Bortun Manuela (178), Gartea Emil (23), Sandu Anişoara (150), cl. VI Bogdan Alina (170); Ş. g. 10 cl. VI Zaharia Roxana (80).

MĂGURELE (PRAHOVA) Ş. g. cl. V Alexandreşcu Dan-Marian (60). **MĂRĂŞEŞTI** (VRANCEA) Ş. g. 2 cl. IV Andriescu Raluca (149), Beraru Monica (224), Cernea Mihaela (230), Chiriţă Daniela (186), Ciobanu George (190), Cojocaru Lidia (232), Popescu Marian (180), Ungureanu Daniel (133). **MĂURENI** (CARAŞ—SEVERIN) Ş. g. cl. V Boncza Ovidiu Andrei (80), Stoian Laureana (40). **MEDIAŞ** (SIBIU) Ş. g. 5 cl. VII Chiş Mihai (131); Lic. „Axente Sever" cl. IX Drăghici Simona (22). **METEŞ** (ALBA) Ş. g. cl. X Monea Adina (44), Popa Felicia Florina (111). **MIERLEŞTI** (OLT) Ş. g. cl. VII Voicu Constantina (90). **MIRŞID** (SĂLAJ) Ş. g. cl. VII Nemeş Florin (110), Tuns Cosmin (110). **MIZIL** (PRAHOVA) Ş. g 2 cl. VI Dumitru Marius (110), Paraschivescu Monica (100), Taşcă Angela (100). **MOINEŞTI** (BACĂU) Ş. g. 1 cl. VII Ghineţ Marta (20), Lungu Cristina-Elena (70), Palade Beatrice-Maria (140), Parapancea Silviu (75), Radu Codruţa Nicoleta (80). **MORENI** (DÎMBOVIŢA) Ş. g. 4 cl. VI Florea Iulian-Daniel (510), Gavrilă Mihai (480), Ionescu Laura (400), Ivan Iuliana (120), Minoiu Ioana (510), cl. VII Badeanu Răzvan (117), Ghiţă Ioana-Florentina (160), Marinescu Mariana (123). **MOTRU** (GORJ) Ş. g. 1 cl. V Balabuc Lucian (60), Grecu Dragoş (80), cl. VI Paicu Marius (112), Udrişte Mihaela (104); Ş. g. 2 cl. V Andronie Adelina (80), Bacoveanu Yvonne (73), Ciucă Daniela (87), Cojocaru Nicoleta (78), Grecu Mirela (56), Ivan Marian (168), Jianu Paula (116), Vînătoru Raluca (158); Lic. ind. cl. X Aryoca N. Camelia (144), Baloniu Dana (144), Burtea Cristina (120), Chisega Ciprian-Gabriel (108), Ciurea Ema (144), Duicu-Alina (144). **MOVILENI** (GALAŢI) Ş. g. 1 cl. VI Manolache Geta (110), Mîndrescu Violeta (110), Moldoveanu Mircea (110), Rădăcină Maricela (150), Sonu Mihaela (100). **MUNCELU** (VRANCEA) Ş. g. cl. IV Barău Vasilica (105), Hupca Lăcrămioara (110), Manolache Lăcrămioara (96).

RĂDĂUŢI (SUCEAVA) Ş. g. 3 cl. VII Potîrniche Liviu (86), cl. VIII Archeliuc Cristina (80), Herman Mihaela (90); Ş. g. 5 cl. VII Chiriluic Angelica (100). **REŞIŢA** (CARAŞ-SEVERIN) Ş. g. 1 cl. VI Vida Dorina (130). **RETEAG** (BISTRIŢA-NĂSĂUD) Ş. g. cl. VI Pop Cristian (90), cl. VII Jula Narcisa (99). **RIMNICU SĂRAT** (BUZĂU) Ş. g. 1 cl. V Lăzărescu Dragoş (80), cl. VI Alionte Olliveta-Elena (219), Dumitru Dana (87); Ş. g. 5 cl. V Dascălu Carmen (63). **RIMNICU VILCEA** (VÎLCEA) Ş. g. 1 cl. VII Matei Raluca (80); Lic. ind. 7 cl. V Bratu Sorin (90), cl. VI Bălan Camelia (20), Oprea Ovidiu (80), cl. VII Constantinescu Maria-Cristina (59), Popescu Claudia (30), Pupăză Adriana (40); Lic. „Nicolae Bălcescu" cl. VII Ionescu Marius (120). **RIŞNOV** (BRAŞOV) Ş. g. 2 cl. V Dezsö Ilanka (88). **RODINI** (MEHEDINŢI) Ş. g. cl. VI Roată Ion (115). **ROMAN** (NEAMŢ) Ş. g. 3 cl. VI Michui Ioana (55), Tălămbă Ingrid-Simona (153); Ş. g. 7 cl. VI Smit Mădălina (80); Ş. g. 11 cl. VI Calezaru Ciprian (80), Ciobanu Daniel (72), Enache Adrian (100), Gormicu Simona (80), Ungureanu Carmen (70), cl. VII Bălăuţă Mihaela Geanina (150), Lupaş Irina-Ştefania (130), cl. VIII Fareaş Irina (80). **ROŞIA MONTANA** (ALBA) Ş. g. cl. V Mera Nicolae Severian (60). **ROŞIORII**

Scanned with OKEN Scanner

DE VEDE (TELEORMAN) Ş. g. 3 cl. VI Dumitru Ginel (40); Ş. g. 4 cl. VI Durleşteanu Denisa (110).

SATU MARE (SATU MARE) Ş. g. 2 cl. VI Foruşa Călin (100); Ş. g. 14 cl. V Balea Mirona (120), Turczi Monica (120), Zavedei Angelica (110), cl. VI Dărăluş Delia (157), Mihaela (120), Faur Marcel (80), Iedhan Dumitru (120), Horvath Daniela (160), Pop Octavian (77), Silaghi Maria (150), Turczi Monica (357); Lic. ind. 6 cl. V Kurtinecz Milena (90), Moraru Elena (68), Tuţuraş Cosmin (142), cl. VI Ardelean Adela (110), Baciu Tania (270), Bercea Amalia (120), Kurtinecz Milona (180), Naghi Ramona (125); Lic. „M. Eminescu" cl. IX Oros Eugen (260), Pop Marius (137), Rotea Sorin (90), Tertan Adriana (24). **SĂPATA DE SUS** (ARGEŞ) Ş. g. cl. V Dragomir Maria (64). **SEBEŞ** (ALBA) Ş. g. 2 cl. VII Besoiu Adrian (150), Besoiu Corina (151). **SEBIŞ** (ARAD) Ş. g. cl. VII Condrea Rovin (75). **SF. GHEORGHE** (COVASNA) Lic. mat.-fiz. cl. VI Bordea Florin (80), Sandu Florin (78), Vlad Cristina (78), cl. VII Roşu Valentina (82); Lic. ind. 2 cl VI Danciu Claudia (110). **SIBIU** (SIBIU) Ş. g. 2 cl. VII Tritean da (20); Ş. g. 5 cl. V Alex. Bogdan (150); Ş. g. 12 cl. V Macu Cristina (110); Ş. g. 15 II Medisiu Simona (97); Lic. mat.-fiz. „Gh. Lazăr" cl. IX Herbea Daniela (90), Pavel ana (156). **SILAVEU** (IALOMIŢA) Ş. g. cl. VI Simion Liliana (115). **SIRET** (SUCEAVA) Ş.g. cl. VI Morariu Iuliana (100). **SINAIA** (PRAHOVA) Ş. g. 2 cl. V Roşu Emilia (70). **SINEŞTI** (IAŞI) Ş. g. cl. VI Barbălată Oana (76), Cristea Petronela (76). **SINMARTIN** (ARAD) Ş. g. cl. VI Hotz Gabriela (20). **SÎNNICOLAUL MARE** (Timiş) Ş. g. 2 cl. VII Sorescu Cătălin (78). **SÎRBEŞTI** (Gorj) Ş. g. cl. V Crudiu Daniela (29), Dragu Romelia (39), Lăzărescu Marius (50), cl. VII Stoichiţă Maria (39). **SLATINA** (Olt) Ş. g. 4 cl. V Pătraşcu Dalia (66), Pătraşcu Cristina (40), Rada Cristian (86); Ş. g. 5 cl. V Lulescu Adina (85), cl. VIII Dumitru Marian (260); Ş. g. 8 cl. V Dumitrache Lucia (80), Olteanu Carmen (79); Ş. g. 10 cl. VI Rădu Mihaela (20); Lic. „Ion Minulescu" cl. VI Morărescu Irinel (100), Stancu Mihaela (30). **SOMCUŢA MARE** (MARAMUREŞ) Ş. g. cl. V Ştefan Prună (70). **SUCEAVA** (SUCEAVA) Ş. g. 1 cl. V Croitor Luminiţa (20), cl. VI Martiniuc Tiberiu (90); Ş. g. 3 cl. VI Burlacu Adrian (106), Iacobeanu Teodora (100), Mirea Raluca (140), Poşaştiuc Oana (40), Suciuc Lavinia (190), cl. VII Isaic Cristi (100), cl. IX Norbah Silviu (150); Ş. g. 8 cl. V Costea Marius (89).

TECUCI (GALAŢI) Ş. g. 1 cl. V Bulgaru Bogdan Adrian (80); Ş. g. 2 cl. VI Buzatu Mariana (115), Dămăceanu Florentina (100), Gîrleanu Ştefan (96), Istrate Dumitru (90), Motoiu Margareta (50), Pohrib Florica (90), Voinea Daniela (92), cl. VII Nicu Dan-Gabriel (100); fără menţiune de clasă: Alexe Mihai (20), Roşu Mariana (108), Şerban Cristian (80); Ş. g. 5 cl. VII Blehoeanu Liliana (80), Pavel Radu Iorgu (90), Popa Lavinia (50); Ş. g. 8 cl. V Borş Viorel-Cristinel (108), cl. VI Deliu Marcela (90), Mocanu Octavian (50), Oriţă Ovidiu (90), cl. VII Boşneaga Lorena (20), Capotă Ionuţ (30); Ş. g. 10 cl. VII David Geanina (10). **TEIŞ** (DÎMBOVIŢA) Ş. g. cl. VI Năstase Cristina (90). **TIMIŞOARA** Ş. g. 6 cl. VI Crăsteţi Minodora (78); Ş. g. 10 cl. V Almăşan Alina (100), Belanov Simona (77); Ş. g. 26 cl. VI Ugarcovici Ilie Drăgan (149). **TITU-GARĂ** (DÎMBOVIŢA) Ş. g. cl. VI Oprea Loredana (98), Rozner Ramona (100). **TÎRGOVIŞTE** Ş. g. 2 cl. V Dimancea Răzvan (80); Ş. g. 4 cl. VI Ilie Analis (80); Ş. g. 5 cl. V Cazaceanu Diana (100), Chivu Mădălina (120), Dinu Cristina (110), Iordache Romaniţa (100), Soare Adelina (120), Spătaru Amalia (120); Ş. g. 8 cl. VI Niţă Veronica (90); fără menţiune de clasă Lăzărescu Sarchis Olimpiu (60). **TG. BUJOR** (GALAŢI) Ş. g. 2 cl. VIII Alexandru Tudoriţa (90). **TG. JIU** (GORJ) Ş. g. 5 cl. V Bistreanu Romeo (90). **TG. NEAMŢ** (NEAMŢ) Ş. g. 3 cl. VI Arsenie Vasile (87); Ş. g. 5 cl. V Baciu Nicoleta (70), Bălătescu Cristina (77), cl. VII Antistescu Nicolae (80). **TRUŞEŞTI** (BOTOŞANI) Ş. g. cl. VIII Ţurcanu Cristian Augustin (140). **TULCEA** Lic. „Spiru Haret" cl. VII Stoicescu Amadeo (80), cl. VIII Tănasie Otilia-Simona (215). **TURBUREA** (GORJ) Ş. g. Poiana cl. VI Sgaibă Marius (140). **TURDA** Ş. g. 6 cl. VII Cucu Luana (100). **TURNU-SEVERIN** (MEHEDINŢI) Ş. g. 9 cl. V Simion Neli Irina (70).

VADURI (NEAMŢ) Ş. g. cl. V Bălan Alina (40), Popovici Marilena (60). **VALEA LUPULUI** (IAŞI) Ş. g. cl. VII Axinte Sorin (85). **VASLUI** Ş. g. 3 cl. VI Dalcescu Teodora (100), Gabureac Carmen (100), Grasu Laura (100), Trifu Mihaela (100), Tudor Lucia-Estela (100); Ş. g. 5 cl. VI Beldiman Amalia Mona (90), Grosu Carmen Luiza (74); Ş. g. 9 cl. V Alexandru Tatiana Monica (152), cl. VII Sima Cristi (60); Lic. ind. 1 cl. XII Maftei Constantin (90). **VICTORIA** (BRAŞOV) Ş. g. cl. VII Napar Cecilia (120); Lic. ind. ch. org. cl. XII Florea Lucian (150). **VULCAN** (HUNEDOARA) Ş. g. 5 cl. V Corchi Adrian (80).

ANINA (CARAŞ SEVERIN) Ş. g. cl. VIII Spevak Ursula (90).

BACĂU (BACĂU) Ş. g. 5 cl. VI Daniel Eduard (50); Ş. g. 8 cl. V Galu Bogdan (80), Haidău Mirela (90), Ignat Ciprian (87), Mandiuc Alina (63), Matricală Maria (100), Pogan Claudia (100), Roman Nicoleta (100); Ş. g. 10 cl. V Ciolanu Lenuţa (90), Gozar Mircea (80), Scrisăn Liliana (98), cl. VI Marin Oana (80); Ş. g. 16 cl. V Bohatir Olga (99), Jijie Lenuţa (90), Popa Cristina (98); Ş. g. 18 cl. V Aniţei Mirela (90); Ş. g. 19 cl. VI Ciobanu Cristian (85), cl. VII Ciobotaru Daniela (100), Herghelegiu Domnica (70); Ş. g. 27 cl. VI Chiţeş Oana (90); Ş. g. 28 cl. V Alexa Titel (70); Lic. „Ştefan cel Mare" cl. VI Cosma Adrian (92), Popa Laura (80), cl. VII Cosma Gabriel (95). **BAIA MARE** (MARAMUREŞ) Ş. g. 8 cl. VII Zaharia Sorin

Scanned with OKEN Scanner

(110); Ş. g. 17 cl. V Matyas Cristina '88); Ş. g. 21 cl. VI Şimonca Nicoleta (100); Lic. ind. 8 cl. V Ghiorean Ciprian (130). **BĂILE HERCULANE** (CARAŞ—SEVERIN) Ş. g. cl. V Dănescu Maria (110), Drăgilă Grigorița (100), Melolu Andrei (81), cl. VI Drăgănescu Valentin (170), cl. VII Darac Diana (40). **BĂILEŞTI** (DOLJ) Ş. g. 1 cl. VI Roşu Cătălin (111). **BĂLAN** (SĂLAJ) Ş. g. cl. V Georgeta Augustin (96), Rodina Ludovica (100), cl. VI Căldare Veronica (188), Ciobanu Cătălin (200). **BEIUŞ** Lic. „Samuil Vulcan" cl. VI Herman Ciprian (108), cl. VII Hoza Alina (190). **BELCEŞTI** (IAŞI) Ş. g. cl. V Pintilie Claudiu (50). **BIRLAD** (VASLUI) Ş. g. 8 cl. IV Tocan Franco (65); Lic. „Gh. R. Codreanu" cl. IX Crişcov Cristian (90), Vîlcu Dan (70). **BOLDEŞTI—SCĂIENI** (PRAHOVA) Ş. g. 1 cl. IV Biță Aniela (80), Dragomir Ciprian (80), Ghiță Marcela (80), Richiță Magdalena (80), Vlad Cristian (80). **BOTOŞANI** (BOTOŞANI) Ş. g. 7 cl. V Iluziconski Mihai (200), Oniciuc Claudiu (90), cl. VI Palancanu Carmen (70); Ş. g. 12 cl. VII Corol Claudiu, cl. VIII Budăi Emanuel (80); Ş. g. 13 cl. V Crețu Simona (90), Curcă Paul Ciprian (110). Cuşmir Iulian (95). Matraş Luiza (100), Mircea Sergiu (100), Picealcă Lorina-Bogdana (100), Sacu Adina (100), cl. VI Amarghioalei Costel (140), Istrate Roxana (130), Maxim Florin (100), Terchea Diana (100), cl. VII Amiței Ioan (120), Panțiru Felix (120).

BRAŞOV (BRAŞOV) Ş. g. 5 cl. VI Benge Rareş (80), cl. VII Klein Liviu (80); Ş. g. 18 cl. V Masca Ioana (300); Ş. g. 22 cl. III Udroiu Cătălin (220); Ş. g. 23 cl. VI Vasile Sorin (130); Ş. g. 27 cl. V Botea Veronica (90), cl. VI Chițu Adina (80), Glah Laura (80), Mărginean Carmen (85), Spiridon Simona (60). **BRĂILA** (BRĂILA) Ş. g. 7 cl. V Harabagiu Valentin (80), Lazăr Roxana (80), cl. VI Aramă Cornel (90); Ş. g. 10 cl. V Chetroeşu Mihai (90); Ş. g. 14 cl. III Apfelbaun Marcel (60), cl. IV Coşoveanu Maria (80); Ş. g. 22 cl. V Boaz Vasilica (130); Ş. g. 31 cl. IV Chyer Nicoleta (80); Ş. g. 32 cl. VII Tăbârcă Veronica (90); Lic. „Gh. M. Murgoci", cl. IX Moise Cătălin (86). **BREZOI** (VÎLCEA) Lic. ind. cl. V Coteanu Carmen (80), Dima Adina (90), Firescu Manuela (80). **BUCUREŞTI** Ş. g. 7 cl. VII Teodorescu Ştefania (20); Ş. g. 27 cl. V Anghelescu Florina (90); Ş. g. 42 cl. V Ariton Ovidiu (70); Ş. g. 49 cl. II Calude Andreea (150); Ş. g. 70 cl. VI Bejuscu Dorin (100), Tudorică Adrian (100); Ş. g. 96 cl. III Macarie Dana (130); Ş. g. 97 cl. VII Lucaciu Cristinel (76); Ş. g. 114 cl. IV Mija Liviu Daniel (60); Ş. g. 117 cl. V Marinov Irina (80); Ş. g. 118 cl. VII Dancălu Andreea (50); Ş. g. 142 cl. IV Nicolae Călin (78); Ş. g. 156 cl. V Dobrescu Mihai (120); Ş. g. 174 cl. V Şerban Andreea Iren (90); Ş. g. 190 cl. VI Drăguş Andi (200), Marinescu Adrian (270), Pricop Adrian (180); Ş. g. 201 cl. VII Dumitrescu Sorin (130); Ş. g. 206 cl. VI Buşe Decebal (50). **BUZĂU** (BUZĂU) Ş. g. 2 cl. VI Dăscăleanu Laura (64); Ş. g. 4 cl. VI Steresecu Dana (110); Ş. g. 15 cl. V Spânu Cristian (76), cl. VI Buga Monica (120); Ş. g. 16 cl. V Ionescu Mihai (110).

CAPU CODRULUI (SUCEAVA) Ş. g. cl. V Boşca Cătălin (50), cl. VI Pădure Elena (70). **CARACAL** (OLT) Ş. g. 6 cl. V Catrina Veturia (80), Dobromir Mihaela (70), Ştefan Emil (115), Jianu Anca (50); Lic. ind. 1 cl. X Ciobanu Cristian (130). **CARANSEBEŞ** (CARAŞ—SEVERIN) Ş. g. 8 cl. V Alexa Petru (80), Colie Ciprian Lăcrămioara (100), Cristescu Georgeta (80), Surulescu Silvia (240), Zolotar Ciprian-Radu (50), Lic. pedagogic cl. VI Tiplea Bogdan (50). **CĂLĂRAŞI** (CĂLĂRAŞI) Ş. g. 4 cl. VI Ilie Roxana (100), Comşa Marius (100), cl. VIII Fianu Leonard (80). **CIREŞU** (BRĂILA) Ş. g. de 10 ani cl. I Turtoi Luminița (125), cl. V Bogdan Steluța (210), Coman Mariana (90), Gheorghiță Alina (90), cl. VI Balaban Mihaela (90), Gheorghică Cristian (90). **CIMPINA** (PRAHOVA) Ş. g. 2 cl. IV Mărăşescu Radu (75), cl. VI Şerbănescu Veronica (75), cl. VII Vişan Sorin (70); Ş. g. 8 cl. VIII Căciulă Olivia (80); Lic. ind. 5 „Nicolae Grigorescu" cl. IX Drăghici Roxana (120). **CIMPULUNG—MOLDOVENESC** (SUCEAVA) Ş. g. 3 cl. VII Seiciuc Mihaela (88). **CIMPULUNG MUSCEL** (ARGEŞ) Ş. g. 7 cl. V Negru Roxana (100), cl. VI Ciovică Dana (100); Ş. g. 1 cl. VIII Ionescu Monica (100), Lic. ind. 3 cl. XI Stănică Daniel (155). **CLUJ-NAPOCA** (CLUJ) Ş. g. 14 cl. IV Rita Tăranu (60); Ş. g. 6 cl. V Codruța Pop (90); Ş. g. 3 cl. VI Bochiş Călin (130), cl. VII Fulea Dan (90), cl. VII Netea Ion (110), cl. VIII Netea Maria (100); Lic. „Emil Racoviță" cl. VII Marcu Ciprian (100); Lic. mat.-fiz. 2 cl. IX Socaciu Toran (200). **CONSTANȚA** (CONSTANȚA) Ş. g. 7 cl. V Demeter Mihai (90), Pînzaru Angi (80); Ş. g. 12 cl. VIII Dima Dan (174); Ş. g. 30 cl. VI Nenciu Adina (160); Ş. g. 32 cl. V Corcesu Cătălin (150); Ş. g. 37 cl. IV Nuțu Cristina (100); Ş. g. 40 cl. V Geneş Adrian (58). **CRAIOVA** (DOLJ) Ş. g. 16 cl. V Măruntu Luminița (90); Ş. g. 19 cl. V Ionescu Ionuț (270); Ş. g. 21 cl. V Muller Cristian (90); Ş. g. 31 cl. V Dimă Cezarina (60), Ghițulescu Anne-Elise (100), Ionescu Amalia (100). Iordache Anda (110); Ş. g. 37 cl. V Civană Maria (100); Lic. Fil.-ist. cl. VII Ghițulescu Doina (80), Vica Monica (100); Lic. „Frații Buzești" cl. V Pescăruş Iulia (110), cl. VI Zamfir Mirel (150); Ş. g. 31 cl. VI Fărcăşanu Irina (80), Lazavriu Mircea (110).

DĂBULENI (DOLJ) Ş. g. 3 cl. VI Epure Mihaela—Cristina (90), Răţoi Denisa (82), cl. VII Nicoliță I. Ovidiu (90). **DEJ** (CLUJ) Ş. g. 1 cl. V Naghi Nicoleta Maria (90), cl. VII Prundus Alina (120), Timar Adrian (100); Ş. g. 3 cl. V Petric Darius (110), Măgurean Emanuela (90), Samoilă Gilda (120), Tarța Augustin Marian (90), cl. VI Ciceo Raluca (100), Incze Reka (80), Şimonca Mihaela (100), Unguresan Aniela (100), cl. VII Bobar Luminița (96),

Scanned with OKEN Scanner

Bobriș Oana (140), Ilieș Nicoleta (100), Jurcan Veronica (100), Măgurean Liana (120), Pop Remus (100), cl. VIII Rusu Monica Ioana (100); Ș. g. 4 cl. VI Bogdan Alina (130), Cremene Ciprian (125), Lucăcel Mircea Clara (120), Pârje Valentina (130), Prunduș Teodora (130), Tarța Loredana (130), Vădeanu Marius (130). **DIRMĂNEȘTI** (ARGEȘ) Ș. g. cl. V Ciolan Lucian Ion (180), Cojocaru Monica (100), Coman Marius Dănuț (85), Ion Daiana (145), Ștefan C. Mircea (120). **DOCTOR PETRU GROZA** (BIHOR) Ș. g. cl. V Cureș Lazăr Cătălin (90), cl. VI Budișcă Nicoleta (90), Pană Anca Luminița (60), Peti Alin (100). **DOROHOI** (BOTOȘANI) Ș. g. 4 cl. V Azviței Daniela (100), Merciu Cătălina (71). **DROBETA TURNU SEVERIN** (MEHEDINȚI) Ș. g. 2 cl. V Beze Lavinia (115), Beze Laurențiu (115).

GALAȚI (GALAȚI) Ș. g. 1 cl. V Sonu Cristinel (42); Ș. g. 2 cl. V Ardelean Oana (90), Chește Alina Beatrice (55), Chirică Nicoleta (90), Crăciunoiu Robertino Iulian (90), Mihai Oana (90), Nistor Vasile (80), Tofan Laura (90), cl. VI Iordache Răzvan (37); Ș. g. 5 cl. VII Mironescu Ion (100); Ș. g. 6 cl. V Bostan Daniela (90). Curduban Mara (100), Dandeș Nicoleta (63), Giușcă Claudiu (73), Voina Laura (70), cl. VI Zotoiu Aida (115), cl. VII Găvan Laura (1000), Trifan Florin (132); Ș. g. 10 cl. V Cazacu Adrian (95), Popescu Lizica (70), Tăbăcaru Mariana (90), cl. VI Ban Rodica (100), cl. VII Ene Mirela (110); Ș. g. 13 cl. VII Bercu Gabriel (246); Ș. g. 17 cl. V Maximuț Mirela (56); Ș. g. 19 cl. VII Rusu Magdalena (110); Ș. g. 21 cl. III Anghel Marius (20), Lavric Aurelian (160); Ș. g. 22 cl. VI Dragomir Daniela (90); Ș. g. 25 cl. V Andrei Carmen-Florentina (89), Călina Oana (86), Ciupitu Daniela (110), Gheorghiu Ionuț (75), Goldură Liliana (114), Ioniță Marian Bogdan (220), Irimia Oana (110), Împăratu Elena (113), Jinga Otilia (193), Olteanu Leonard (96), Răducanu Corina (113), Vasiliu Gabriela Liliana (120), cl. VI Ivan Mirela (100), Petcu Elena (125), cl. VII Constantin Iulian (139), Manole Petru-Eugen (318), Ropotă Radu (145), cl. VIII Munteanu Marius (110). Palade Ana-Maria (89); Ș. g. 28 cl. V Andone Carmen (120), Zbirnea Iulia (75), cl. VI Abdulgani Olgun (56), Bălan Gianina (95), Culea Mihai (136), Ivănescu Bogdan (170), Lungu Mariana (80), Marica Loredana (98), Mitu Florin (150), Popoiu Bogdan (150), Soldan Florin (160), Spânu Bogdan (48), Tatulici Andrei Mihai (144). Teodorescu Mihaela (132), Tocitu Radu Andrei (52), Vals Anișoara (122), Veliche Răzvan (122), cl. VII Burduja Adrian (93), Dolteanu Irina (178), Dumitriu Oana (177), Ilea Sofica Marcela (180), Ivanov Carmen (167), Luca Victor (125), Mociulschi Adrian (120), Mustață Daniela (150), Negrea Laura (142), Pădure George (94), Popa Florentina (171), Postolache Daniela (155), Rășanu Cristian (122), Rusu Bogdan (143), Severineanu Laura (190), Soccanu Daniela (180), Stăncioiu Alexandru (120), Tîrnovan Cristian (96), Trandafir Corina (128), Vătămanu Antonel (110), cl. VIII Andrei Adrian (150). Ivanov Carmen (143), Meligaratu Andreea (127), Mocanu Amalia (136), Topciu Georgeta (155); Ș. g. 37 cl. VI Hapenciuc Ileana (90); Ș. g. 40 cl. VI Dinu Valentina (90), Șerban Dorina (75); Ș. g. 42 cl. V Brădeanu Elena (80), Enciu Cornel (55), Liacu Despina (100), cl. VI Balcanu Magdalena (80), Ion Ana Maria (50), Lungu Silviu (110), cl. VII Lungu Vlad (50), Mormeneche Doina (80), Ștefan Dorin (86), Zamfir Romelia Alina (64), cl. VIII Lungu Vasile (56), Nicoară Mircea-Cristian (88); Lic. „V. Roaită" cl. VI Tiron Sofica-Meda (420).

HARGHITA (HARGHITA) Ș. g. 1 cl. VI Goca Tamara (80), Rusu Ioana (110), Tordai Istvan Bama (100).

IAȘI Ș. g. 22 cl. IV Opreă Simona (48), cl. VI Balaban Rodica Daniela (270); Ș. g. 23 cl. V Diaconică Nicoleta (50), Hârbea Nicolae (117), Mardare Oana (117); Ș. g. 36 cl. IV Gafița Irina (40), cl. V Dumitriu Antonica (20); Școala de aplicație a Lic. pedagogic „V. Lupu" cl. III Bătagă Ovidiu (80); Ș. g. Comarna cl. VI Botez Georgiana (138); Lic. „C. Negruzzi" cl. V Amandei Cristian Mihai (237), Ursache Florin (90), cl. VIII Burtan Liviu (100), Cismaru Irinuca (88), Grosu Iulius (110), Ioanid Andreea (90); Lic. „Emil Racoviță" cl. VI Munteanu Oana (95), cl. VII Hulpoi Bogdan (100); Lic. „Garabet Ibrăileanu" cl. V Drișcu Liana (100), Iovu Cristina (200); Lic. Național cl. V Huțanu Petronela (100), Tocluică Francesca (110), cl. VI Munteanu Cristian Murea (60), cl. VII Barbu Tudor (99), Bosteacu Ștefan (140), Gălușcă Bogdan (100), Hamciuc Cătălin (130), Panaite Everaldo (270), cl. VIII Albrecht Liviu (120), Aflori Cristian (70), Alexandrescu Cristina (75), Căluiceanu Cristina (280), Căpățînă Radu (91), Miron Iolanda (114), Osoianu Mihaela (130), Pampaș Dan (100). **IVEȘTI** (GALAȚI) Ș. g. 3 cl. VI Manu Mihaela (77). **IZBICENI** (OLT) Ș. g. I—X cl. III Fota Camelia (187). **INSURĂȚEI** (BRĂILA) Ș. g. 3 cl. VII Alexe Daniela (70).

MASTACANI (GALAȚI) Ș. g. 1 cl. VII Grigoraș Daniela (80), Jarcă Dragoș (90), Moisa Gina (50). **MĂURENI** (CARAȘ—SEVERIN) Ș. g. cl. VII Stepan Dănuț (100). **MEDIAȘ** (SIBIU) Ș. g. 9 cl. VII Sălcudean Sorina (80). **MEHADIA** (CARAȘ—SEVERIN) Ș. g. cl. V Lalescu Maria (70). **METEȘ** (ALBA) Ș. g. cl. V Opruța Nicoleta (50), Zdrenghea Adriana (50), cl. VII Ampoițan Marilena (60). **MIERCUREA SIBIULUI** (SIBIU) Ș. g. cl. V Munteanu Maria Anca (80), Spielhaupter Astrid (80), Vingarzan Camelia (80). **MOINEȘTI** (BACĂU) Ș. g 1 cl. V Antohi Roxana (40), Dăscăloiu Roxana-Elena (110), cl. VI Breahnă Anca-Nicoleta (189), Scorțanu Oana (100). **MORENI** (DÎMBOVIȚA) Ș. g. 1 cl. VI Dițescu Răzvan (80), cl VII Ghindă Mihai (90), Iordănescu Mirela (100), Irimia Victor (80), cl. VIII Iordache Robert

Scanned with OKEN Scanner

(80); Ş. g. 4 cl. V Oprea Andreea (197), Soreşcu Laura (80), Vlădescu Adina (270), cl. VI Găitănaru Florin (540), Mihăescu Camelia (160), Opreşcu Cristina (213), cl. VII Bădeanu Răzvan (253), Ghiţă Ioana Florentina (124), Lupică Marius (100), Manu Robert (110). **MOTRU** (GORJ) Ş. g. 1 cl. V Murgulescu Adriana (90), cl. VI Iuţalim Carmen (100), cl. VII Al Mării Lucian (130), Amza Gabriel (100), Lidrea Sorina (77); Lic. ind. cl. X Arjăca Camelia (131), Bugan Lavinia (100), Burtea Ştefania Cristina (98), Buşe Cristian Dumitru (100), Dăescu Mihaiela (108). **MOVILENI** (GALAŢI) Ş. g. 1 cl. V Ioniţă Măndiţa (80), Rădăcină Maricela (80), Tudoran Cristian Dan (60). **MURGENI** (VASLUI) Ş. g. cl. IV Grigoraş Toma Petru (20), cl. VI Dorobăţ Bogdan (120), Olaru Otilia (60), cl. VII Focşa Ina (120).

PAŞCANI (IAŞI) Ş. g. 6 cl. V Panaite Iuliana Carmen(100), Virtone Irina Daniela (128). **PĂCĂLEŞTI** (BIHOR) Ş. g. cl. VI Haiduc Simona (120). **PĂUNEŞTI** (VRANCEA) Ş. g. cl. V Bostan Florin (73), Conta Mariana (72), Pavel Valentin (79). **PERIEŞTI** (OLT) Ş. g. cl. V Florea Dan Ion (40), Prioteasa Adela (60), cl. VI Deaconu Cătălin (40), cl. VIII Ionică Ilinca (60), Petcu Virgil (100). **PERIŞANI** (DOLJ) Ş. g. cl. IV Băneulescu Sandu-Paul (40). **PETROŞANI** (HUNEDOARA) Ş. g. 7 cl. V Nită Laura (69), Lic. mat.-fiz. cl. XI Gane Iulia (60). **PIATRA NEAMŢ** (NEAMŢ) Ş. g. 2 cl. VI Lupaşcu Gabriela (78); Ş. g. 3 cl. VI Mirciu Oana (160); Ş. g. 4 cl. VI Panaitescu Adrian (77); Ş. g. 27 cl. VI Leonte Carmen (80); Ş. g. 28 cl. V Micu Florentina (90), Popovici Mioara (90), Velescu Adina (86), cl. VI Băltătescu Iulian (78), Muraru Antonela (77). **PITEŞTI** (ARGEŞ) Ş. g. 1 cl. IV Mihail Braniştе (280); Ş. g. 4 cl. VI Motoescu Anca (50); Ş. g. 6 cl. V Dumitrescu Daniela (40); Ş. g. 9 cl. VI Allou Dragoş (80); Ş. g. 13 cl. VI Anghel Mihai (96), Dobrescu Decebal (65), Hristici Mihaela (85), Ştefan Livia (80); Ş. g. 15 cl. V Gilă Sidonia (50); Ş. g. 16 cl. IV Ivan Loredana (177). **PLOIEŞTI** (PRAHOVA) Ş. g. 10 cl. V Gheoca Sever (140), Pascaru Mihai (259), cl. VII Bercia Robert (78); Ş. g. 12 cl. VII Făgăraşi Tiberiu (82) ; Ş. g. 20 cl. VII Angelescu Iulia (125); Ş. g. 24 cl. VI Victoria Gabriel (46); Ş. g. 25 cl. VII Ciobanu Georgeta (108); Ş. g. 26 cl. VI Dinu Tiberiu (57), Marin Gabriel (90); Ş. g. 28 cl. V Niculae Anca (80), Teodorescu Marieta (90); Ş. g. 31 cl. VI Dumitru Alina (120); Lic. pedagogic cl. VIII Georgescu Sorin (150), Goia Monica (120), Nedelcu Raluca (78); Lic. muzică şi Arte plastice cl. VIII Simion Laura (102). **PODENI** (MEHEDINŢI) Ş. g. cl. V Nicolicescu Claudia (113), cl. VI Tomescu Lidia (110). **POIANA** (DÎMBOVIŢA) Ş. g. 1 cl. VI Tărăbincă Cătălin (100). **PREUTEŞTI** (SUCEAVA) Ş. g. 1 cl. VI Hretconu Ciprian (100). **PRUNDENI** (VÎLCEA) Ş. g. cl. VII Tăbîrcă Cătălin (100). **PUCIOASA** (DÎMBOVIŢA) Ş. g. 4 cl. VI Buzucengo Costin (60); Ş. g. 12 cl. VI Creţa Valeriu (120).

RĂDĂUŢI (SUCEAVA) Ş. g. 5 cl. IV Mictoriu Ciprian (30). **REGHIN** (MUREŞ) Ş. g. 5 cl. III Hurducaliu Alexandrina (80). **RÎMNICU—SĂRAT** (BUZĂU) Ş. g. 1 cl. V Stoica Nicoleta (77); Ş. g. 4 cl. V Niculescu Magdalena (100), Popescu Jenica (104), Stoica Gabriela (126); Ş. g. 5 cl. V Albu Gabriela (110), Alexandru Alina-Daniela (101), Cleanu Camelia (80), Grigorescu Raluca (90), Maraloiu Florentina (110), Mihali Maria-Magdalena (80), cl. VIII Voicu Gabriela Laura (90), Zamfirescu Aida (43); fără menţiune de şcoală Zamfirescu Grigoraş Cezar (22). **RÎMNICU VILCEA (VÎLCEA)** Ş. g. 2 cl. V Dobrinescu Ionuţ (46); Ş. g. 5 cl. VI Ciobotaru Rodica (77), cl. VII Şogor Robert (100); Lic. ind. 7 cl. VI Bratu Sorin (140), cl. VIII Cismaru Radu (69); Lic. „Nicolae Bălcescu" cl. V Cergă Carmen (70), cl. VII Cernătescu Dalila (91), Ghimiş Daniel (70), Ionescu Genoveva (100); fără menţiune de şcoală cl. VI Gogeoman Oana (90), Rusănescu Felix (150), cl. VIII Heizal Cristine (94). **RIŞNOV** (BRAŞOV) Ş. g. 2 cl. V Bartsch Betina (124), Boltes Andreea (82), Dezeo Ilonka (120), Eichner Arthur (120), cl. VIII Mirică Liliana (98). **ROMAN** (NEAMŢ) Ş. g. 1 cl. V Bursuc Mădălina (90), Mihai Violeta (109); Ş. g. 3 cl. VIII Dobre Codrin (124); Ş. g. 5 cl. I Hrisca Alina (27), Nechita Iuliana Elena (30); Ş. g. 11 cl. V Costin Oana (90), Creţu Ciprian (80), Mădăraş Cătălin (84), Popa Valentin (68), Punguţă Mona (80), cl. VI Acsinte Florin (71), Bulnac Marius (102), Cobzaru Ciprian (70), Gavril Simona (78), Herenciuc Cristian (60), Ioniţă Zoe (80), Panaite Carmen (78), Petriuc Delia (80), Pleşcan Vasile (80), Popescu Cătălin (50), Scorţescu Loredana (70), Voicu Carmen (75). **ROŞIORI DE VEDE** (TELEORMAN) Ş. g. 3 cl. VI Cuprinsu Claudiu (116); Ş. g. 4 cl. V Dinică Geanina (90), cl. VI Durleşteanu Denisa (146). **ROZNOV** (DOLJ) Fără menţiune de şcoală cl. VI Vasiloiu Adriana (60).

SATU—MARE Ş. g. 14 cl. V Oros Marcel (80); Lic. de mat.-fiz. „Mihai Eminescu" cl. VII Pop Marius-Lucian (60). **SĂCUIENI** (BIHOR) Ş. g. cl. VI Mănescu Adrian (90). **SĂMĂŞAG** (SĂLAJ) Ş. g. 1 cl. V Szeri Zsofia (75). **SEBIŞ** (ARAD) Ş. g. cl. VI Hirina Corina (58). **SFÎNTU — GHEORGHE** (COVASNA) Lic. mat.-fiz. cl. VII Gavrilă Cleopatra (80). **SIBIU** (SIBIU) Ş. g. 6 cl. VII Braicu Rareş (167); Lic. „Gh. Lazăr" cl. IX Braicu Bogdan (122), Lal Liliana (100), Moga Ioan (94), Nutanail Alina Ioana (82), Podnarcu Mihaela (100), Toader Mircea Tiberiu (120), cl. XI Acu Mugur Alexandru (120), Bărbas Alina (120), Brad Tiberiu (100), Cimpeanu Cristina (120), Jugăreanu Dan (120), Tatu Mirona-Ioana (98), Truică Corina (90). **SIGHETU MARMAŢIEI** (MARAMUREŞ) Ş. g. 3 cl. VII Chindriş Monica Crina (220), cl. VIII Chindriş Claudia Maria (150). **SIMERIA** (HUNEDOARA) Ş. g. 2 cl. VI Dinulescu Ovidiu (78). **SIRET** (SUCEAVA) Ş. g. 1 cl. V Stan Diana-Cristina (50). **SÎRBEŞTI** (GORJ) Ş. g. cl. VII Bucălită Dumitru (70), Lăzărescu Ion (160), Lilă Marcela (70). **SLATINA** (OLT) Ş. g. 3 cl. V Ghiţă Flo-

Scanned with OKEN Scanner

rina (90), Neacșu Cristina (70), Petru Crina Bianca (50), Rebenciuc Marius (70); Ș. g. 4 cl. V Pătrașcu Cristina (104); Ș. g. 8 cl. V Istrate Lucian (100), Mustață Florina (100), Stroică Irina (100). **STREMȚ** (ALBA) Ș. g. cl. VII Bolog Andrada (274). **SUCEAVA** (SUCEAVA) Ș. g. 1 cl. V Grămadă Marius (90); Ș. g. 3 cl. VI Grozavu Cezar (100), Turculeț Adina (100), Turcanu Christian(90).

TĂȘNAD (SATU MARE) Ș. g. cl. VI Nelea Aurel (113).

TECUCI (GALAȚI) Ș. g. 2 cl. V Bolea Narcis (72), Bilcu Mariana (50), Potîrniche Paul (100), Spînu Anda (40), cl. VI Filip Mihaela (105), Petcu Radu (40), Pohrib Floricica (130), Rotaru Roxana (50), cl. VII Popa Loredana (98); Ș. g. 4. cl. VI Tomă Rodica Sorina (95); Ș. g. 5 cl. II Martacan Andrei (115), cl. V Apostu Adina (50), Burghelea Diana (70), Chivu Iulian (70), cl. VI Balotă Alina (67), Burghelea Monica (110), Pohrib Beatrice (84), Ștefan Loredana (119), Țepeș Adriana (71), Vlad Mona (59), cl. VII Burghelea Diana (90), Prodea Cătălin (70), Zăgrean Cleopatra (195); Ș. g. 8 cl. IV Mariaș Dana (100), Mocanu Daniel (80); Ș. g. 10 cl. V Creangă Cornel (80), Ganea Diana (120), Manea Ciprian (50), cl. VI Apetrei Laurian (90), Avram Cosmin (80), cl. VII Enache Florentina (30), Martenciuc Ciprian (80), Miron Daniela (63), Petrică Răducu-Costel (30), cl. VIII Dumitrache Veronica (38), fără mențiune de clasă Avram Cosmin (80). **TIGVENI** Ș. g. cl. V Badea Doina (110). **TIMIȘOARA** (TIMIȘ) Ș. g. 6 cl. V Șotingă Liana (70), cl. VI Crăsteți Minodora (80), Mazuru Mihaela (60); Ș. g. 7 cl. VI Damian Eniko (100), fără mențiune de clasă Păteanu Paula (75), Telbiș Gabriela (80), Timofte Doina (87); Ș. g. 18 cl. VI Vuițan Viorel (120); Ș. g. 28 cl. VII Nedelcu Nicoleta (100). **TITU** Fără mențiune de școală și clasă Manolache Sorin (45). **TIRGOVIȘTE** (DÎMBOVIȚA) Ș. g. 2 cl. IV Toma Oana (80), cl. V Mihalcea Cristina-Anca (160), Niculescu Dragoș (65), Pătru Eladi (159); Ș. g. 5 cl. V Anca Adrian Călin (90), Anton Răzvan (58), Luca Roxana (76), Românașu Ștefănuț (100), Spătaru Amalia (100); Ș. g. 8 cl. V Blaga Roxana (70), cl. VI Niță Veronica (150), Toma Izabella (50); Lic. „Ienăchiță Văcărescu" cl. XII Popescu Florin (435); fără mențiune de școală și clasă Aioanei Andreea (79), Ilie Petronela (87). **TÎRGU-BUJOR** (GALAȚI) Ș. g. 2 cl. V Călici Zenovia (100), Ginghină Cristina (120), Soimu Delia-Dora (75). **TÎRGU-JIU** (GORJ) Ș. g. 3 cl. VIII Cristea Traian (50). **TÎRGU-MUREȘ** (MUREȘ) Ș. g. 10 cl. V Teci Ovidiu (18); Ș. g. 14 cl. V Dobrican Cristina (75), Suciu Simona Mirela (125), cl. VI Călugăr Gabriela (40), Popoviei Vlad (40). **TÎRGU-NEAMȚ** (NEAMȚ) Ș. g. 3 cl. VII Popa Iulia (150). **TOPLIȚA** (HARGHITA) Ș. g. 4 cl. VIII Butyka Mugurel (78); Ș. g. 8 cl. VII Cocoană Alexandrina (50), Feier Mirela (80), Moș Carmen (100), Simon Cristina (110), Șerțuba Carmen (50). **TULCEA** (TULCEA) Ș. g. 10 cl. V Mihăilescu Laurențiu (110), Popa Alexandru (109), Vals Ana Maria (90); Lic. „Spiru Haret" cl. V Tudorică Gabriela Laura (80), cl. VII Marcu Monica (80). **TURDA** Ș. g. 6 cl. VII Cucu Suzana (100). **TUTOVA** (VASLUI) Ș. g. cl. VI Munteanu Rodica (70).

VALEA LUPULUI (IAȘI) Ș. g. cl. VII Cordun Ionel (90), Lozneanu Gabriel (110), cl. VIII Herghelegiu Ioan (88). **VASLUI** (VASLUI) Ș. g. 3 cl. V Cimpeanu Ciprian (80), cl. VI Adrian Cristina (101), Fluieraș Gula (92), Lupu Adrian (105); Ș. g. cl. VI Bulancea Diana (100), Chiratcu Laura (110), Deliu Ciprian (130), Durcan Cătălina (95), Rebegea Gică (115), Tudor Saftă Ramona (110), Tinică Ciprian (100); Ș. g. 6 cl. V Gheorghe Alin (70), cl. VI Asoltani Mana-Alina (73), Beldiman Mana-Amalia (110), Cimpeanu Carmen (80), Drebluță Cristina (80), Simbotiu Dan (80); fără mențiune de școală și clasă Busuioc Bizi-Cristi (88). **VICTORIA** (BRAȘOV) Ș. g. cl. VII Neghîrlă Admira (100). **VĂLENII DE MUNTE** (PRAHOVA) Ș. g. 3 cl. V Panait Nicolae (68), cl. VI Dumitru Adrian (90), Vătășelu Cătălin (88); Ș. g. 6 cl. VI Firtat Claudia (110), Ion Florica (120), Lăzărescu Emanuel-Bogdănel (90), Marcu Atena (130).

ANUNȚ

Facultatea de matematică, Inspectoratul Școlar al Municipiului București, Filiala S.S.M. București organizează în vederea stimulării activității de cercetare științifică a cadrelor didactice din învățămîntul gimnazial și liceal, o sesiune de comunicări științifice. Sesiunea va avea loc în București în ultima decadă a lunii aprilie 1988 și cuprinde următoarele secțiuni:

Algebră, Geometrie, Analiză matematică, Matematici Aplicate.

Sînt invitate să participe cadrele didactice din Municipiul București. Înscrierea se face la S.S.M. la secretariatul Sesiunii, str. Academiei nr. 14, București, pînă la data de 1 martie 1988 și va fi însoțită de rezumatul lucrării.

I. P. Informația c. 1749

Index 41 601.

Lei 3,50

Scanned with OKEN Scanner

ISSN 0016–5441

SOCIETATEA DE ȘTIINȚE MATEMATICE
DIN REPUBLICA SOCIALISTĂ ROMÂNIA

GAZETA MATEMATICĂ

PUBLICAȚIE LUNARĂ PENTRU TINERET

3

DIN CUPRINS:

- ASUPRA UNEI INEGALITĂȚI
- RELAȚIA DE CONGRUENȚĂ MODULO p ÎN C[X]
- ASUPRA UNEI PROPRIETĂȚI ÎN TETRAEDRU
- CONCURSUL INTERJUDEȚEAN „SPIRU HARET”, EDIȚIA A-III-A, 1987
- PROBLEME REZOLVATE PENTRU GIMNAZIU ȘI LICEU
- PROBLEME PENTRU CICLUL PRIMAR, GIMNAZIU, DE TIP O.I.M. PENTRU ELEVII DIN GIMNAZIU, PENTRU LICEU, PREGĂTITOARE PENTRU O.I.M. ȘI O.B.M., PENTRU CONCURSUL ANUAL AL REZOLVITORILOR, PROBLEME DE INFORMATICĂ.
- RUBRICA REZOLVITORILOR DE PROBLEME

ANUL XCIII nr. 3/1988

Scanned with OKEN Scanner

GAZETA MATEMATICĂ

SUMARUL

1. Asupra unei inegalităţi, de *Dumitru Acu* 97
2. Relaţia de congruenţă modulo p în $C[X]$, de *Alexandru Ofel* 99
3. Asupra unei proprietăţi a anticentrului unui tetraedru, de *Mihai Miculiţa* 100
4. Concursul de matematică, etapa locală, 22 II 1987, Constanţa 102
5. Concursul de matematică, etapa locală, februarie 1987, jud. Suceava 105
6. Soluţiile problemelor date la concursul de matematică, etapa locală, februarie 1987, judeţul Teleorman, prezentate de *Marius Burtea* 109
7. Concursul interjudeţean „Spiru Haret", ediţia a III-a, Târgovişte, 13 decembrie 1987 115
8. Probleme rezolvate pentru gimnaziu (E : 9084, E : 9089, E : 9093, E : 9097, E : 9099, E : 9101, E : 9104) 119
9. Probleme rezolvate pentru liceu (21040, 21037, 21046, 21045, 21053, 21058) 123
10. Probleme pentru ciclul primar (17—24) 130
11. Probleme pentru gimnaziu (E : 9371—E : 9394) 130
12. Probleme preliminare de tip O.I.M. pentru elevii din gimnaziu (O.G. 67, O.G. 68) 134
13. Probleme pentru liceu (21373—21400) 134
14. Probleme pregătitoare pentru O.I.M. şi O.B.M. (O : 542—O : 544) 139
15. Probleme pentru concursul anual al rezolvitorilor (C : 769—C : 776) 140
16. Probleme de informatică (I : 329, I : 330) 141
17. Rubrica rezolvitorilor de probleme 141

ANUL XCIII | 3 | 1988

COMITETUL DE REDACŢIE

Lector univ. Dumitru Acu, Sibiu: lector univ. **Toma Albu**; lector univ. **Horea Banea, Braşov**: lector univ. **Octavian Băsecă**; conf. univ. **Dan Brânzei, Iaşi**; prof. **Constantin Cărbunaru**; prof. **Marcel Chiriţă**; prof. **Pal Dalyay, Tg. Mureş**; lector univ. **Inocenţiu Drăghicescu**; prof. **Ioana Drăghici**; inv. **Alexandrina Dumitru**; prof. **Ilie Gheorghiţă**; prof. **Adrian Ghioca**, Sinaia; cercetător principal **Gheorghe Gussi**; lector univ. **Stere Ianuş**; prof. **Ştefan Kadar, Baia-Mare**; lector univ. **Constantin Niţă**; prof. univ. **Arpad Pal, Cluj-Napoca**; lector univ. **Laurenţiu Panaitopol**; prof. **Olimpia Popescu, Ploieşti**; matem. **Paul Radovici-Mărculescu**; lector univ. **Gheorghe Sireţchi**; lector univ. **Ioan Tomescu**; prof. **Florin Vulpescu-Jalea**.

REDACŢIA GAZETEI MATEMATICE

Redactor şef (delegat): **Acad. N. Teodorescu**; redactori principali: prof. **Ilie Iliescu**, prof. **Liviu Pîrşan**, prof. **Marcel Ţena**; redactori principali onorifici: prof. **C. Ionescu-Ţiu**, asist. univ. **Elifteria Rogai**; redactori: prof. **Liliana Balaci**, prof. **Alexandru Constantinescu**.

Responsabil de număr: Prof. **Liliana Balaci**

ADRESA REDACŢIEI GAZETEI MATEMATICE

Str. Academiei nr. 14, tel. 14.46.53 — Bucureşti, 1, cod. 79543

Cititorii din străinătate se pot abona prin **ROMPRESFILATELIA**, sectorul Export-Import-Presă, Calea Griviţei nr. 64—66, P.O. Box 12-291, Telex 10376 Prsfir Bucureşti — ROMÂNIA

Scanned with OKEN Scanner

GAZETA MATEMATICĂ

PUBLICAȚIE LUNARĂ PENTRU TINERET

Anul XCIII nr. 3 Martie 1988

ASUPRA UNEI INEGALITĂȚI

de lector univ. dr. Dumitru Acu, Sibiu

In [1] *Gh. Micluescu* demonstrează următorul rezultat:

Fie funcțiile $f, F : [a, b] \to \mathbf{R}$, *f continuă și crescătoare pe* $[a, b]$, $F(x) = \int_a^x f(t)dt$, $(\forall)x \in [a,b]$, $a < b$; *atunci are loc inegalitatea*

$$\int_a^b F(t)dt \geqslant \frac{(b-a)^2}{2} f(a). \tag{1}$$

Pentru $a = 0$ se obține proalema 18319*, G.M. 6/1980.

Scopul acestei note este de a prezenta o generalizare mai largă pentru inegalitatea (1) și cîteva aplicații pentru rezultatul obținut.

Propoziție. *Fie* $f, g : [a,b] \to \mathbf{R}$, $a < b$, *două funcții ce satisfac condițiile:*

i) *f și g continue pe* $[a,b]$

ii) *f crescătoare pe* $[a,b]$

iii) *g derivabilă de două ori pe* $[a, b]$ *și* $g''(x) \geqslant 0$ *pe* $[a,b]$

iv) $g(a) = g'(a) = 0$.

Dacă

$$F(x) = \int_a^x f(t)g''(t)dt, \quad x \in [a,b], \tag{2}$$

atunci are loc inegalitatea

$$\int_a^b F(t)dt \geqslant g(b)f(a). \tag{3}$$

Demonstrație. Considerăm funcția

$$h : [a,b] \to \mathbf{R}, \; h(y) = \int_a^y F(t)dt - g(y)f(a).$$

Avem

$$h'(y) = F(y) - g'(y)f(a),$$

$$h''(y) = F'(y) - g''(y)f(a) = g''(y)[f(y) - f(a)] \geqslant 0, \; (\forall) \; y \in [a, b].$$

Cum $h'(a) = 0$ rezultă că $h'(y) \geqslant 0$, $(\forall)\, y \in [a, b]$; de aici rezultă că h este crescătoare. Deci, putem scrie $h(b) \geqslant h(a) = 0$, de unde rezultă inegalitatea (3).

Observație. Dacă în condiția iv) din Propoziție luăm $g''(x) \leqslant 0$ atunci în inegalitatea (2) se schimbă sensul.

Aplicații. 1. Pentru $g(x) = \dfrac{(x-a)^2}{2}$ avem $g''(x) = 1$ și (3) conduce la (1).

2. Să considerăm acum $g(x) = (x-a)^2 e^x$, $x \in [a, b]$. Avem:

$$g(a) = 0;$$

$$g'(x) = (x-a)e^x(x-a+2);\ g'(a) = 0;$$

$$g''(x) = e^x(x-a)(x-a+4) \geqslant 0,\quad (\forall)\, x \in [a, b].$$

Aplicînd Propoziția, rezultă că are loc inegalitatea

$$\int_a^b F(t)\,dt \geqslant e^b(b-a)^2 f(a),$$

unde

$$F(x) = \int_a^x f(t)e^t(t-a)(t-a+4)dt,\quad x \in [a, b].$$

3. Dacă considerăm $g(x) = e^x - x - 1$, $x \in [0, b]$, $b \in (0, \infty)$, atunci sînt îndeplinite condițiile Propoziției și are loc inegalitatea

$$\int_0^b F(t)\,dt \geqslant (e^b - b - 1) f(0),\quad (\forall)\ b \in (0, \infty)$$

unde

$$F(x) = \int_0^x e^t f(t)\,dt,\ x \in [0, b],$$

cu $f: [0, b] \to \mathbf{R}$, continuă și crescătoare pe $[0, b]$.

4. Fie $g(x) = x - \ln(1+x)$, $x \in [0, b]$, $b \in (0, \infty)$ iar $f: [0, b] \to \mathbf{R}$ o funcție continuă și crescătoare pe $[0, b]$.
Sînt îndeplinite condițiile Propoziției și are loc inegalitatea

$$\int_0^b F(t)dt \geqslant [b - \ln(1+b)] f(0),\quad (\forall) b \in (0, \infty)$$

unde

$$F(x) = \int_0^x \frac{f(t)\,dt}{(1+t)^2},\quad x \in [0, b].$$

Bibliografie

[1]. *Gh. Miculescu*, Asupra problemei 18319*, G.M. 5/1982, p. 166.
[2]. *M. Nicolescu, N. Dinculeanu, S. Marcus*, Analiză matematică, Vol. I, Ed. didactică și pedagogică, 1971.

Scanned with OKEN Scanner

RELAȚIA DE CONGRUENȚĂ MODULO p ÎN C[X]

de Alexandru Ojet, profesor, Brașov

I. Pornind de la analogia proprietăților aritmetice ale inelului polinoamelor, $\mathbf{C}[X]$, cu cele ale inelului numerelor întregi, $\mathbf{Z}$, și de la noțiunile cunoscute de divizibilitate a polinoamelor, vom considera în cele ce urmează relația de congruență modulo p în $\mathbf{C}[X]$ cu utilități practice în rezolvarea unor probleme des întîlnite în manuale și culegeri.

II. Cadrul celor ce urmează este $\mathbf{C}[X]$, unde fixăm un polinom nenul p.

Definiție. Spunem că polinomul f este congruent cu polinomul g modulo p și notăm $f \equiv g \pmod p$, dacă $p \mid f - g$.

Propoziție. Relația de congruență modulo p este relație de echivalență, adică

(1) $f \equiv f \pmod p$

(2) $f \equiv g \pmod p \to g \equiv f \pmod p$

(3) $f \equiv g \pmod p$, $g \equiv h \pmod p \to f \equiv h \pmod p$,

pentru orice polinoame f,g,h.

Demonstrația este evidentă.

Propoziție. Relația de congruență modulo p este compatibilă cu operațiile inelului $\mathbf{C}[X]$, adică, dacă $f \equiv g \pmod p$ și $h \equiv k \pmod p$, atunci $f + h \equiv g + k \pmod p$ și $fh \equiv gk \pmod p$.

Demonstrație. Cum $p \mid f - g$ și $p \mid h - k$ rezultă $p \mid (f - g) + (h - k) = (f + h) - (g + k)$ și din $f - g = pm$, $h - k = pn$, $m,n \in \mathbf{C}[X]$, avem $fh = (g + pm)(k + pn) = gk + p(mk + ng + pmn)$, adică $p \mid fh - gk$.

Observație. Din propoziția de mai sus deducem că $af \equiv ag \pmod p$ dacă $a \in \mathbf{C}$ și $f^n \equiv g^n \pmod p$ dacă $n \in \mathbf{N}$.

III. Aplicații

1) Să se arate că $f = (X + 1)^{6n+1} + X^{6n+2}$ se divide cu $g = X^2 + X + 1$.

Rezolvare: Cum $(X + 1)^3 \equiv -1 \pmod g$ avem $(X + 1)^{6n} \equiv 1 \pmod g$ de unde rezultă $(X + 1)^{6n+1} \equiv X + 1 \pmod g$. Pentru X^{6n+2}, avem $X^3 \equiv 1 \pmod g$, deci $X^{6n} \equiv 1 \pmod g$ și $X^{6n+2} \equiv X^2 \pmod g$. Astfel $f \equiv X + 1 + X^2 \pmod g$ adică $f \equiv 0 \pmod g$ ceea ce înseamnă că $g \mid f$.

2) Să se arate că $X^2 + X + 1$ divide polinomul $X^{6n-1} + X + 1$.

Rezolvare: Notăm primul polinom cu g și al doilea cu f. Avem $X^3 \equiv 1 \pmod g$ deci $X^{6n} \equiv 1 \pmod g$ și $Xf \equiv 1 + X^2 + X \pmod g$. Deducem că g divide Xf și cum $(X, g) = 1$ rezultă $g \mid f$.

3) Să se arate că $f = (X - 1)^{n+2} - X^{2(n-1)}$ se devide cu $g = X^2 + X + 1$.

Rezolvare: $X^2 \equiv X - 1 \pmod g$ și $X^{2(n-1)} \equiv (X-1)^{n-1} \pmod g$. Astfel $f \equiv (X - 1)^{n+2} - (X - 1)^{n-1} \pmod g$ adică $f \equiv (X - 1)^{n-1}((X - 1)^3 - 1) \pmod g$. Cum $(X - 1)^3 - 1 \equiv 0 \pmod g$ rezultă $f \equiv 0 \pmod g$ deci $g \mid f$.

4) Polinomul $(X + 1)^{3n+2} + X + 2$ se divide cu $X^2 + 3X + 3$.

Rezolvare: Notăm cu f și g, în ordine, cele două polinoame.

Cum $(X + 1)^3 \equiv 1 \pmod g$ rezultă $(X + 1)^{3n+2} \equiv (X + 1)^2 \pmod g$. Astfel avem $f \equiv (X + 1)^2 + X + 2 \pmod g \equiv X^2 + 3X + 3 \pmod g$ deci $g \mid f$.

5) Să se arate că polinomul $f = (X^2 + X + 1)^{4n+1} - X$ se divide prin $g = X^2 + 1$.

Rezolvare: Cum $X^2 + X + 1 \equiv X \pmod g$ avem $(X^2 + X + 1)^{4n+1} \equiv X^{4n+1} \pmod g$. Dar $X^4 \equiv 1 \pmod g$ deci $X^{4n+1} \equiv X \pmod g$. Astfel $f \equiv X - X \pmod g$ și în concluzie $g \mid f$.

6) Să se arate că polinomul $f = X^{4a} + X^{4b+1} + X^{4c+2} + X^{4d+3}$, a,b,c,d fiind numere naturale, este divizibil prin $g = X^3 + X^2 + X + 1$.

Rezolvare: Evident $X^4 \equiv 1 \pmod g$ și $f \equiv 1 + X + X^2 + X^3 \pmod g$.

7) Să se determine a și b astfel încît polinomul $aX^4 + bX^3 - 3$ să fie divizibil cu $(X - 1)^2$.

Rezolvare: Notăm cu $g = (X - 1)^2$ și cu f celălalt polinom. Avem $X^4 \equiv 4X - 3 \pmod g$ și $X^3 \equiv 3X - 2 \pmod g$ deci $f \equiv a(4X - 3) + b(3X - 2) - 3 \pmod g$. Astfel, restul împărțirii lui f la g este $(4a + 3b)X + (-3a - 2b - 3)$ care trebuie să fie egal cu polinomul nul, condiție sistem din care se determină a și b.

8) Să se demonstreze că restul împărțirii polinomului X^n cu polinomul $(X - 1)^2$ este $nX - (n - 1)$.

Rezolvare; Demonstrăm prin inducție după n. Avem $X^2 \equiv 2X - 1 \pmod g$ unde $g = X^2 - 2X + 1$. Presupunem că $X^k \equiv kX - (k - 1) \pmod g$ și avem $X^{k+1} \equiv kX^2 - (k - 1)X \pmod g$. Dar $kX^2 \equiv 2kX - k \pmod g$ și astfel obținem $X^{k+1} \equiv (k + 1)X - k \pmod g$ și, cum grad $[nX - (n - 1)] = 1 <$ grad g rezultă că enunțul este adevărat.

Scanned with OKEN Scanner

9) Să se arate că 1 este rădăcină dublă pentru polinomul $f = X^{3n} - nX^{n+2} + nX^{n-1} - 1$.

Rezolvare: Arătăm că f se divide cu $g = (X-1)^2$. După cele arătate mai sus avem $X^{3n} \equiv 3nX - (3n-1)$ și $X^{n+2} \equiv (n+2)X - (n+1)$ și $X^{n-1} \equiv (n-1)X - (n-2)$ adică $f \equiv 3nX - (3n-1) - n[(n+2)X - (n+1)] + n[(n-1)X - (n-2)] - 1 \pmod{g}$. Făcind calculele obținem $f \equiv 0 \pmod{g}$.

10) Să se determine A și B astfel încît polinomul $AX^{n+2} + BX^n + 2$ să fie divizibil cu $(X-1)^2$.

Rezolvare: Avem $X^{n+2} \equiv (n+2)X - (n-1) \pmod{(X-1)^2}$ și $X^n \equiv nX - (n-1) \pmod{(X-1)^2}$, de unde $AX^{n+2} + BX^n + 2 \equiv [A(n+2) + Bn]X + [2 - A(n+1) - B(n-1)] \pmod{(X-1)^2}$. Rezolvind sistemul format cu cei doi coeficienți care trebuie să fie nuli, se determină A și B.

11) Pentru ce valori ale lui m, polinomul $(X-1)^m - X^m + 1$ se divide cu $X^2 - X + 1$?

Rezolvare: Notăm cu f primul polimom, g al doilea și $m = 3k + r$, $r = 0,1,2$. Arătăm ușor că $f \equiv (X-1)^r - (-1)^k X^r + 1 = h \pmod{g}$.

Pentru $r = 0$; $h \neq 0$ și deci g nu divide f. Pentru $r = 1$, $h = X - 1 - (-1)^k X + 1$ care este polinomul nul dacă $k = 2p$, $p \in N$ și deci g divide f dacă $m = 6p + 1$. Pentru $r = 2$, $h = X^2 - 2X + 1 - (-1)^k X^2 + 1 = 2X^2 - 2X + 2$ dacă $k = 2p + 1$ și deci g divide f dacă $m = 6p + 5$.

ASUPRA UNEI PROPRIETĂȚI A ANTICENTRULUI UNUI TETRAEDRU

de **Mihai Miculița**, profesor, Oradea

Definiție: Simetricul centrului sferei circumscrise unui tetraedru față de centrul de greutate, poartă numele de *anticentru* (sau de *punctul lui Monge*) *al tetraedrului*.

Teorema 1. (Monge) *Segmentul de dreaptă determinat de anticentrul unui tetraedru și de mijlocul unei muchii, este perpendicular pe muchia opusă a tetraedrului.*

Demonstrația acestei teoreme se poate găsi, de exemplu, în [1] sau în [2], și ea face obiectul problemei 23 de la pag. 40 din [3], iar în [4] a problemei 295.

Proprietatea formulată în teorema următoare o cred inedită, demonstrația ei constituind scopul prezentei note.

Teorema 2. *Proiecția anticentrului unui tetraedru pe o față a tetraedrului este mijlocul segmentului determinat de ortocentrul acestei fețe și de piciorul înălțimii tetraedrului care cade pe ea.*

Demonstrația I. Fie $A_1A_2A_3A_4$ un tetraedru oarecare. Notăm cu P_1 piciorul înălțimii duse din vîrful A_1, cu H_1 ortocentrul fetei opuse vîrfului A_1, cu A_{12} mijlocul muchiei (A_1A_2), iar cu M_1 mijlocul segmentului (A_1H_1) (v. fig. 1).

Pentru a demonstra teorema, este suficient să arătăm că $M_1K \perp (A_2A_3A_4)$ (K fiind anticentrul tetraedrului $A_1A_2A_3A_4$). H_1 fiind ortocentrul fetei $A_2A_3A_4$, avem că:

$$A_2H_1 \perp A_3A_4, \tag{1}$$

$(A_{12}M_1)$ este linie mijlocie în triunghiul $A_1A_2H_1$, așa că ea este paralelă cu cea de a treia latură a acestui triunghi, deci:

$$A_{12}M_1 \parallel A_2H_1 \tag{2}$$

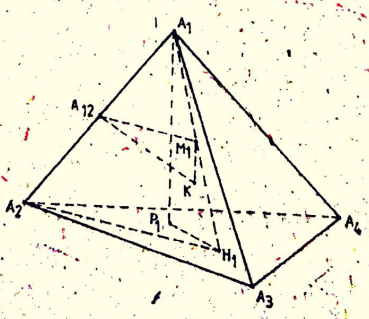


Fig. 1

Scanned with OKEN Scanner

Dacă două drepte sînt paralele, atunci orice dreaptă care este perpendiculară pe una dintre ele, este perpendiculară şi pe cea de a doua dreaptă; aşa că ţinînd seama de relaţiile (1) şi (2), urmează că

$$A_{12}M_1 \perp A_3A_4 \tag{3}$$

Pe de altă parte, în conformitate cu teorema 1, avem:

$$A_{12}K \perp A_3A_4 \tag{4}$$

Dreapta A_3A_4 fiind perpendiculară pe două drepte concurente, conţinute în planul $(A_{12}M_1K)$ (v. relaţiile (3) şi (4)), urmează că:

$$A_3A_4 \perp (A_{12}M_1K) \tag{5}$$

O dreaptă perpendiculară pe un plan este perpendiculară pe orice dreaptă conţinută în acest plan; aşa că, ţinînd seama de relaţia (5), rezultă că:

$$A_3A_4 \perp M_1K \tag{6}$$

În mod analog se arată că:

$$A_2A_3 \perp M_1K \tag{7}$$

Potrivit relaţiilor (6) şi (7), dreapta M_1K este perpendiculară pe două drepte concurente conţinute în planul $(A_2A_3A_4)$, aşa că:

$$M_1K \perp (A_2A_3A_4).$$

Demonstraţia a II-a: Notăm cu P_1, K_1 şi Q_1 proiecţiile punctelor A_1, K şi respectiv G (centrul de greutate), pe faţa opusă vîrfului A_1 (v. fig. 2.a).

Centrul O al sferei circumscrise tetraedrului $A_1A_2A_3A_4$ se proiectează pe faţa opusă vîrfului A_1 în centrul O_1 al cercului circumscris triunghiului $A_2A_3A_4$.

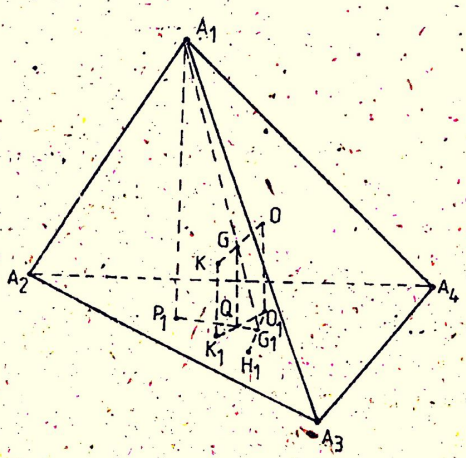


Fig. 2. a.

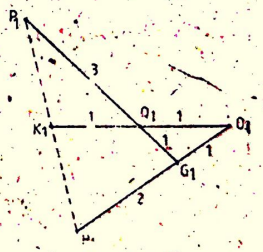


Fig. 2. b.

Întrucît proiecţia ortogonală a punctelor din spaţiu pe un plan păstrează coliniaritatea şi raportul segmentelor, avem:

$$\frac{P_1Q_1}{P_1G_1}\cdot\frac{H_1G_1}{H_1O_1}\cdot\frac{K_1O_1}{K_1Q_1}=\frac{A_1G}{A_1G_1}:\frac{H_1G_1}{H_1O_1}\cdot\frac{KO}{KG}=\frac{3}{4}\cdot\frac{2}{3}\cdot 2=1 \tag{1}$$

Din relaţia (1), pe baza reciprocei teoremei lui *Menelaus*, aplicată la triunghiul $Q_1G_1O_1$, urmează că punctele P_1, K_1 şi H_1 sînt coliniare (v. fig. 2.b).

Scanned with OKEN Scanner

Aplicînd acum teorema lui *Menelaus* în triunghiul $P_1H_1G_1$ cu transversala $K_1-Q_1-O_1$, obținem:

$$\frac{K_1P_1}{K_1H_1}\cdot\frac{O_1H_1}{O_1G_1}\cdot\frac{Q_1G_1}{Q_1P_1}=1, \text{ de unde:}$$

$$\frac{K_1P_1}{K_1H_1}=\frac{O_1G_1}{O_1H_1}\cdot\frac{Q_1P_1}{Q_1G_1}=\frac{1}{3}\cdot(-3)=-1 \qquad (2).$$

În fine, din relația (2), urmează că punctul K_1 (proiecția lui K pe fața opusă vîrfului A_1) este mijlocul segmentului (P_1H_1).

Consecințe:

1. Întrucît ortocentrul unui tetraedru ortocentric coincide cu anticentrul tetraedrului, urmează că: *într-un tetraedru ortocentric, picioarele înălțimilor sînt ortocentrele fețelor sale.* (Vecten—1817).

2. Întrucît centrul sferei circumscrise unui tetraedru echifacial coincide cu anticentrul tetraedrului, urmează că: *într-un tetraedru echifacial, picioarele înălțimilor sînt simetricele ortocentrelor fețelor față de centrele cercurilor circumscrise fețelor respective.*

Bibliografie

[1] *Dan Brânzei* ș.a. **Planul și spațiul Euclidian** (manuscris) va apare la Ed. Academiei, București, 1986 (în Bibl. profesorului de matematică).

[2] *Mihai Miculița*: **Dreapta și sfera lui Euler a unui tetraedru oarecare**, în volumul: *Teme și probleme pentru pregătirea olimpiadelor de matematică*, Piatra Neamț, 1984, pag. 143—149.

[3] *P. S. Modenov*: **Problems in geometry**, Mir Publishers, Moscow, 1981.

[4] *I. F. Șarighin*: **Probleme de geometrie** (geometrie în spațiu), titlul în lb. rusă, Ed. Nauka, Moscova, 1984.

CONCURSUL DE MATEMATICĂ

ETAPA LOCALĂ—22 II 1987— CONSTANȚA

Clasa a IX-a

I. Se consideră funcția $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ unde

$$f(x)=\begin{cases}x^2-4x+m, \text{ dacă } x\leq 1\\ mx^2+4mx+m^2+m-1, \text{ dacă } x\geq 1.\end{cases}$$

Să se determine valorile reale ale lui m, astfel încît $f(x)\geq 0$, oricare ar fi $x\in\mathbf{R}$.

prof. *Constantin Caragea*

II. Să se determine funcțiile $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f(x)=ax^2+bx+c$, astfel încît $|f(x)|\leq(x-1)^2$, oricare ar fi $x\in\mathbf{R}$.

prof. *Constantin Caragea*

III. Să se determine funcțiile $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ care verifică relația:

$$f(x+y)+2f(x-y)=3f(x)-y.$$

prof. *Gheorghe Andrei*

IV. Fie $ABCD$ un trapez dreptunghic cu $AD \parallel BC$, $BD = BC$ și DE bisectoarea unghiului $\widehat{ADB}$, $E \in (AB)$. Dacă F și I sînt intersecțiile diagonalei AC cu DE, respectiv DB, atunci avem:

a) $EC > \max(DE, DC)$;

b) $\dfrac{DF}{FE} = 1 + \dfrac{AD}{DC}$.

prof. *Dorina Popovici*

V. Fie $ABCD$ un patrulater convex. Să se arate că $ABCD$ este dreptunghi dacă și numai dacă $MA^2 + MC^2 = MB^2 + MD^2$, oricare ar fi M din plan.

prof. *Constantin Carayea*

Clasa a X-a

I. a) Să se rezolve ecuația $x + \log_a x = 1 + a\log_a x$ ($a > 0$, $a \neq 1$) și apoi să se găsească valorile lui x care verifică inecuația $x + \log_a x \geqslant 1 + a\log_a x$.

b) Să se arate că $\dfrac{\sum_{i=1}^{n} a_i}{n} \geqslant \log_{n+1}(1 + a_1)(1 + a_2)\ldots(1 + a_n)$,

oricare ar fi $a_i \geqslant n$, $i = 1, 2, \ldots n$.

prof. *Gheorghe Andrei*

II. Să se rezolve ecuația $2\sqrt{x-1} = x \cdot 2^{|x-2|}$.

prof. *Gheorghe Bordea*

III. Fie Z_1, Z_2, Z_3 numere complexe distincte astfel ca

$$Z_3 - Z_2 + \varepsilon(Z_1 - Z_3) + \varepsilon^2(Z_2 - Z_1) = 0,$$

unde $\varepsilon = \cos\dfrac{2\pi}{3} + i\sin\dfrac{2\pi}{3}$. Atunci numerele complexe $Z_1 + Z_2 - Z_3$, $Z_1 + Z_3 - Z_2$, $Z_2 + Z_3 - Z_1$ sînt afixele unui triunghi echilateral.

prof. *Viorica Frecuș*

IV. Se consideră un triunghi ascuțitunghic ABC și $M \in BC$. Se consideră $MP \perp AB$, $P \in AB$ și $MQ \perp AC$, $Q \in AC$. Să se determine $M \in BC$ pentru care $\sigma[PMQ]$ este maximă.

prof. *Marius Cavachi*

V. Printr-un punct M situat în interiorul triunghiului ABC se duc paralele la laturile triunghiului, care determină trei triunghiuri de arii S_1, S_2 și S_3.

a) Dacă r_1, r_2, r_3 și R_1, R_2 și R_3 sînt razele cercurilor înscrise, respectiv circumscrise celor trei triunghiuri formate, atunci au loc egalitățile:

$$r_1 + r_2 + r_3 = r;\ R_1 + R_2 + R_3 = R$$

unde r și R sînt razele cercurilor înscris și circumscris triunghiului ABC.

b) Să se determine poziția punctului M pentru care suma $S_1 + S_2 + S_3$ este maximă, respectiv minimă.

prof. *Gheorghe Andrei*

Clasa a XI-a

I. Se consideră șirul $(a_n)_{n>0}$ dat de relația de recurență

$$a_{n+1} = a_n^2 + a, \text{ unde } a_0 = b,\ a,\ b > 0.$$

Să se studieze convergența șirului și apoi să se calculeze limita.

prof. *Marius Cavachi*

Scanned with OKEN Scanner

II. Fie $a \in (0, \infty)$ și $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ două șiruri de numere reale strict pozitive astfel încît $\lim_{n\to\infty} x_n = \infty$. Să se arate că:

a) $\lim_{n\to\infty} a_n^{x_n} = a \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} x_n(a_n - 1) = \ln a$.

b) Dacă $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ și $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sînt două astfel de șiruri pentru care $\lim_{n\to\infty} a_n^{x_n} = a$, $\lim_{n\to\infty} b_n^{x_n} = b$, atunci

$$\lim_{n\to\infty} (\sqrt{a_n \cdot b_n})^{x_n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{a_n + b_n}{2}\right)^{x_n} = \sqrt{ab}.$$

prof. *Gheorghe Andrei*

III. Dacă matricile $A, B, C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ comută două cîte două, atunci

$$\det(A^2 + B^2 + C^2 - AB - AC - BC) \geqslant 0.$$

* * *

IV. Să se arate că oricare ar fi matricile $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$, $\det(A + B)$ și $\det(A - B)$ sînt de aceeași paritate.

prof. *Gheorghe Bordea*

V. Se consideră numerele pozitive $a_1, a_2, \ldots, a_p, b_1, b_2, \ldots, b_q$.

Dacă $a_1^n + a_2^n + \ldots + a_p^n = b_1^n + b_2^n + \ldots + b_q^n$ pentru o infinitate de numere naturale n, atunci $p = q$ și cele două sisteme de numere coincid.

prof. *Marius Cavachi*

Clasa a XII-a

I. Fie mulțimea $M = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{3}{2}\right\}$.

a) Să se determine $m \in \mathbb{R}$ astfel încît $x * y = 2xy - 3x - 3y + m$ să fie operație algebrică pe mulțimea M.

b) Să se arate că pentru m astfel determinat $(M, *)$ este grup abelian, izomorf cu grupul multiplicativ al numerelor reale nenule.

c) Să se calculeze $a^n_* = a * a * \ldots * a$ prin cel puțin două metode.

prof. *Gheorghe Andrei*

II. Fie $(G, \cdot)$ un grup în care sînt satisfăcute proprietățile:

a) $(xy)^2 = (yx)^2$, oricare ar fi $x, y \in G$.

b) $x^2 \neq e$, oricare ar fi $x \in G \setminus \{e\}$, (e fiind elementul neutru).

Să se arate că:

1) $x^2 \cdot y^2 = y^2 \cdot x^2$, oricare ar fi $x, y \in G$;

2) $(xy)(yx)^{-1} = yx(xy)^{-1}$, oricare ar fi $x, y \in G$;

3) $(G, \cdot)$ este grup abelian.

prof. *Gheorghe Andrei*

III. Fie $(G, \cdot)$ un grup.

1. Dacă $f: G \to G$, $f(x) = x^2$ este morfism de grup, atunci G este abelian.

2. Dacă $f: G \to G$, $f(x) = x^3$ este un morfism injectiv, atunci G este abelian.

* * *

IV. Să se calculeze:

a) $\int \frac{a\cos x}{b \cdot e^{-x} + c(\sin x + \cos x)}\,dx$, $c \neq 0$; $\int \arccos(3x - 4x^3)\,dx$, $x \in (-1, 1)$.

b) Fie $f: I \to \mathbb{R}$, I fiind interval pe care $c\sin x + d\cos x \neq 0$. Fără a folosi metoda substituției, să se calculeze o primitivă a funcției $f(x) = \frac{a\sin x + b\cos x}{c\sin x + d\cos x}$.

prof. *Gheorghe Andrei*

Scanned with OKEN Scanner

V. Fie $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ o funcție care admite primitive pe $\mathbf{R}$. Să se arate că următoarele funcții admit primitive pe $\mathbf{R}$:

$$f_1(x) = (ax + b) \cdot f(x); \; f_2(x) = |ax + b| f(x); \; f_3(x) = f(ax + b);$$

$f_4(x) = f(|ax + b|)$; $a, b \in \mathbf{R}$, $a \neq 0$ și $g(x) = P(x) \cdot f(x)$, unde $P(x)$ este o funcție polinomială.

prof. *Gheorghe Andrei*,
prof. *Constantin Caragea*

ETAPA LOCALĂ – FEBRUARIE 1997 – JUDEȚUL SUCEAVA

Clasa a V-a

1. Să se enumere elementele mulțimii:

$$A = \{x \mid x = \overline{35ab};\ 15 \text{ divide pe } x\}.$$

* * *

2. Aflați numărul elevilor clasei a V-a, știind că dacă îi așezăm în rînd cîte doi, cîte trei, cîte patru sau cîte șase, rămîne de fiecare dată un elev singur.

Dacă îi așezăm în rînd cîte șapte, rămîne un rînd cu doi elevi.

Gheorghe Leonte, profesor, Arboré, Suceava

3. Care este cîtul și restul împărțirii numărului:

$N = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot 15 + 200$ la numărul 182?

Mircea Butnaru, profesor, Rișca, Suceava

4. Să se determine numerele de forma $\overline{17xy}$ care, împărțite la 9 dau restul 6, iar x și y iau valorile cele mai mari.

Ilie Bălășan, profesor, Fălticeni, Suceava

Clasa a VI-a

1. Media aritmetică a 49 de numere naturale consecutive este 105. Să se afle numerele.

Gh. Cornea, profesor, Fălticeni, Suceava

2. Calculați: $E = a^2 - a + b^2 - b + 2ab + 1$, știind că $a + b = 3$.

* * *

3. În triunghiul ABC ascuțitunghic, unghiul B este cu $32°$ mai mare ca unghiul C, iar înălțimea și bisectoarea duse din vîrful A, împart unghiul A în părți proporționale cu numerele 1, 2 și 3. Să se afle unghiurile triunghiului.

* * *

4. Pe laturile OX și OY ale unghiului XOY se iau punctele A, B aparținînd semidreptei OX, respectiv C, D aparținînd semidreptei OY astfel încît $OA \equiv OC$ și $OB \equiv OD$. Dacă $\{I\} = AD \cap BC$ atunci $\widehat{AOI} \equiv \widehat{DOI}$.

* * *

Clasa a VII-a

1. Să se determine $x \in \mathbf{Z}$ astfel ca $\dfrac{7x+8}{5x-2}$ să fie număr întreg.

Toader Papaghiuc, profesor, Suceava

2. Să se determine funcțiile $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ astfel încît :

$$2f(x+1) - f(1-x) = -42x + 1.$$

Dimitru Moscaliuc, profesor, Suceava

3. Fie D un punct al laturii BC a triunghiului ABC din care ducem perpendicularele pe AB și AC, și fie P respectiv Q picioarele acestor perpendiculare. Să se demonstreze că $\dfrac{DP}{DQ} = \dfrac{AC}{AB}$ dacă și numai dacă D este mijlocul laturii BC.

* * *

4. În paralelogramul $ABCD$ notăm cu M mijlocul laturii BC, cu N intersecția diagonalei BD cu AM, iar CN intersectează prelungirea laturii AD în P.

a) Să se demonstreze că $PA = AD$;

b) Dacă $AB = AC$ atunci $PN = \dfrac{2}{3} BD$.

* * *

Clasa a VIII-a

1. Să se determine funcțiile $f, g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ știind că :

$$2f(x+1) + g(x-1) = 2x + 14; \quad f(x+1) - 2g(x-1) = 6x - 18.$$

* * *

2. Demonstrați inegalitatea :

$$\sqrt{x-2} + \sqrt{x-1} + \sqrt{x+1} + \sqrt{x+2} < 4\sqrt{x},$$

Mihai Corduneanu, profesor, Rîșca, Suceava

* * *

3. Să se construiască o dreaptă care să se sprijine pe trei drepte oarecare din spațiu.

* * *

4. Să se arate că unind mijloacele muchiilor opuse ale unui tetraedru se obțin trei drepte concurente.

* * *

Clasa a IX-a

1. Arătați că numărul $\alpha = \sqrt[3]{54 + 30\sqrt{3}} + \sqrt[3]{54 - 30\sqrt{3}}$ este rațional.

Bogdan Grigoriu, profesor, Fălticeni

2. Fie $f:(0, \infty) \to \mathbf{R}$ o funcție cu proprietatea

$$\frac{f(x) + f(y)}{2} = f\left(\frac{2xy}{x + y}\right), \ (\forall) x, y \in (0, \infty).$$

Să se arate că: $f(x) + f(y) + f(z) = 3 \cdot f\left(\frac{3xyz}{xy + xz + yz}\right)$.

Vasile Monacu, profesor, Suceava

3. Să se rezolve inecuația: $x - [x] \leqslant 1 - \{x\}$.

Gheorghe Marchitan, profesor, Suceava

4. Să se demonstreze că dacă într-un patrulater convex două unghiuri opuse sînt obtuze atunci lungimea diagonalei determinată de vîrfurile lor este mai mică decît lungimea celeilalte diagonale.

* * *

Clasa a X-a

1. Să se arate că pentru orice număr natural $n \geqslant 2$, $\log_n(n + 1) + \log_{n+1}(n)$ nu este număr întreg.

Liviu Vlaicu, profesor Zalău

2. Fie ecuația $x^2 + ax + \frac{1}{3}(\alpha^2 + a\alpha + a^2) = 0$ cu $a, \ \alpha \in \mathbf{C}$. Dacă x_1, x_2 sînt rădăcinile ecuației, să se arate că x_1, x_2, α, sînt afixele vîrfurilor unui triunghi echilateral.

Gheorghe Marchitan, profesor, Suceava

3. Într-un triunghi oarecare ABC, are loc relația:

$$I_aA \cdot l_a + I_bB \cdot l_b + I_cC \cdot l_c \leqslant 2p^2,$$

unde I_a, I_b, I_c sînt centrele cercurilor exînscrise triunghiului ABC.

Vlad Ciubotaru, profesor, Suceava

4. Fie $ABCD$ un patrulater convex. Să se afle locul geometric al punctelor M din interiorul lui $ABCD$, astfel încît $\sigma[AMB] + \sigma[CMD] = k$, unde k este constantă. Pentru ce valori ale lui k locul nu este mulțimea vidă?

* * *

Clasa a XI-a

1. Fie triunghiul ABC de laturi a, b, c. Să se arate că dacă $abc < 2R$, atunci nu există nici un sistem de coordonate în planul triunghiului în care coordonatele vîrfurilor să fie numere întregi.

Gheorghe Marchitan, profesor, Suceava

2. Fie $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbf{Z})$, $a_{ij} = \operatorname{sgn}(i-j)$, $(\forall)\ i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Să se calculeze $\Delta_n = \det A$, $(n \in \mathbf{N})$.

Constantin Vărvărucă, profesor, Suceava

3. Se dă $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, astfel încît

$$\frac{xf(y) - yf(x)}{y - x} \geqslant 0, \quad (\forall)\ x, y \in \mathbf{R},\ x \neq y.$$

a) Să se arate că șirul (a_n), $a_n = \dfrac{f(1) + f(2) + \ldots + f(n)}{n^2}$ are limită.

b) Dacă în plus $|f(x) - f(y)| \leqslant k(x - y)$, $(\forall)\ x, y \in \mathbf{R}$, atunci șirul de mai sus este convergent

Mihai Piticari, profesor, Suceava

4. Fie (x_n) un șir de numere reale care satisface relația:

$$x_n x_{n+1} x_{n+2} = \frac{1}{n(n+1)} \cdot (x_n x_{n+1} - 5x_n x_{n+2} + 6x_{n+1} x_{n+2}), \ (\forall)\ n \in \mathbf{N},$$

și $x_1 = 2$, $x_2 = 1$. Să se calculeze termenul general al șirului.

Gheorghe Flocea, profesor, Suceava

Clasa a XII-a

1. Fie funcția $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, derivabilă și mărginită pe $\mathbf{R}$. Să se demonstreze că funcția:

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x} \cdot f'\left(\dfrac{1}{x}\right), & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

admite primitive pe $\mathbf{R}$.

Vlad Ciubotaru, profesor, Suceava

Scanned with OKEN Scanner

2. Să se determine funcțiile derivabile $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ cu proprietatea că: $f'(x) - kf(x) = P'(x) \cdot e^{kx}$, unde $P(x)$ este un polinom de grad n și $k \in \mathbf{R}$.

Vasile Monacu, profesor, Suceava

3. Fie $(G, \circ)$ un grup și $f : G \to G$ un endomorfism cu $f(x) \neq x, (\forall) x \neq e$ (e este elementul neutru al lui G). Să se arate că funcția $g : G \to G$, $g(x) = x^{-1}f(x)$ este bijectivă dacă și numai dacă $(\forall)\, y \in G$, $(\exists)\, x \in G$ cu proprietatea că $(f \circ f)(x) = f(xy)$.

* * *

4. Fie $(G, \circ)$ un grup necomutativ. Dacă $a, b \in G$ astfel încît:

$$a^{-1} \circ b \circ a = b \text{ și } b^{-1} \circ a \circ b = a^{-1} \text{ atunci } a^2 \circ b^2 = b^2.$$

* * *

SOLUȚIILE PROBLEMELOR DATE LA CONCURSUL DE MATEMATICĂ, ETAPA LOCALĂ DIN 15 FEBRUARIE 1987, JUDEȚUL TELEORMAN

prezentate de **Marius Burtea**, profesor, Alexandria

I. ENUNȚURI

Clasa a IX-a

1. a) Fiind dată familia de funcții de gradul al doilea $f_m : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f_m(x) = mx^2 - (8m - 1)x + 7m - 1$, $m \in \mathbf{R}^*$, să se arate că există două puncte fixe prin care trec toate parabolele asociate acestei familii.

b) Ce condiție trebuie să îndeplinească $a, b, c, m, n, p \in \mathbf{R}$ așa încît familia de parabole asociată funcțiilor $g_t(x) = (at + m)x^2 + (bt + n)x + ct + p$, $t \in \mathbf{R}$, să admită: un punct comun; două puncte comune; să nu admită puncte comune.

Manole Neagu

2. a) Să se arate că funcția $f : \mathbf{R}^* \to \mathbf{R}$, $f(x) = x - \frac{1}{x}$, nu este injectivă, dar este surjectivă;

b) Să se determine funcțiile $f : \mathbf{R}^* \to \mathbf{R}^*$, injective, pentru care există $m \in \mathbf{R}^*$, așa încît $f(x) \cdot (f \circ f)(x) = m$, $(\forall) x \in \mathbf{R}$.

Marius Burtea

3. Se consideră dreptele paralele a, b, punctul $A \in a$ fix, punctul $M \in b$ mobil și punctul N simetricul lui A față de M. Perpendiculara în M pe dreapta AN taie pe a în punctul B. Să se exprime distanța de la punctul A la dreapta BN în funcție de distanța dintre dreptele a și b.

* * *

4. Se consideră triunghiul ABC cu $m(\hat{A}) = 15$, $m(\hat{C}) = 30$ și punctul $D \in (AC)$ așa încît $(AD) \equiv (BC)$. Să se determine măsura unghiului $\widehat{ABD}$.

* * *

Clasa a X-a

1. Să se rezolve ecuațiile:

a) $25^x - 4 \cdot 5^x + 1 = 0$; b) $\log_{12}(\sqrt{x} + \sqrt[4]{x}) = \frac{1}{2} \cdot \log_9 x$.

Manole Neagu

2. Să se calculeze sumele:

a) $1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + \ldots + n \cdot n!$;

b) $\dfrac{1}{(a+1)(a+2)} + \dfrac{1}{(a+2)(a+3)} + \ldots + \dfrac{1}{(a+n)(a+n+1)}$,

unde $a \in \mathbb{N}$ și $n \in \mathbb{N}^*$.

* * *

3. Să se rezolve în mulțimea numerelor complexe sistemul de ecuații:

$x|y| = z^2$, $y|z| = x^2$, $z|x| = y^2$.

Marius Burtea

4. Fie O centrul cercului circumscris triunghiului ascuțitunghic ABC. Perpendicularele din O pe laturile triunghiului, taie laturile $[BC]$, $[CA]$ și $[AB]$ respectiv în M, N, P și arcele subîntinse de aceste laturi respectiv în Q, R, S. Să se arate că:

a) $OM + ON + OP = R + r$; b) $MQ + NR + PS = 2R - r$.

N. Loghin

Clasa a XI-a

1. a) Să se determine matricele $A, B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$ așa încît $A \cdot B = B \cdot {}^tA = I_2$.

b) Se consideră matricea $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$, inversabilă, așa încît $\det(A + A^{-1}) < 0$. Să se arate că $\det A \leqslant -1$.

Marius Burtea

2. Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{4}{3} \cdot \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k(k^2+2)} \right)^n$.

* * *

3. Dacă șirurile de numere reale $(x_n)_{n\geqslant 1}$, $(y_n)_{n\geqslant 1}$ au proprietatea că $n^2(x_k x_m - k x_m - m x_k) \leqslant (1-kn)(1+mn)$, $(\forall)\, k, m, n \in \mathbb{N}^*$ și $y_1 = 1$, $y_{n+1} = \sqrt{1 + x_{n+1} y_n}$, $(\forall)\, n \in \mathbb{N}^*$ atunci $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{y_n}{x_n} = 1$.

D.M. Bătinețu-Giurgiu

4. Pe catetele $[OA]$ și $[OB]$ ale triunghiului dreptunghic OAB se construiesc pătratele $OACD$, $OBEF$. Să se demonstreze că dreptele EF și CD se taie pe înălțimea OH a triunghiului OAB și de asemenea dreptele AE și BC se taie pe înălțimea OH.

* * *

Clasa a XII-a

1. Se consideră mulțimea de funcții $F = \{f_a : [1, \infty) \to [1, \infty),\ a \in \mathbb{R}_+^*\}$,

$f_a(x) = \dfrac{1}{2}\left((x + \sqrt{x^2-1})^a + (x - \sqrt{x^2-1})^a\right)$. Să se arate că:

a) $f_a \circ f_b = f_{ab}$, $(\forall)\, a, b \in \mathbb{R}_+^*$; b) Perechea $(F, \circ)$ este grup.

Marius Burtea

2. Se consideră mulțimea de matrice $\mathcal{M} = \{E, A, B, C\} \subset \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$, care formează grup față de înmulțirea matricelor. Să se determine matricele B și C dacă:

a) $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$; b) $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Marius Burtea

Scanned with OKEN Scanner

3. Să se determine primitivele funcției $f:[0,\pi]\to\mathbb{R}$, primitivabilă, care verifică relația $f(x)\sin x - f(\pi - x) = \cos^2 x$, $(\forall)\ x\in[0,\pi]$.

Georgeta Burtea

4. Să se determine primitivele funcției $f:[1,e]\to[0,e^2]$ cu proprietatea că $|f(x)-f(y)|\geq |x^2\ln x - y^2\ln y|$, $(\forall)\ x, y\in[1,e]$.

D.M. Bătineţu-Giurgiu

II. SOLUȚII

Clasa a IX-a

1. a) Observăm că $f_m(x) = m(x^2-8x+7)+x-1$ de unde deducem că pentru $x\in\{1,7\}$, $f_m(x)$ nu depinde de $m\in\mathbb{R}^*$. Deci punctele fixe sînt $A(1,0)$ și $B(7,6)$.

b) Se observă că $g_t(x) = t(ax^2+bx+c)+mx^2+nx+p$ și deci pentru $ax^2+bx+c=0$, g_t nu depinde de t. Deosebim mai multe cazuri:

i) $b^2-4ac>0$ și $a\neq 0$: în acest caz există două puncte fixe comune.

ii) $b^2=4ac$ și $a\neq 0$: în acest caz există un singur punct comun.

iii) $b^2-4ac<0$ și $a\neq 0$: în acest caz nu există puncte fixe comune.

Dacă $a=0$ atunci $g_t(x) = t(bx+c)+mx^2+nx+p$. Prin urmare dacă $b\neq 0$ avem un singur punct fix comun iar dacă și $b=0$ atunci nu avem puncte fixe comune.

2. a) Este evident că $f\left(-\frac{1}{x}\right) = f(x)$, $(\forall)\ x\in\mathbb{R}^*$ de unde deducem că f nu este injectivă. Totodată se observă că $(\forall)\ y\in\mathbb{R}$ ecuația $f(x)=y$ admite soluție și deci f este surjectivă.

b) Deoarece $(f\circ f)(x) = \frac{m}{f(x)}$, $(\forall)\ x\in\mathbb{R}^*$ deducem că $(f\circ f\circ f)(x) = f\left(\frac{m}{f(x)}\right) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow (f\circ f)(f(x)) = f\left(\frac{m}{f(x)}\right) = \frac{m}{f(f(x))} = \frac{mf(x)}{m} = f(x),\ (\forall)\ x\in\mathbb{R}^*$$

și deoarece f este injectivă deducem că $f(x) = \frac{m}{x}$, $(\forall)\ x\in\mathbb{R}^*$.

3. Construim NE perpendiculară pe a care este înălțimea în triunghiul ABN. De asemenea BM și AD sînt înălțimi în acest triunghi. Triunghiul ABN este isoscel deoarece BM este mediatoare și deci înălțimile AD și NE sînt congruente. Rezultă deci că $AD = NE = 2d$ unde d este distanța dintre dreptele a și b.

4. Fie $(CE$ bisectoarea unghiului $\widehat{ACB}$. Deoarece $m(\widehat{CAB}) = m(\widehat{ACE}) = 15$ rezultă că triunghiul AEC este isoscel. Deoarece $AD = BC$, $AE = CE$ și $m(\widehat{A}) = m(\widehat{BCE}) = 15$ deducem că triunghiurile DAE și ECB sînt congruente și din congruența lor rezultă $DE = BE$ adică triunghiul BDE este isoscel. De aici deducem că $m(\widehat{AED}) = m(\widehat{CEB}) = 30$ și atunci $m(\widehat{AED}) = 2m(\widehat{EBD})$ de unde obținem că $m(\widehat{EBD}) = 15$.

Clasa a X-a

1. a) Notînd $5^{|x|} = t$ și ținînd seama că $|x|\geq 0$ deducem că $t\geq 1$, și ecuația inițială este echivalentă cu ecuația $t^2-4t+1=0$ cu rădăcinile $t_1 = 2+\sqrt{3}$ și $t_2 = 2-\sqrt{3}<1$. Deducem deci că este admis numai $t = 2+\sqrt{3}$ și atunci $|x| = \log_5(2+\sqrt{3}) \Leftrightarrow x = \pm\log_5(2+\sqrt{3})$.

b) Notînd $2y = \log_3 x$ ecuația inițială este echivalentă cu ecuația $3^{2y}+3^y = 12^y \Leftrightarrow 3^y(1+3^y) = 3^y4^y \Leftrightarrow 1+3^y = 4^y$ cu soluția unică $y=1$. Deci $x = 9^2 = 81$.

2. a) Deoarece $k!k = (k+1)!-k!$ deducem că suma din enunț este egală cu $(n+1)!-1$.

b) Pe baza faptului că

$$\frac{1}{(a+k)(a+k+1)} = \frac{1}{a+k} - \frac{1}{a+k+1},\ (\forall)\ k\in\mathbb{N}^*,$$

deducem că suma din enunț este egală cu $\frac{n}{a+n+1}$, $(\forall)\ n\in\mathbb{N}^*$.

Scanned with OKEN Scanner

3. Este evident că sistemul dat este simetric și atunci dacă găsim o soluție (a, b, c) atunci orice permutare a acesteia este o nouă soluție. Din ecuațiile date prin trecere la module obținem alte trei egalități pe care dacă le adunăm membru cu membru deducem

$$|x|^2 + |y|^2 + |z|^2 = |x| \cdot |y| + |y| \cdot |z| + |z| \cdot |x| \Rightarrow |x| = |y| = |z| = r \in \mathbf{R}_+,$$

și deci sistemul inițial devine

$$xr = z^3, \quad yr = x^3, \quad zr = y^3.$$

Dacă $r = 0$ atunci $x = y = z = 0$.

Mai departe presupunem $r > 0$: atunci $x = x^2 \cdot r^{-1}$, $y = x^2 \cdot r^{-1} = z^4 \cdot r^{-3}$ și deci deducem că $z \cdot r = z^8 \cdot r^{-6}$. Deoarece $z \neq 0$ rezultă că $z^7 - r^7 = 0$ de unde deducem că $z = r\varepsilon$ unde $r \in \mathbf{R}_+^*$ și ε este rădăcină de ordinul șapte a unității. Deducem atunci că $x = r \cdot \varepsilon^2$, $y = r \cdot \varepsilon^4$, $r \in \mathbf{R}$, și deci $(x, y, z) = (r\varepsilon^2, r\varepsilon^4, r\varepsilon)$ și permutările acesteia unde $r \in \mathbf{R}_+$ iar ε este rădăcină de ordinul șapte a unității.

4. Din triunghiul dreptunghic OMC deducem $OM = R\cos A$. Scriind și analogele, după adunare rezultă $OM + ON + OP = R(\cos A + \cos B + \cos C)$ și de aici pe baza faptului că în manual se demonstrează că $1 + \frac{r}{R} = \cos A + \cos B + \cos C$ rezultă imediat relația cerută în enunț. Mai departe observăm că $MQ + NR + PS = R - QM + R - ON + R - OP = 2R - r$.

Clasa a XI-a

1. a) Notînd $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$ și rezolvînd în numere întregi sistemul care se obține din egalitatea matriceală dată obținem soluțiile

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ b-1 & -a \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} x & -1 \\ 1 & x \end{pmatrix} \text{ cu } a, b, x \in \mathbf{Z} \text{ sau}$$

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ b+1 & -a \end{pmatrix},$$

$$B = \begin{pmatrix} x & 1 \\ -1 & x \end{pmatrix} \text{ cu } a, b, x \in \mathbf{Z}.$$

b) Vom arăta mai general că dacă $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{Z})$ este o matrice inversabilă pentru care $\det(A + A^{-1}) < 0$ atunci $\det A \leq -1$. Într-adevăr, din egalitatea matriceală $A(I_n + A^{-2}) = A + A^{-1}$ prin aplicarea determinantului obținem: $\det A \cdot \det(I_n + A^{-2}) = \det(A + A^{-1}) < 0$. Deoarece $\det(I_n + A^{-2}) = \det(I_n^2 + (A^{-1})^2) \geq 0$ datorită faptului că I_n și A^{-1} comută, deducem din inegalitatea $\det A \cdot \det(I_n + A^{-2}) < 0$ că $\det A < 0$. Totodată din faptul că $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{Z})$ rezultă $\det A \in \mathbf{Z}$ și atunci din $\det A < 0$ deducem că $\det A \leq -1$.

2. Datorită faptului că $\frac{1}{k(k+2)} = \frac{1}{2k} - \frac{1}{2(k+1)}$, $(\forall)\ k \in \mathbf{N}^*$ deducem că $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+2)} = \frac{3}{4}$ și atunci, $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{4}{3} \cdot \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+2)} \right) = 1$. Dacă notăm $x_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+2)}$, limita din enunț devine:

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{4}{3} \cdot x_n \right)^n = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{4}{3} x_n - 1 \right)^n = e^{-\frac{4}{3}}.$$

3. Pe baza enunțului, considerînd $k = m$, deducem $(x_m - m)^2 \leq n^{-2}$, $(\forall)\ m, n \in \mathbf{N}^*$ de unde fixînd pe $m \in \mathbf{N}^*$ și trecînd la limită după $n \to \infty$ deducem $(x_m - m)^2 \leq 0$, $(\forall)\ m \in \mathbf{N}^*$, de unde rezultă $x_m = m$, $(\forall)\ m \in \mathbf{N}^*$. Rezultă atunci că $y_{n+1} = \sqrt{1 + (n+1)y_n}$, $(\forall)\ n \in \mathbf{N}^*$, $y_1 = 1$ și se demonstrează prin inducție matematică faptul că $n - 1 < y_n \leq n$, $(\forall)\ n \in \mathbf{N}^*$. Rezultă atunci că $\frac{n-1}{x_n} \leq \frac{n-1}{n} < \frac{y_n}{x_n} \leq \frac{n}{x_n} = 1$, $(\forall)\ n \in \mathbf{N}^*$ și atunci prin trecere la limită după $n \to \infty$ deducem $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{y_n}{x_n} = 1$.

Scanned with OKEN Scanner

4. Alegem drept axe de coordonate catetele OA și OB și deci avem $O(0,0)$, $A(a,0)$, $B(0,b)$. Ecuația dreptei AB este $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}-1=0$ iar a înălțimii OH este $\frac{x}{b}-\frac{y}{a}=0$. Coordonatele punctului de intersecție a dreptelor EF și CD sînt $I(-b,-a)$ și se constată cu ușurință că aceste coordonate verifică ecuația dreptei OH. Prin urmare punctul I se află pe înălțimea OH. Ecuația dreptei AE este $bx+(a+b)y-ab=0$ unde $C(a,-a)$, $E(-b,b)$, iar ecuația dreptei BC este $(a+b)x+ay-ab=0$. Punctul de intersecție al dreptelor AE și BC este punctul $M\left(\frac{ab^2}{a^2+ab+b^2}, \frac{a^2b}{a^2+ab+b^2}\right)$ și coordonatele acestui punct verifică ecuația dreptei OH. Prin urmare dreptele OH, AE și BC sînt concurente.

Clasa a XII-a

1. Fie $u(x)=x+\sqrt{x^2-1}$ și $v(x)=x-\sqrt{x^2-1}$. Se verifică imediat că $u(f_a(x))=u^a(x)$ și că $v(f_a(x))=v^a(x)$. Deci avem:

$$(f_a\circ f_b)(x)=f_a(f_b(x))=\frac{1}{2}(u^a(f_b(x))+v^a(f_b(x))=\frac{1}{2}(u^{ab}(x)+v^{ab}(x))=f_{ab}(x),\ (\forall)\ a,b\in\mathbf{R}_+^*.$$

Evident compunerea funcțiilor este asociativă iar elementul neutru este f_1. Totodată pentru orice $a\in\mathbf{R}_+^*$ și $f_a\in F$ rezultă $f_a\circ f_{a^{-1}}=f_{a^{-1}}\circ f_a=f_{a\cdot a^{-1}}=f_1$, adică fiecare element al mulțimii F este simetrizabil. Prin urmare perechea $(F,\circ)$ este grup.

2. a) Avem $A^2=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}$, $A^3=\begin{pmatrix}-1&0\\0&1\end{pmatrix}$, $A^4=E$ și deoarece

$$\{A,\ A^2,\ A^3,\ E\}\subset\mathcal{M},\text{ rezultă că }\mathcal{M}=\{E,\ A,\ A^2,\ A^3\}.$$

b) Este evident că $A^2=E$ și deoarece toate grupurile cu patru elemente sînt comutative deducem că $AB=BA$ și $AC=CA$. Deci dacă notăm $B=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}x&y\\z&t\end{pmatrix}$ din faptul că $AB=BA$ și $AC=CA$ deducem că $b=c=y=z=0$ și deci $B=\begin{pmatrix}a&0\\0&d\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}x&0\\0&t\end{pmatrix}$.

Deoarece mulțimea $\{E,\ A,\ B,\ C\}$ este stabilă față de înmulțire avem de considerat cazurile:

i) $BC=E$ de unde deducem că $B=\begin{pmatrix}a&0\\0&d\end{pmatrix}$ și $C=\begin{pmatrix}a^{-1}&0\\0&d^{-1}\end{pmatrix}$. Deoarece $B^2\in\mathcal{M}$ avem de analizat subcazurile:

i) $B^2=E$ care cu $BC=E$ conduce la $BB=BC$ adică $B=C$ ceea ce este imposibil;

ii) $B^2=B$ ceea ce este imposibil;

iii) $B^2=C\Rightarrow B^3=CB=E$ ceea ce nu se poate;

iiii) $B^2=A$ ceea ce conduce la $a\in\{-1,\ 1\}$, $d\in\{-i,\ i\}$. Deci $B=\begin{pmatrix}1&0\\0&i\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}1&0\\0&-i\end{pmatrix}$;

$B=\begin{pmatrix}1&0\\0&-i\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}1&0\\0&i\end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix}-1&0\\0&i\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}-1&0\\0&-i\end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix}-1&0\\0&-i\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}-1&0\\0&i\end{pmatrix}$.

Rezultă deci că:

$$\mathcal{M}=\left\{E,\ A=\begin{pmatrix}1&0\\0&-i\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}1&0\\0&i\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}\right\}\text{ sau}$$

Scanned with OKEN Scanner

$$\mathcal{M} = \left\{E,\ A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\right\}.$$

ii) $BC = B$ ceea ce este imposibil.

iii) $BC = C$ ceea ce este imposibil.

iiii) $BC = A$ de unde deducem că $B = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} a^{-1} & 0 \\ 0 & -d^{-1} \end{pmatrix}$ și deoarece $B^2 \in \mathcal{M} = \{E, A, B, C\}$ avem subcazurile:

k) $B^2 = A \Rightarrow BC = A \Rightarrow B^2 = BC$ ceea ce este imposibil;

kk) $B^2 = B$ ceea ce este imposibil;

kkk) $B^2 = C$ care împreună cu $BC = A$ conduce la $B^3 = CB = A$ și $A^2 = B^6$ deci $B^6 = E$ sau $B^2 = E$ ceea ce este fals.

kkkk) $B^2 = E$ care conduce la $a \in \{-1, 1\}$, $d \in \{-1, 1\}$ și astfel se obține că

$$\mathcal{M} = \left\{E,\ A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\right\}.$$

Prin urmare am epuizat toate cazurile și astfel se obțin mulțimile distincte:

$$\mathcal{M} = \left\{E,\ A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\right\} \simeq \mathbf{Z}_4,$$

$$\mathcal{M} = \left\{E,\ A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\right\} \simeq \mathbf{Z}_2,$$

$$\mathcal{M} = \left\{E,\ A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\right\} \simeq \mathbf{K} = \text{grupul lui } \textit{Klein}.$$

3. Din relația din enunț deducem

$$f(\pi - x)\sin x - f(x) = \cos^2 x, \tag{1}$$

și

$$f(x)\sin^2 x - f(\pi - x)\sin x = \sin x \cos^2 x, \tag{2}$$

Adunînd relațiile (1) și (2) deducem $(1 + \sin x + f(x))\cos^2 x = 0$. Dacă $x \in [0, \pi] - \left\{\frac{\pi}{2}\right\}$ atunci $f(x) = -1 - \sin x$, iar pentru $x = \frac{\pi}{2}$ avem $f(x) = a \in \mathbf{R}$. Deoarece f are o discontinuitate de prima speță în $x = \frac{\pi}{2}$ rezultă că dacă $a \in \mathbf{R} - \{-2\}$ atunci f nu are proprietatea lui *Darboux* și deci nu poate avea primitive. Conform enunțului f admite primitive și deci $a = -2$ și prin urmare $f(x) = -1 - \sin x$, $(\forall)\ x \in [0, \pi]$ iar primitivele sale sînt $F(x) = x + \cos x + C$.

4. Fie $g : [1, e] \to [0, e^2]$, $g(x) = x^2 \ln x$. Avem deci $|f(x) - f(y)| \geq |g(x) - g(y)|$, $(\forall) x, y \in [1, e]$ de unde deducem:

$$|f(e) - f(1)| \geq |g(e) - g(1)| = e^2, \tag{1}$$

Pe de altă parte,

$$\begin{cases} 0 \leq f(1) \leq e^2 \\ 0 \leq f(e) \leq e^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -e^2 \leq -f(1) \leq 0 \\ 0 \leq f(e) \leq e^2 \end{cases} \Rightarrow |f(e) - f(1)| \leq e^2, \tag{2}$$

Scanned with OKEN Scanner

Din (1) și (2) rezultă:

$$|f(e) - f(1)| = e^2, \tag{3}$$

În relația (3) avem egalitate dacă și numai dacă:

a) $f(1) = 0$, $f(e) = e^2$ sau b) $f(e) = 0$, $f(1) = e^2$.

a) $f(1) = 0$, $f(e) = e^2$. Din condițiile problemei avem

$|f(x)| = |f(x) - f(1)| \geq |g(x)| = |x^2 \ln x| \Rightarrow f(x) \geq x^2 \ln x$;

$|f(x) - f(e)| = |f(x) - e^2| \geq |g(x) - e^2| \Rightarrow e^2 - f(x) \geq e^2 - g(x) \Rightarrow f(x) \leq x^2 \ln x$.

Deci în acest caz $f(x) = x^2 \ln x$ și atunci

$$\int f(x)dx = \int x^2 \ln x dx = \frac{x^3}{3} \ln x - \frac{1}{3} \int x^2 dx = \frac{x^3}{3} \ln x - \frac{x^3}{9} + C.$$

b) $f(1) = e^2$, $f(e) = 0$. Avem:

$|f(x) - f(1)| \geq x^2 \ln x \Leftrightarrow |f(x) - e^2| \geq x^2 \ln x \Rightarrow e^2 - f(x) \geq x^2 \ln x \Leftrightarrow e^2 - x^2 \ln x \geq f(x)$;

$|f(x) - f(e)| = |f(x)| = f(x) \geq |x^2 \ln x - e^2| = e^2 - x^2 \ln x$.

Deci în acest caz $f(x) = e^2 - x^2 \ln x$ și atunci

$$\int f(x)dx = e^2 x - \frac{x^3}{3} \ln x + \frac{x^3}{9} + C.$$

CONCURSUL INTERJUDEȚEAN „SPIRU HARET", EDIȚIA A-III-A, TÎRGOVIȘTE, 13 DECEMBRIE 1987 (JUDEȚELE BACĂU, BRAȘOV, BUZĂU, CONSTANȚA, DÎMBOVIȚA, IALOMIȚA, PRAHOVA)

Clasa a VII-a

1. a) Fie $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = \max(2x - 1, 1 - 2x)$. Să se reprezinte grafic funcția f.

b) Fie $a, x, y, z > 0$ astfel încît $xyz = \frac{1}{a^3}$. Să se calculeze:

$$E = \frac{1}{1 + ax + a^2xy} + \frac{1}{1 + ay + a^2yz} + \frac{1}{1 + az + a^2xz}.$$

Virgiliu Caibăr, profesor, Tîrgoviște și *Petre Năchilă*, profesor, Ploiești

2. Pentru cîte valori naturale ale lui n, expresia $\frac{\sqrt{7} + 2\sqrt{n}}{2\sqrt{7} - \sqrt{n}}$ este număr întreg?

Dumitru Săvulescu, profesor, Bacău

Scanned with OKEN Scanner

3. a) Bisectoarele triunghiului ABC intersectează a doua oară cercul circumscris triunghiului în punctele A', B', C'. Demonstrați că punctul de intersecție a bisectoarelor triunghiului ABC este ortocentrul triunghiului $A'B'C'$;

b) Fie $ABCD$ un pătrat de latură a și M, N respectiv mijloacele laturilor BC și CD. Dreptele AM și BN se taie în P. Arătați că $DP = a$.

Ion Pascaru, profesor, Ploiești și
Constantin Păunescu, profesor, Urziceni

Clasa a VIII-a

1. a) Să se arate că oricare ar fi $a, b \in \mathbf{R}$ astfel încît $a - b = 2$, atunci $a^3 - b^3 = 8 + 6ab$;

b) Folosind a), să se rezolve ecuația $\sqrt[3]{5+x} - \sqrt[3]{x-3} = 2$, unde $x \in \mathbf{R}$.

Dumitru Mirică, profesor, Rm. Sărat, Buzău

2. Se consideră funcția $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = |x + 3| + m(2x - 3)$, unde $m \in \mathbf{R}$.

a) Să se determine valoarea parametrului m astfel încît graficul funcției să conțină originea axelor de coordonate;

b) Pentru valoarea lui m găsită la punctul a), să se reprezinte grafic funcția f;

c) Să se determine valorile pozitive ale lui x pentru care $f(x) < 0$.

Nicolae Păuna, profesor, Tîrgoviște

3. În triunghiul ABC bisectoarea BE ($E \in [AC]$) trece prin punctul O al înălțimii AD ($D \in [BC]$) astfel încît $OA = OB$. În punctul B se ridică perpendiculara BM pe planul triunghiului, astfel ca $MB = BA$.

a) Să se arate că triunghiul BAE este isoscel dacă și numai dacă măsura unghiului ACB este $45°$;

b) Să se determine perimetrul și aria triunghiului MAC în cazul cînd $AB = 2a$ și $m(\hat{O}) = 45°$;

c) În condițiile de la b) să se determine distanța de la punctul M la bisectoarele unghiurilor formate de dreptele AD și BE.

Dumitru Săvulescu, profesor, Bacău

Clasa a IX-a

1. Fie funcția $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = \begin{cases} -x + 1986, & \text{dacă } x \leqslant -1 \\ 1987, & \text{dacă } -1 \leqslant x \leqslant 1988 \\ x - 1 & \text{dacă } x \geqslant 1988 \end{cases}$

a) Să se determine o funcție $g: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $g \neq 1_{\mathbf{R}}$, astfel încît $f \circ g = f$.

b) Să se rezolve inecuația

$$\sum_{k=1}^{1987} f(-kx + 1987) \leqslant 1987^2$$

Petre Năchilă, profesor, Ploiești

Scanned with OKEN Scanner

2. Se consideră în plan segmentele distincte congruente $[AB]$, $[CD]$, $[EF]$, cu proprietatea $[AB] \cap [CD] = [AB] \cap [EF] = \emptyset$. Presupunem că există două puncte distincte M_1, M_2 astfel încît $M_kA^2 + M_kB^2 = M_kC^2 + M_kD^2 = M_kE^2 + M_kF^2$, $k = 1,2$.

Să se demonstreze că:

a) $[CD] \cap [EF] = \emptyset$;

b) C, D, E, F sînt vîrfurile unui dreptunghi.

C. Stoicescu, profesor, Tîrgoviște

3. Fie triunghiul ABC, cu lungimile laturilor $a \leqslant b \leqslant c$ ($a = BC$ și analoagele). Demonstrați că:

$$a\,m(\hat{A}) + b\,m(\hat{B}) + c\,m(\hat{C}) \geqslant a\,m(\hat{B}) + b\,m(\hat{C}) + c\,m(\hat{A}).$$

* * *

Clasa a X-a

1. Să se rezolve ecuația:

$$(\cos x)^{\log_{\sin x}\cos x} - \log_{\sin x}\cos x + 1 = \sin x,\ x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right).$$

Cornel Berceanu, profesor, Bacău

2. Fie $ABCD$ un paralelogram și M, N, P, Q mijloacele laturilor AB, BC, CD, DA. Dreptele AP, CM, BQ, DN se taie cîte două, formînd un paralelogram.

Aflați raportul dintre aria acestui paralelogram și aria paralelogramului inițial.

* * *

3. Fie triunghiul ABC de laturi a, b, c.

a) Dacă $a < b < c$, să se arate că:

$$b < ab + a + 1 \text{ sau } c < bc + b + 1;$$

b) Stabiliți în ce condiții trei elemente ale mulțimii

$$E = \left\{a,\ p,\ r\ \operatorname{ctg}\frac{A}{2},\ r\ \operatorname{ctg}\frac{B}{2}\right\}$$

pot fi lungimile laturilor unui triunghi. (Notațiile sînt cele uzuale pentru triunghiul ABC).

Olimpia Popescu, profesoară, Ploiești și
Cornel Berceanu, profesor, Bacău

Clasa a XI-a

1. Există numere reale x, y, $z \geqslant 1$ astfel încît să fie verificată inegalitatea

$$\sqrt{x-1} + \sqrt{y-1} + \sqrt{z-1} > \sqrt{xyz+z}\ ?$$

* * *

Scanned with OKEN Scanner

2. Fie matricea $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ și $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$. Să se demonstreze echivalența

$$A^k = 0 \Leftrightarrow A^2 = 0.$$

* * *

3. Fie $a_1, a_2, \ldots, a_{4n+1}$ numere strict pozitive în progresie aritmetică. Se consideră șirul (x_n) dat de:

$$x_n = \frac{a_{2n+1} \cdot a_{2n+3} \cdot \ldots \cdot a_{4n+1}}{a_{2n} \cdot a_{2n+2} \cdot \ldots \cdot a_{4n}}.$$

Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

Liviu Pîrșan, problemă publicată în G.M.

Clasa a XII-a

1. Fie $(G,\circ)$ un grup abelian, H un subgrup al său și $\alpha \in G \setminus H$ un element pentru care există $k \in \mathbb{N}^*$ astfel încît $\alpha^k \in H$. Notînd cu n cel mai mic număr natural nenul pentru care $\alpha^n \in H$, să se demonstreze că:

a) Mulțimile H, αH, $\alpha^2 H$, ..., $\alpha^{n-1} H$ sînt disjuncte două cîte două (am notat $\beta H = \{\beta x \mid x \in H\}$);

b) $L = H \cup \alpha H \cup \alpha^2 H \cup \ldots \cup \alpha^{n-1} H$ este un subgrup al grupului G;

c) Care dintre mulțimile $\alpha^i H$, $0 \leq i \leq n-1$ este subgrup al lui L?

Marcel Țena

2. Fie $(G, +)$ un grup și H un subgrup al său.

a) Demonstrați că dacă $\alpha \in H$ și $\beta \in G \setminus H$, atunci $\alpha + \beta \in G \setminus H$;

b) Deduceți pe baza lui a) proprietățile:

P_1: Suma dintre un număr rațional și un număr irațional este un număr irațional;

P_2: Dacă $I \subset \mathbb{R}$ este un interval și $f, g : I \to \mathbb{R}$ două funcții astfel că f are primitive iar g nu are primitive, atunci $f + g$ nu are primitive.

* * *

3. a) Se consideră o parabolă și familia coardelor parabolei de pantă dată $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Să se demonstreze că lungimea unei coarde din familie este funcție strict crescătoare de distanță de la punctul de contact al tangentei de pantă λ, la parabolă, la coarda respectivă;

b) Să se arate că într-o parabolă nu se poate înscrie nici un paralelogram.

Acad. *Nicolae Teodorescu*

Scanned with OKEN Scanner

PROBLEME REZOLVATE PENTRU GIMNAZIU

Clasa a V-a

Problema E : 9084* (G.M.3/1987, pag. 116)

Pentru ce $x \in \mathbf{N}$ avem pe rînd :

a) $\frac{3}{5} > \frac{x+1}{35} > \frac{3}{7}$; b) $\frac{2}{3} < \frac{x+1}{5} < \frac{5}{7}$.

* * *

Soluție : a) Avem șirul de echivalențe :

$$\frac{3}{5} > \frac{x+1}{35} > \frac{3}{7} \Leftrightarrow \frac{21}{35} > \frac{x+1}{35} > \frac{15}{35} \Leftrightarrow$$

$$15 < x+1 < 21 \Leftrightarrow 14 < x < 20, \quad (1).$$

Numerele naturale x care verifică inegalitățile din (1) sînt

$$x \in \{15, 16, 17, 18, 19\}.$$

b) $\frac{2}{3} < \frac{x+1}{5} < \frac{5}{7}$. Vom rezolva pe rînd cele două inegalități : $\frac{2}{3} < \frac{x+1}{5} \Leftrightarrow 10 < 3x+3 \Leftrightarrow 3x > 7$, (2), deci $x \in \mathbf{N}$, $x \geqslant 3$ verifică inegalitatea (2). Pe de altă parte $\frac{x+1}{5} < \frac{5}{7} \Leftrightarrow 7x+7 < 25 \Leftrightarrow 7x < 18$, (3), deci $x \in \mathbf{N}$, $x \leqslant 2$ verifică inegalitatea (3). Rezultă că nu există numere naturale x care să verifice dubla inegalitate din enunț.

Clasa a VI-a

Problema E : 9089* (G.M.3/1987, pag. 116)

Fie un triunghi isoscel ABC cu $\hat{A} = 90°$. Pe laturile congruente se construiesc în exterior triunghiurile echilaterale ABD și ACE. AD întîlnește pe CE în M. Să se demonstreze că :

1) $AM \perp CE$;

2) *Patrulaterul $BCDE$ este trapez isoscel.*

Georgiana Mirea, elevă, Tîrgoviște

Soluție : Din ipoteză avem :

ΔABC isoscel cu $\hat{A} = 90° \Rightarrow AB \equiv AC$ și $\widehat{ABC} \equiv \widehat{ACB} = 45°$, (1).

ΔABD echilateral $\Rightarrow AB \equiv AD \equiv BD$ și $\widehat{BAD} \equiv \widehat{BDA} \equiv \widehat{ABD} = 60°$, (2).

ΔACE echilateral $\Rightarrow AC \equiv AE \equiv CE$ și $\widehat{CAE} \equiv \widehat{AEC} \equiv \widehat{ACE} = 60°$, (3).

1) Ținînd seama de (1) și (2) deducem $\widehat{DAC} = 60° + 90° = 150°$, deci $\widehat{CAM} = 180° - \widehat{DAC} = 30°$. Știind că $\widehat{CAE} = 60°$ rezultă că AM

este bisectoarea unghiului $\widehat{CAE}$ a triunghiului echilateral ACE, prin urmare ea este și înălțime, deci $AM \perp CE$.

2) Ținînd seama de măsurile unghiurilor din jurul punctului A deducem că $\widehat{DAE} = 360° - (\widehat{DAB} + \widehat{BAC} + \widehat{CAE}) = 150°$. Din (2) și (3) rezultă că $AD \equiv AE$, prin urmare triunghiul ADE este isoscel și putem calcula $\widehat{AED} = \frac{180° - \widehat{DAE}}{2} = 15°$.

În patrulaterul $BCED$ avem: $\widehat{BCE} + \widehat{CED} = 45° + 60° + 60° + 15° = 180°$; deci unghiurile $\widehat{BCE}$ și $\widehat{CED}$ sînt interne de aceeași parte a secantei suplementare, rezultă că $BC \parallel DE$, prin urmare $BCED$ este trapez. Din (2) și (3) avem $BD \equiv CE$, deci trapezul $BCED$ este isoscel.

Problema E : 9093* (G.M. 3/1987, pag. 117)

Dacă $a,b,c \in \mathbf{Z}$ și $2a - 3b + 4c = 0$, atunci 6 divide numărul $A = b(a - c)$.

Daniel Cojocaru, profesor, Slatina

Soluție. Relația din enunț se mai poate scrie:

$$2a - 3b + 4c = 0 \Leftrightarrow 3b = 2a + 4c \Leftrightarrow 3b = 2(a + 2c). \qquad (1)$$

Numerele 2 și 3 fiind prime între ele rezultă că b se divide cu 2 și numărul $a + 2c$ se divide cu 3, adică $b = 2k$, $k \in \mathbf{Z}$, (2) și $a + 2c = 3p$, $p \in \mathbf{Z}$, (3). Din (3), scăzînd în ambii membri $3c$, obținem:

$$a + 2c - 3c = 3p - 3c \Leftrightarrow a - c = 3(p - c),\ \{a, c, p\} \subset \mathbf{Z},$$

de unde rezultă că $a - c$ este divizibil cu 3, adică $a - c = 3l$, $l \in \mathbf{Z}$, (4).

Ținînd seama de (2) și (4), numărul A se scrie:

$$A = b(a - c) \Rightarrow A = 2k \cdot 3l \Rightarrow A = 6kl,\ k, l \in \mathbf{Z},$$ deci numărul A se divide cu 6.

Clasa a VII-a

Problema E : 9097* (G.M. 3/1987, pag. 117)

Se dă triunghiul isoscel ABC în care $\hat{B} = \hat{C} = 70°$. Pe laturile AB și AC se consideră punctele F și respectiv E astfel încît $\sphericalangle ABE = 15°$ și $\sphericalangle ACF = 30°$. Se cere să se calculeze $\sphericalangle AEF$.

Vasile Mîrmea, matematician, Brăila

Soluție. Din $\widehat{ABC} = 70°$ și $\widehat{ABE} = 15°$ rezultă $\widehat{EBC} = 55°$; din $\widehat{ACB} = 70°$ și $\widehat{ACF} = 30°$ rezultă $\widehat{BCF} = 40°$.

Scanned with OKEN Scanner

În triunghiul BCE calculăm $\widehat{BEC} = 180° - (\widehat{EBC} + \widehat{ECB}) = 180° - 125° = 55°$. Prin urmare $\widehat{BEC} \equiv \widehat{EBC} = 55°$, deci triunghiul BCE este isoscel, de unde avem $BC \equiv EC$, (1).

În triunghiul BCF calculăm $\widehat{BFC} = 180° - (\widehat{FBC} + \widehat{BCF}) = 180° - 110° = 70°$. Deci $\widehat{BFC} \equiv \widehat{FBC} = 70°$, prin urmare triunghiul BCF este isoscel, de unde avem $BC \equiv FC$, (2).

Din (1) și (2) rezultă $FC \equiv EC$, deci triunghiul CEF este isoscel cu unghiul de la vîrf de 30°; obținem $\widehat{FEC} \equiv \widehat{EFC} = \frac{180° - 30°}{2} = 75°$.

De unde $\widehat{AEF} = 180° - \widehat{FEC}$, deci $\widehat{AEF} = 105°$.

Problema E:9099* (G.M. 3/1987, pag. 117)
Determinați numerele întregi m și n astfel încît

$$mn - (m + n) = 1986.$$

I. Safta, profesor, Pitești

Soluție. Relația din enunț se scrie succesiv:

$$mn - (m + n) = 1986 \Leftrightarrow mn - m - n = 1986 \Leftrightarrow mn - m - n + 1 = 1987 \Leftrightarrow m(n - 1) - (n - 1) = 1987 \Leftrightarrow (m - 1)(n - 1) = 1987.$$

m și n fiind numere întregi, rezultă că $(m - 1)$ și $(n - 1)$ sînt divizori întregi ai lui 1987; dar 1987 este număr prim, deci divizorii lui sînt $\{\pm 1, \pm 1987\}$; prin urmare avem următoarele cazuri:

$$\begin{cases} m - 1 = 1 \\ n - 1 = 1987, \end{cases} \quad \begin{cases} n - 1 = 1 \\ m - 1 = 1987, \end{cases} \quad \begin{cases} m - 1 = -1 \\ n - 1 = -1987, \end{cases} \quad \begin{cases} n - 1 = -1 \\ m - 1 = -1987, \end{cases}$$

de unde obținem:

$$\begin{cases} m = 2 \\ n = 1988, \end{cases} \quad \begin{cases} n = 2 \\ m = 1988, \end{cases} \quad \begin{cases} m = 0 \\ n = -1986, \end{cases} \quad \begin{cases} n = 0 \\ m = -1986. \end{cases}$$

Clasa a VIII-a

Problema E: 9101* (G.M. 3/1987, pag. 118)
Să se arate că pentru orice $x \in \mathbf{R}$, avem

$$x^4 + x^2 + 1 \geq \frac{3}{2} x(x^2 + 1).$$

Valerian Vlăescu, profesor, Dorohoi

Soluție. Inecuația din enunț este echivalentă cu:

$$2x^4 + 2x^2 + 2 \geq 3x^3 + 3x \Leftrightarrow 2x^4 - 3x^3 + 2x^2 - 3x + 2 \geq 0, \quad (1).$$

Scanned with OKEN Scanner

Deoarece suma coeficienților în expresia din ultima inegalitate este zero rezultă că $(x-1) \mid (2x^4 - 3x^3 + 2x^2 - 3x + 2)$, adică (1) este echivalentă cu:

$$(x-1)(2x^3 - x^2 + x - 2) \geqslant 0.$$

Raționînd ca mai sus obținem că (2) este echivalentă cu:

$$(x-1)^2(2x^2 + x + 2) \geqslant 0 \Leftrightarrow (x-1)^2\left[x^2 + \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{7}{4}\right] \geqslant 0,$$

inegalitate adevărată, pentru orice $x \in \mathbf{R}$.

Problema E : 9104* (G. M. 3/1987, pag. 118)

Latura unui triunghi echilateral este a. Să se determine pe segmentul AB un punct P, astfel încît volumul corpului obținut prin rotirea triunghiului APC în jurul dreptei AC să fie de patru ori volumul corpului obținut prin rotirea triunghiului BPC în jurul laturii BC.

Andrei Poroliseanu, profesor, Sibiu

Soluție. Prin rotirea triunghiului APC în jurul dreptei AC se formează două corpuri cu baza comună și vîrfurile în A și C. Dacă P'' este simetricul lui P față de dreapta AC, iar $\{N\} = AC \cap PP''$, atunci cercul de rază PO este cercul de bază al celor două conuri. Vom nota cu $x = AP$, cu V_1 volumul conului APP'' și cu V_2 volumul conului PCP''. Vom avea:

$$V_1 + V_2 = \frac{\pi}{3} PN^2 \cdot AN + \frac{\pi}{3} PN^2 \cdot NC = \frac{\pi}{3} PN^2(AN + NC) =$$

$$= \frac{\pi}{3} PN^2 \cdot AC.$$

În triunghiul dreptunghic PNA avem că $\sin \widehat{PAN} = \frac{PN}{PA}$, deci $PN = x \cdot \frac{3}{2}$. Rezultă că $V_1 + V_2 = \frac{\pi a x^2}{4}$, unde $a = AC$.

Similar, prin rotirea triunghiului PBC în jurul dreptei BC se formează două conuri cu baza comună. Dacă notăm cu V_1' și V_2' volumele celor două conuri, după un calcul similar cu cel de mai sus rezultă că:

$$V_1' + V_2' = \frac{\pi a}{4}(a - x), \text{ unde } a = AC.$$

Condiția din ipoteza problemei devine $V_1 + V_2 = 4(V_1' + V_2') \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{\pi a x^2}{4} = 4 \cdot \frac{\pi a}{4}(a - x)^2 \Leftrightarrow x^2 = 4(a - x)^2 \Leftrightarrow x^2 - [2(a - x)]^2 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x - 2a + 2x)(x + 2a - 2x) = 0 \Leftrightarrow (3x - 2a)(2a - x) = 0$ adică $x = \frac{2a}{3}$ sau $x = 2a$.

Scanned with OKEN Scanner

Dar, punctul P se află între punctele A și B, deci $AP < AB = a$ deci $AP = x = \frac{2a}{3}$.

PROBLEME REZOLVATE PENTRU LICEU

Clasa a IX-a

Problema 21040* (G.M. 3/1987, pag. 121)
Să se arate că mediana relativă la latura $[AC]$ *a unui triunghi* ABC *de laturi* $AB = 13$, $BC = 5$, $AC = 10$ *este împărțită în trei părți congruente de cercul înscris în triunghi.*
(În legătură cu problema 20256, G.M.11/1984).

Lucian Tufescu, profesor, Craiova

Comentariu și soluție date de *Marcel Țena*, redactor principal G.M.

Vom caracteriza triunghiurile cu proprietatea din enunț, adică având o mediană pe care punctele de intersecție cu cercul înscris determină trei segmente congruente. Mai precis, vom demonstra următorul rezultat:

Mediana corespunzătoare laturii $[AC]$ *a unui triunghi* ABC *este împărțită în trei părți congruente de cercul înscris în triunghi dacă și numai dacă* $\frac{AB}{13} = \frac{BC}{5} = \frac{AC}{10}$.

Altfel spus, singurele triunghiuri cu proprietatea respectivă sînt cele care au laturile proporționale cu numerele 13, 5, 10, ele constituind o clasă de echivalență în raport cu relația de asemănare (care se știe că este o relație de echivalență pe mulțimea triunghiurilor).

Abstracție făcînd așadar de o asemănare, există un singur triunghi ce satisface proprietatea din enunț și scopul problemei de față este de a-l pune în evidență. Problema M 128 din cartea „Probleme de matematică traduse din revista sovietică Kvant" (E.D.P. 1983), publicată cu nr. 20256 și în G.M. 11/1984, (autor *Dorel Becheanu* din Slatina), cerea aflarea raportarelor laturilor unui triunghi, în ipoteza că o mediană a acestuia satisface proprietatea de care am vorbit. Deci, fără a formula explicit rezultatul în enunțul său, această problemă viza în fond tocmai caracterizarea clasei respective de triunghiuri.

Să mai menționăm că problema C : 721 din G.M. 9/1987, ai cărei autori sînt *Iacob Hadîrcă* și *Ciprian Pavel* din Breaza, cere să se demonstreze că într-un triunghi în care o mediană este împărțită de cercul înscris în trei părți congruente, există relația

$$a^2 + b^2 + c^2 = 6(r^2 + 4Rr).$$

Bineînțeles, ținînd seama că într-un astfel de triunghi laturile vor fi proporționale cu numerele 13, 5, 10, folosind formulele $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, $R = \frac{abc}{4S}$, $r = \frac{S}{p}$ constatăm că relația din problemă se reduce la un simplu calcul.

Să trecem, în sfîrșit, la a demonstra rezultatul pe care l-am anunțat.

Vom presupune mai întîi că mediana corespunzătoare laturii $[AC]$ este împărțită de cercul înscris în trei segmente congruente și ne propunem să arătăm că $\frac{a}{5} = \frac{b}{10} = \frac{c}{13}$ (notațiile sînt cele obișnuite).

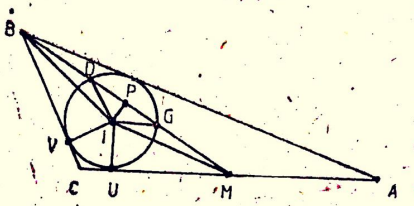
Vom nota cu M mijlocul laturii $[AC]$, cu D și G punctele în care cercul înscris taie mediana BM (G este chiar centrul de greutate al triunghiului), cu I centrul cercului înscris, iar cu U și V punctele de contact ale acestui cerc cu laturile $[AC]$, respectiv $[BC]$. (vezi fig.).

Deoarece $BD = DG = GM$, rezultă $BD \cdot BG = MG \cdot MD$, deci punctele B și M au puteri egale față de cercul înscris. Aceasta se mai scrie $BI^2 - r^2 = MI^2 - r^2$, adică $BI = MI$. Cum $IV = IU = r$, înseamnă că triunghiurile dreptunghice BVI și MUI sînt congruente și, atunci, $BV = UM$, (1). Se știe însă că $BV = p - b = \frac{a - b + c}{2}$ iar $UM = CM - CU = \frac{b}{2} - (p - c) = \frac{b}{2} - \frac{a + b - c}{2} = \frac{c - a}{2}$ și atunci înlocuind în (1) obținem $b = 2a$, (2).

Vom scrie acum teorema medianei IG în triunghiul DIM, în care avem:

$$IG = DI = r,\ IM = \sqrt{IU^2 + UM^2} = \sqrt{r^2 + \frac{(c-a)^2}{4}},$$

$$DM = \frac{2}{3}BM = \frac{\sqrt{2(a^2+c^2)-b^2}}{3}.$$



Obținem succesiv:

$$4IG^2 = 2(DI^2 + IM^2) - DM^2 \Leftrightarrow 4r^2 = 2\left[r^2 + r^2 + \frac{(c-a)^2}{4}\right] - \frac{2(a^2+c^2)-b^2}{9},$$

sau, după efectuarea calculelor, $5a^2 + 2b^2 + 5c^2 - 18ac = 0$.
Ținînd seama și de (2), ultima egalitate devine

$$5c^2 - 18ac + 13a^2 = 0, \qquad (3).$$

Din (3) rezultă $c = a$ sau $c = \frac{13a}{5}$. Dacă am avea $a = c$, triunghiul ABC ar fi isoscel cu baza $[AC]$, mediana AM ar fi și bisectoare și am avea $U = M$, deci cercul înscris ar tăia mediana AM în D și M; ar urma că $G = M$, ceea ce ar fi o contradicție.

Reciproc, să presupunem că $a = 5k$, $b = 10k$, $c = 13k$ $(k > 0)$ și să demonstrăm că punctele D și G, situate pe mediana BM astfel încît $BD = DG = GM$, sînt totodată puncte pe cercul înscris în triunghi.

Efectuînd calculele, găsim $p = 14k$, $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = 6\sqrt{14}\,k^2$, $r = \frac{S}{p} = k\sqrt{\frac{18}{7}}$. Folosind teorema lui *Pitagora* în triunghiul IUM în care $UM = \frac{c-a}{2} = 4k$, obținem $IM = k\sqrt{\frac{130}{7}}$. Fie P mijlocul medianei $[BM]$. Cu teorema medianei găsim $BM = 8k\sqrt{2}$, deci $PM = \frac{BM}{2} = 3k\sqrt{2}$, iar $PG = PM - GM = \frac{BM}{2} - \frac{BM}{3} = k\sqrt{2}$.

În triunghiul BVI aplicînd teorema lui *Pitagora*, obținem $BI = k\sqrt{\frac{130}{7}}$, deci $BI = IM$ și atunci în triunghiul isoscel BIM mediana IP va fi și înălțime, deci $IP \perp BM$.

În sfîrșit, folosind teorema lui *Pitagora* în triunghiurile IPM și IPG, obținem $IP = \sqrt{IM^2 - PM^2} = k\sqrt{\frac{4}{7}}$, $IG = \sqrt{IP^2 + PG^2} = k\sqrt{\frac{18}{7}} = r$.

Scanned with OKEN Scanner

Ultima egalitate arată că G aparține cercului înscris. Analog se arată că $ID = r$, deci D aparține aceluiași cerc.

În acest fel, problema este complet rezolvată.

Mai facem observația că, o proprietate similară pentru o bisectoare sau o înălțime (adică de a fi împărțită de cercul înscris în trei părți congruente), nu poate exista în nici un triunghi și acest fapt poate constitui un exercițiu pentru cititori.

Problema 21037* (G.M. 3/1987, pag. 120)

a) *Să se demonstreze că există o infinitate de numere naturale ale căror pătrate se pot scrie ca suma cuburilor a trei numere naturale.*

b) *Să se demonstreze că există o infinitate de numere naturale ale căror cuburi se pot scrie ca suma cuburilor a trei numere naturale.*

Mihail Bencze, profesor, Brașov

Soluție. a) Se verifică ușor următoarea identitate:

$$(n^4 + 2n)^3 + (2n^3 + 1)^3 + (3n^2)^3 = (n^6 + 7n^3 + 1)^3, \ n \in \mathbf{N}.$$

Deoarece mulțimea numerelor naturale de forma $n^6 + 7n^3 + 1$, $n \in \mathbf{N}$, este infinită rezultă afirmația de la punctul a).

b) Similar, se arată că:

$$(3n^2 + 5n - 5)^3 + (4n^2 - 4n + 6)^3 + (5n^2 - 5n - 3)^3 =$$
$$= (6n^2 - 4n + 4)^3, n \in \mathbf{N}, n \geqslant 2.$$

Clasa a X-a

Problema 21046 (G.M. 3/1987, pag. 121)

Triunghiul ascuțitunghic ABC este înscris într-un cerc de centru O. Diametrele (BO) și (CO) intersectează laturile (AC), respectiv (AB) în E și F. Fie $P \in [BF]$ și $Q \in [CE]$. Demonstrați că punctul O este situat pe dreapta PQ dacă și numai dacă

$$\frac{PB}{PA} \cdot \sin 2B + \frac{QC}{QA} \cdot \sin 2C = \sin 2A.$$

Vasile Berghea, Avrig

Soluție. Fie $\{D\} = AO \cap BC$; A', B', C', D' proiecțiile punctelor A, B, C, D pe dreapta PQ; M și N intersecțiile cu DD' respectiv CC' ale paralelei dusă prin B la PQ; D_1 și D_2 măsurile unghiurilor formate de AD cu BC.

Demonstrăm implicația $O \in PQ \Rightarrow \frac{PB}{PA} \cdot \sin 2B + \frac{QC}{QA} \cdot \sin 2C = \sin 2A$.

$\triangle BMD \sim \triangle BNC \Rightarrow \frac{BD}{BC} = \frac{MD}{NC} = \frac{DD' - BB'}{CC' - BB'}$. Calculînd pe DD' din această egalitate se obține $DD' = \frac{DC}{BC} \cdot BB' + \frac{BD}{BC} \cdot CC'$, (1).

Din asemănarea triunghiurilor $BB'P$ și $CC'Q$ cu $AA'P$ respectiv $AA'Q$ rezultă $\frac{PB}{PA} = \frac{BB'}{AA'}$, (2) și $\frac{QC}{QA} = \frac{CC'}{AA'}$, (3). Înmulțim (2) cu $\frac{DC}{BC}$ și (3) cu $\frac{BD}{BC}$ apoi adunăm și ținem seama de (1). Se obține $\frac{DC}{BC} \cdot \frac{PB}{PA} + \frac{BD}{BC} \cdot \frac{QC}{QA} = \frac{DD'}{AA'}$, (4).

Scanned with OKEN Scanner

Din $\Delta DD'O \sim \Delta AA'O \Rightarrow \frac{DD'}{AA'} = \frac{OD}{OA}$ care înlocuită în (4) conduce la

$$\frac{DC}{BC} \cdot \frac{PB}{PA} + \frac{BD}{BC} \cdot \frac{QC}{QA} = \frac{OD}{OA}, \tag{5}$$

Înălțimea h_a și raza OA sînt izogonale deci $m(\widehat{OAB}) = \frac{\pi}{2} - \hat{C}$.

Teorema sinusurilor în ΔABD și ΔACD ne dă

$$\frac{BD}{\sin\left(\frac{\pi}{2} - C\right)} = \frac{c}{\sin D_1} \text{ și } \frac{DC}{\sin\left(A - \frac{\pi}{2} + C\right)} = \frac{b}{\sin D_2} \text{ sau}$$

$$\frac{BD}{\cos C} = \frac{c}{\sin D_1} \text{ și } \frac{DC}{\cos B} = \frac{b}{\sin D_2}.$$

Dar $\sin D_1 = \sin D_2$ deci $\frac{DC}{BD} = \frac{b\cos B}{c\cos C}$. Folosind proporțiile derivate și identitatea $b\cos B + c\cos C = a\cos(B - C)$ deducem

$$\frac{DC}{BC} = \frac{b\cos B}{a\cos(B-C)} \text{ și } \frac{BD}{BC} = \frac{c\cos C}{a\cos(B-C)}, \tag{6}$$

Din puterea punctului D față de cerc obținem $OD^2 - R^2 = -BD \cdot DC$ și deci

$$\frac{OD}{OA} = \frac{OD}{R} = \sqrt{1 - \frac{BD \cdot DC}{R^2}} = \sqrt{1 - \frac{bc\cos B\cos C}{R^2\cos^2(B-C)}} =$$

$$= \sqrt{1 - \frac{\sin 2B \sin 2C}{\cos^2(B-C)}} = \frac{\sqrt{\cos^2(B-C) - \sin 2B \sin 2C}}{\cos(B-C)} = \frac{\sqrt{\cos^2(B+C)}}{\cos(B-C)} =$$

$$= \frac{\sqrt{\cos^2 A}}{\cos(B-C)} = \frac{\cos A}{\cos(B-C)}, \tag{7}$$

Înlocuind (6) și (7) în (5) rezultă $b\cos B\frac{PB}{PA} + c\cos C\frac{QC}{QA} = a\cos A$. Ținînd seama că $a = 2R\sin A$, $b = 2R\sin B$, $c = 2R\sin C$, înlocuind și efectuînd calculele obținem

$$\frac{PB}{PA}\sin 2B + \frac{QC}{QA}\sin 2C = \sin 2A.$$

Reciproc presupunem $O \notin PQ$ și fie $\{Q'\} = PO \cap AC$. Conform demonstrației directe are loc relația $\frac{PB}{PA}\sin 2B + \frac{Q'C}{Q'A}\sin 2C = \sin 2A$ care împreună cu ipoteza ne dă $\frac{Q'C}{Q'A} = \frac{QC}{QA}$, deci $Q' = Q$.

Problema 21045 * (G.M. 3/1987, pag. 121)

Să se rezolve ecuația:

$$m \cdot \sin bx + n \cdot \cos bx = p \cdot \sin ax + q \cdot \cos ax,$$

știind că $m^2 + n^2 = p^2 + q^2$ unde $a,b,m,n,p,q \in \mathbb{R}^*$.

(O generalizare a problemei 20768 * din G.M. 5/1986).

Delia Mufiu, elevă, Sibiu

Scanned with OKEN Scanner

Soluție. Fie $M = m\sin bx + n\cos bx = m\left(\sin bx + \frac{n}{m}\cos bx\right)$. Notăm $\operatorname{tg}\alpha = \frac{n}{m}$, atunci

$$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}} = \frac{m}{\sqrt{m^2+n^2}}$$

și M va fi

$$M = \frac{m}{\cos\alpha}(\sin bx\cdot\cos\alpha + \sin\alpha\cos bx) = \sqrt{m^2+n^2}\cdot\sin(bx+\alpha).$$

Fie $N = p\cdot\sin ax + q\cdot\cos ax = p\left(\sin ax + \frac{q}{p}\cos ax\right)$. Notăm $\operatorname{tg}\beta = \frac{q}{p}$, atunci

$$\cos\beta = \frac{p}{\sqrt{p^2+q^2}}$$

și N va fi

$$N = \frac{p}{\cos\beta}(\sin ax\cos\beta + \sin\beta\cos ax) = \sqrt{p^2+q^2}\cdot\sin(ax+\beta).$$

Dar $M = N$, rezultă $\sin(ax+\beta) - \sin(bx+\alpha) = 0$ (deoarece $p^2+q^2 = m^2+n^2$). Avem

$$2\sin\frac{(a-b)x+\beta-\alpha}{2}\cdot\cos\frac{(a+b)x+\beta+\alpha}{2} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sin\frac{(a-b)x+\beta-\alpha}{2} = 0 \text{ sau } \cos\frac{(a+b)x+\beta+\alpha}{2} = 0.$$

Dacă $a \neq \pm b$, $x \in \left\{\frac{2k\pi+\alpha-\beta}{a-b}\,\middle|\, k\in\mathbf{Z}\right\}\cup\left\{\frac{(2k+1)\pi-\alpha-\beta}{a+b}\,\middle|\, k\in\mathbf{Z}\right\}$, unde $\alpha = \operatorname{arctg}\frac{n}{m}$ și $\beta = \operatorname{arctg}\frac{q}{p}$.

Dacă $a = \pm b$, ecuația devine $(m\pm p)\sin ax + (n-q)\cos ax = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow (m\pm p)\left(\sin ax + \frac{n-q}{m\pm p}\cos ax\right) = 0.$$

Notăm $\operatorname{tg}\gamma = \frac{n-q}{m-p}$ și $\operatorname{tg}\delta = \frac{n-q}{m+p}$. Obținem

$$\frac{m-p}{\cos\gamma}\sin(ax+\gamma) = 0 \text{ și } \frac{m+p}{\cos\delta}\sin(ax+\delta) = 0$$

de unde

$$\sqrt{(m-p)^2+(n-q)^2}\sin(ax+\gamma) = 0 \text{ și } \sqrt{(m+p)^2+(n-q)^2}\sin(ax+\delta) = 0.$$

Dacă $a = \pm b \neq 0$ soluțiile ecuației sînt $x \in \left\{\frac{k\pi-\gamma}{a}\,\middle|\, k\in\mathbf{Z}\right\}\cup\left\{\frac{k\pi-\delta}{a}\,\middle|\, k\in\mathbf{Z}\right\}$, unde

$\gamma = \operatorname{arctg}\frac{n-q}{m-p}$ și $\delta = \operatorname{arctg}\frac{n-q}{m+p}$.

Pentru $a = b = 0$ vom obține $m\sin 0 + n\cos 0 = p\sin 0 + q\cos 0$ adică $n = q$ deci $m = \pm p$.
Dacă $a = b = 0$ și $n = q$ soluția ecuației este $x \in \mathbf{R}$.
Dacă $a = b = 0$ și $n \neq q$ soluția ecuației este $x \in \emptyset$.

Scanned with OKEN Scanner

Clasa a XI-a

Problema 21053* (G.M. 3/1987 pag. 122)

Să se arate că dacă $a, b, c \in \mathbf{R}_+^*$ *şi* $\frac{a}{b} \geqslant \frac{c}{a}$ *atunci*

$$\frac{\ln(1+a)}{\ln(1+b)} \geqslant \frac{\ln(1+c)}{\ln(1+a)}.$$

(O generalizare a problemelor 17801 din G.M. nr. 6/1979 şi 7 din G.M. nr. 3/1985 pag. 81)

Ion Bursuc, student, Iaşi

Soluţie: Ţinînd seama de faptul că în condiţiile problemei noastre $a,b,c \in \mathbf{R}_+^*$, relaţia din ipoteză $\frac{a}{b} \geqslant \frac{c}{a}$ este echivalentă cu $a \geqslant \sqrt{bc}$, iar relaţia din concluzie $\frac{\ln(1+a)}{\ln(1+b)} \geqslant \frac{\ln(1+c)}{\ln(1+a)}$ este echivalentă cu $\ln(1+b)\cdot\ln(1+c) \leqslant [\ln(1+a)]^2$. Deci pornind de la relaţia $\sqrt{bc} \leqslant a$ trebuie demonstrată relaţia $\ln(1+b)\cdot\ln(1+c) \leqslant [\ln(1+a)]^2$, (1).

Avem succesiv:

$$\sqrt{bc} \leqslant a \Rightarrow 1+\sqrt{bc} \leqslant 1+a \Rightarrow \ln(1+\sqrt{bc}) \leqslant \ln(1+a) \Rightarrow [\ln(1+\sqrt{bc})]^2 \leqslant [\ln(1+a)]^2.$$

Deci dacă vom demonstra că $\ln(1+b)\cdot\ln(1+c) \leqslant [\ln(1+\sqrt{bc})]^2$, cu atît mai mult relaţia (1) va fi dovedită. Pentru a arăta că $\ln(1+b)\cdot\ln(1+c) \leqslant [\ln(1+\sqrt{bc})]^2$, vom aplica funcţia ln acestei relaţii. Obţinem:

$$\ln\ln(1+b) + \ln\ln(1+c) \leqslant 2\ln\ln(1+\sqrt{bc}), \qquad (2).$$

Există $x_1, x_2 \in \mathbf{R}$ astfel încît $b = e^{x_1}$ şi $c = e^{x_2}$. Relaţia (2) devine:

$$\ln\ln(1+e^{x_1}) + \ln\ln(1+e^{x_2}) \leqslant 2\ln\ln(1+e^{\frac{x_1+x_2}{2}}), \qquad (3)$$

În continuare considerăm funcţia $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ cu $f(x) = \ln\ln(1+e^x)$. Cu această notaţie relaţia (3) devine:

$$\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2} \leqslant f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right).$$

Derivînd de două ori pe f obţinem:

$$f'(x) = \frac{[\ln(1+e^x)]'}{\ln(1+e^x)} = \frac{e^x}{(1+e^x)\ln(1+e^x)}, \quad f''(x) = \frac{e^x[\ln(1+e^x) - e^x]}{(1+e^x)^2\,[\ln(1+e^x)]^2} < 0, \text{ deoarece}$$

$\ln(1+t) < t$, $(\forall) t > 0$.

Din $f''(x) < 0$, $(\forall)\, x \in \mathbf{R}$, rezultă f concavă, deci

$$\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2} \leqslant f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)$$

şi cu aceasta demonstraţia este încheiată.

Scanned with OKEN Scanner

Clasa a XII-a

Problema 21058* (G.M. 3/1987, pag. 123)

Dacă $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ *este o funcție integrabilă și* $a,b,c\in\mathbf{R}$, $b\geqslant 0$, $c\geqslant 1$, *atunci să se calculeze*

$$L=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^c}\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} f\left(a+i\frac{b}{n}\right)\cdot f\left(a+j\frac{b}{n}\right).$$

Gh. Miculeseu, profesor, Târgoviște

Soluție. Dacă $b=0$ atunci $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^c}\sum\limits_{1\leqslant i<j\leqslant n} f\left(a+i\frac{b}{n}\right)\cdot f\left(a+j\frac{b}{n}\right)=$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^c}\cdot\frac{n(n-1)}{2}\cdot f^2(a)=\begin{cases}+\infty \text{ pentru } c\in[1,2),\\ \frac{1}{2}\cdot f^2(a) \text{ pentru } c=2,\\ 0 \text{ pentru } c>2.\end{cases}$$

Fie $b>0$. Avem:

$$\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} f\left(a+i\frac{b}{n}\right)\cdot f\left(a+j\frac{b}{n}\right)=\frac{1}{2}\left[\left(\sum_{k=1}^{n} f\left(a+k\frac{b}{n}\right)\right)^2-\sum_{k=1}^{n} f^2\left(a+k\cdot\frac{b}{n}\right)\right].$$

Deci:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^c}\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} f\left(a+i\frac{b}{n}\right)\cdot f\left(a+j\frac{b}{n}\right)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{b^2}\cdot\lim_{n\to\infty} n^{2-c}\cdot$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{b}{n}\cdot\sum_{k=1}^{n} f\left(a+k\frac{b}{n}\right)\right)^2-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{b}\cdot\lim_{n\to\infty} n^{1-c}\cdot\lim_{n\to\infty}\left(\frac{b}{n}\cdot\sum_{k=1}^{n} f^2\left(a+k\frac{b}{n}\right)\right)$$

Dar $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{b^2}\left(\frac{b}{n}\cdot\sum\limits_{k=1}^{n} f\left(a+k\frac{b}{n}\right)\right)^2=\left(\frac{1}{b}\cdot\int\limits_a^{a+b} f(x)\,dx\right)^2$ și

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{b}\left(\frac{b}{n}\sum_{k=1}^{n} f^2\left(a+k\frac{b}{n}\right)\right)=\frac{1}{b}\int_a^{a+b} f^2(x)\,dx.$$

Rezultă:

$$L=\begin{cases}+\infty, \text{ dacă } c\in[1,2)\\ 0 \text{ dacă } c>2\\ \frac{1}{2}\left(\frac{1}{b}\int\limits_a^{a+b} f(x)\,dx\right)^2 \text{ pentru } c=2.\end{cases}$$

Scanned with OKEN Scanner

PROBLEME PENTRU CICLUL PRIMAR

17. Care numere de două cifre se împart exact la produsul cifrelor?

* * *

18. Care numere de două cifre sînt egale cu de 4 ori suma cifrelor?

* * *

19. Înlocuiţi literele distincte cu cifre distincte, astfel încît să avem egalitatea

$$EP : S + I + L + O \cdot N = LL.$$

(*Revista Alpha*, 1980)

20. Reconstituiţi înmulţirea:

$$\begin{array}{r} CB\times \\ AB \\ \hline CAA \\ CB \\ \hline 1501 \end{array}$$

$x+y+z=1002$

$x+y=2z$

$x-y=z$

(*Revista Alpha*, 1980)

21. Tatăl are 30 ani, şi fiul are 7 ani.
Peste cîţi ani tatăl va avea dublul vîrstei fiului?

* * *

22. Suma a trei numere este 1002.
Suma primelor două numere este dublul celui de-al treilea număr, iar diferenţa primelor două numere este cel de-al treilea număr.
Să se afle numerele.

* * *

23. În şcoala noastră, clasele I, II, III şi IV au colectat împreună 410 borcane. Clasa I a colectat cu 20 borcane mai mult decît clasa a II-a, clasa a III-a a colectat de 3 ori mai mult decît clasa a II-a, iar clasa a IV-a a colectat de 2 ori mai mult decît clasa I.
Cîte borcane a colectat fiecare clasă?

Andrei-Tudor Albu, ele., Bucureşti

24. Care numere cuprinse între 100 şi 200 împărţite la 5 dau restul 4?

* * *

$x+y+z+t=410$

$x=20+y$

$y=y$

$z=(20+y)\cdot 3$

$t=(20+y)\cdot 2$

PROBLEME PENTRU GIMNAZIU

Clasa a V-a

E : 9371*. Suma a două numere naturale este 1089 şi c.m.m.d.c. al lor este 121. Să se afle numerele.

Constantin Rada, profesor, Scundu, Vîlcea

$(20+y)+y+60+3y+40+2y=410$

PROBLEME PENTRU CICLUL PRIMAR

17. Care numere de două cifre se împart exact la produsul cifrelor?

* * *

18. Care numere de două cifre sînt egale cu de 4 ori suma cifrelor?

* * *

19. Înlocuiți literele distincte cu cifre distincte, astfel încît să avem egalitatea

$$EP : S + I + L + O \cdot N = LL.$$

(*Revista Alpha*, 1980)

20. Reconstituiți înmulțirea:

$$\begin{array}{r} CB\times \\ AB \\ \hline CAA \\ CB \\ \hline 1501 \end{array}$$

(*Revista Alpha*, 1980)

21. Tatăl are 30 ani, și fiul are 7 ani.
Peste cîți ani tatăl va avea dublul vîrstei fiului?

* * *

22. Suma a trei numere este 1002.
Suma primelor două numere este dublul celui de-al treilea număr, iar diferența primelor două numere este cel de-al treilea număr.
Să se afle numerele.

* * *

23. În școala noastră, clasele I, II, III și IV au colectat împreună 410 borcane. Clasa I a colectat cu 20 borcane mai mult decît clasa a II-a, clasa a III-a a colectat de 3 ori mai mult decît clasa a II-a, iar clasa a IV-a a colectat de 2 ori mai mult decît clasa I.
Cîte borcane a colectat fiecare clasă?

Andrei-Tudor Albu, ele., București

24. Care numere cuprinse între 100 și 200 împărțite la 5 dau restul 4?

* * *

PROBLEME PENTRU GIMNAZIU

Clasa a V-a

E : 9371*. Suma a două numere naturale este 1089 și c.m.m.d.c. al lor este 121. Să se afle numerele.

Constantin Rada, profesor, Scundu, Vîlcea

E : 9372*. Care dintre numerele

$$A = \frac{1}{1988}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{1988}\right),$$

$$B = \frac{1}{1987}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{1987}\right),$$

este mai mare?

* * *

E : 9373. Să se determine numărul de forma $\overline{aaaaaa}$ care se poate scrie ca un produs de șase numere distincte.

N. Fota, elev, Tr. Măgurele

E : 9374. Să se găsească numerele naturale de forma $\overline{abba}$ în baza 10, știind că au exact trei divizori, numere prime, unul dintre aceștia fiind b, iar altul $\overline{aa}$.

Vilia Bantă, profesoară, București

E : 9375. Să se determine numerele naturale care împărțite la un număr de forma $\overline{1x2y}$ să dea citul 100 și restul 99, știind că $\overline{1x2y}$ este divizibil cu 44.

Ioan Ciucur, profesor, Adjud, Vrancea

E : 9376*. Se consideră mulțimile :

$$A = \{x \mid x \in \mathbf{N},\ x \text{ divide pe } 16,\ 1 \leqslant x \leqslant 8\},$$

$$B = \{x \mid x \in \mathbf{N},\ x \text{ divide pe } 18,\ 1 \leqslant x \leqslant 6\},$$

$$C = \{x \mid x \in \mathbf{N},\ x \text{ divide pe } 22,\ 1 \leqslant x < 11\}.$$

Să se arate că $A \cup C = (A - B) \cup C$.

Ion Z. Predescu, profesor, Rast, Dolj

Clasa a VI-a

E : 9377. În afirmația de mai jos, cunoscînd că cel puțin unul din numerele de sub radicali este pătrat perfect, să se înlocuiască steluțele și literele cu cifre, astfel încît să obținem o propoziție adevărată :

$$\sqrt{10001******} + \sqrt{2500*****6} = \overline{xy00x(y-1)}.$$

C. Dinu, profesor, Zătreni, Vîlcea

E : 9378*. Trei automobile pornesc simultan, din același loc, în aceeași direcție, cu viteze diferite. Ce relație există între viteze astfel încît la un moment dat un automobil să fie egal depărtat de celelalte? Dar dacă un automobil pleacă în direcție opusă celorlalte două?

Dragoș Constantinescu, profesor, Rm. Vîlcea

Scanned with OKEN Scanner

E : 9379. Știind că numerele x și y sînt invers proporționale cu numerele a și b, y este număr prim, $a = 2b$, aflați valorile x și y.

Elena-Mihaela Ghica, elevă, Rm. Vilcea

E : 9380*. Fie ABC un triunghi dreptunghic ($\hat{A} = 90°$). Arătați că : $\hat{C} < 30°$ dacă și numai dacă $BC > 2AB$.

* * *

E : 9381. Fie $E = (-1)^n[3(-1)^n - 2] + (-1)^{n+1}[2 - 3(-1)^{n+1}]$.

a) Calculați numărul E pentru $n \in \mathbf{N}$.

b) Pentru ce valori naturale ale lui x numărul $\frac{E}{2x-1}$ este întreg?

Liviu-Mihail Smărăndoiu, elev, București

E : 9382*. Mediatoarele segmentelor AB și AC se întîlnesc în M. Să se demonstreze că $\widehat{BAC} = 90°$ dacă și numai dacă punctele B, M, C sînt coliniare.

Marin Grigori, profesor, Buzău

Clasa a VII-a

E : 9383*. Să se arate că expresia: $E = \frac{2a-b}{a+2b}$ este rațională știind că $a = \sqrt{3 - \sqrt{5} + \sqrt{9 - 4\sqrt{5}}}$ și $b = \sqrt{\sqrt{7} - 1 - \sqrt{11 - 4\sqrt{7}}}$.

C. Apostol, profesor, Rm. Sărat

E : 9384. Să se stabilească dacă numărul $x = \sqrt{13+\sqrt{25}} - \sqrt{13-\sqrt{25}} - 1$ este pozitiv, negativ sau nul.

Mircea Hușanu, profesor, Mihăileni, Botoșani

E : 9385*. Să se arate că patrulaterul convex, în care media aritmetică a oricăror două unghiuri opuse este egală cu media geometrică a celorlalte două unghiuri opuse, este un paralelogram. Este oare adevărată această propoziție în cazul în care înlocuim unghiurile cu laturile?

Radu Ghenghiu, profesor, Oradea

E : 9386. Fie triunghiul ABC și M unul din punctele de intersecție ale mediatoarei laturii BC cu cercul circumscris triunghiului, iar N și P proiecțiile lui M respectiv pe AB și AC.

Demonstrați că segmentele NB, NA, PC, PA sînt proporționale.

Vasilica Udroiu, profesoară, Roșiori de Vede

Scanned with OKEN Scanner

E : 9387*. Să se arate că dacă în triunghiul oarecare ABC, D este piciorul înălțimii din A, atunci sînt adevărate relațiile :

1) $AD^2 = DC \cdot DB + \frac{1}{2}(AC^2 + AB^2 - BC^2)$;

2) $AC^2 = DC \cdot BC + \frac{1}{2}(AC^2 + AB^2 - BC^2)$;

3) $AB^2 = DB \cdot BC + \frac{1}{2}(AC^2 + AB^2 - BC^2)$.

Alexandru Oțet, profesor, Brașov

E : 9388. Să se găsească numărul natural de forma $\overline{abab}$ pentru care raportul dintre el și răsturnatul său are valoarea 4,5. Generalizați.

Alexandru Cebuc, profesor, Coteana, Olt

Clasa a VIII-a

E : 9389*. Dacă x este un număr natural, să se determine numerele naturale y care verifică egalitatea :

$$y^2 = x^2 + x + 1981.$$

I. Teodorescu, Galați

E : 9390. Pentru oricare numere naturale m și n, numărul $m^n + m^{2n} + m^{2n+1}(2m^2 + m + 1)^n$ este divizibil cu $1 + m + m^2$. Extindere.

Marin Vlada, matematician, București

E : 9391. Fie cercul de centru O_1 și rază R. Pe cerc se ia centrul O_2 al cercului de rază R. Într-unul din punctele de intersecție a celor două cercuri se află centrul O_3 al cercului de rază R. Să se afle raza cercului înscris și raza cercului circumscris triunghiului $O_1O_2O_3$, în funcție de R.

George Bogdan Stana, elev, București

E : 9392. 1). Fiind dată piramida regulată $VA_1A_2 \ldots A_n$ să se determine valorile lui n astfel încît fețele laterale să fie triunghiuri echilaterale.

2). Pentru fiecare valoare a lui n determinată la 1) se construiește piramida regulată $VB_1B_2 \ldots B_{2n}$ cu A_1 și B_1 identice. Să se afle valorile raportului $\frac{V_{2n}}{V_n}$ în care V_n, V_{2n} reprezintă respectiv volumele piramidelor $VA_1A_2 \ldots A_n$ și $VB_1B_2 \ldots B_{2n}$.

George Croitoru, profesor, Iași

Scanned with OKEN Scanner

E : 9393*. Să se arate că centrele de greutate ale feţelor laterale ale oricărei piramide sînt coplanare.

Dacă G_1, G_2, G_3, G_4 sînt centrele de greutate ale feţelor laterale iar G centrul de greutate al bazei unei piramide patrulatere, să se calculeze volumul piramidei $GG_1G_2G_3G_4$ în funcţie de volumul V al piramidei.

* * *

E : 9394*. Fie ABC un triunghi oarecare şi H ortocentrul său iar O un punct oarecare din spaţiu. Notăm cu M, N şi P proiecţiile punctului P pe dreptele HA, HB şi respectiv HC.

Să se arate că triunghiurile MNP şi ABC sînt asemenea.

(Generalizarea problemei E : 8315* din G.M. nr. 6/1984, pag. 236).

Mihai Miculiţa, profesor, Oradea

PROBLEME PRELIMINARE DE TIP O.I.M. PENTRU ELEVII DIN GIMNAZIU

O.G. : 67. Fie două cercuri tangente exterior C_1 şi C_2 de centre O_1 şi O_2. Notăm cu T_1T_2 o tangentă comună ($T_1 \in C_1$, $T_2 \in C_2$) pentru cele două cercuri. Notăm cu T_3 punctul diametral opus lui T_1 în cercul C_1, iar din punctul T_3 ducem tangenta T_3T_4 la cercul C_2 (T_4 fiind punctul de tangenţă).

Să se arate că $T_1T_3 = T_3T_4$.

Matematika v şkole, 1987

O.G. : 68. Determinaţi numerele $\overline{ba}$ pentru care $\overline{ab}$ se divide cu $a + 8b$.

Vasile Berinde, matematician, Baia-Mare

PROBLEME PENTRU LICEU

21373*. Să se demonstreze că pentru orice punct M din interiorul paralelogramului $ABCD$ avem

$$MA \cdot MC + MB \cdot MD \geq AB \cdot BC.$$

Cristinel Mortici, student, Tîrgovişte

21374. Se consideră funcţia $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$,

$$f(x) = ax^2 + bx + c, \quad a \in \mathbf{R}^*, \quad b \in \mathbf{R}, \quad c \in \mathbf{R}.$$

Se notează cu g şi h restricţiile funcţiei f la mulţimea numerelor raţionale şi, respectiv, la mulţimea numerelor iraţionale.

Să se demonstreze echivalenţa afirmaţiilor :

i) Există $\lambda \in \mathbf{R}$ astfel încît ecuaţia în x şi y :

$$g^2(x) + h^2(y) = 2\lambda(g(x) + h(y) - \lambda)$$

are soluţie reală.

ii) $\dfrac{b}{a}$ este număr iraţional.

Dorin Popovici, profesor, Craiova

21375. Dacă $0 < x < 2$ și $0 < y < 2$ atunci $\left|\dfrac{x-y}{x+y-xy}\right| < 1$.

Ionel Atanasiu, profesor, Focșani

21376*. Să se demonstreze că dacă $a,b \in [0, \infty)$, atunci

$$\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b} \leq \sqrt{2(a+b)}+\sqrt[3]{4(a+b)}.$$

În ce caz avem egalitate?

Ilie Diaconu, profesor, Cluj-Napoca

21377*. În triunghiul ABC, $m(\hat{B}) = m(\hat{C}) = 40°$.

Arătați că dacă $[BD]$ este bisectoarea unghiului $\hat{B}$, unde $D \in (AC)$, atunci

$$BD + DA = BC.$$

Matematika v škole, nr. 2/1984

21378. Fie $ABCD$ un pătrat și $C(O,R)$ un cerc cu centrul în punctul O de intersecție a diagonalelor pătratului și rază R. Să se arate că suma $|MA|^2 + |MB|^2 + |MC|^2 + |MD|^2$ este constantă oricare ar fi $M \in C(O, R)$.

* * *

21379. Fie D un punct pe latura $|BC|$ a triunghiului ABC, $|AB| = c$, $|BC| = a$, $|AC| = b$. Se duc bisectoarele interioare $|DM$ și $|DN$ ale unghiurilor $\widehat{ADB}$ și $\widehat{ADC}$, $M \in |AB|$, $N \in |AC|$. Să se arate că:

1) $D \in |BC|$, D oarecare $\Rightarrow \dfrac{b}{|AN|}+\dfrac{c}{|AM|}-\dfrac{a}{|AD|}=2$;

2) $|AD|$ bisectoare a unghiului $\widehat{BAC} \Leftrightarrow \dfrac{|AM|}{|AN|}\cdot\dfrac{|NC|}{|MB|}=\dfrac{b}{c}$;

3) $|AD|$ mediană a triunghiului $ABC \Leftrightarrow \dfrac{2c}{|AM|}-\dfrac{a}{|AD|}=2$.

Dana Siclovan, Timișoara

Clasa a X-a

21380*. Să se demonstreze că dacă ecuația $a_0X^n + a_1X^{n-1} + \ldots + a_n = 0$ are toate rădăcinile reale și pozitive, atunci

$$\left|\sum_{k=0}^{n}(-1)^k a_k\right| \geq 2^n\sqrt{|a_0 \cdot a_n|}, \quad n \in \mathbf{N}^*.$$

Mitică Țemneanu, elev, Iași

Scanned with OKEN Scanner

21381. Să se rezolve ecuația:

$$\frac{\operatorname{tg}2\alpha}{\cos^2\alpha}+\frac{\operatorname{tg}2^2\alpha}{\cos^2 2\alpha}+\ldots+\frac{\operatorname{tg}2^{n+1}\alpha}{\cos^2 2^n\alpha}=0.$$

Florin Rotaru, matematician, Focșani

21382. Stabiliți relația:

$$C_n^0+\frac{1}{3}C_n^2+\frac{1}{5}C_n^4+\ldots+\frac{1}{n}C_n^{n-1}=\frac{2^n}{n+1},$$

știind că n este număr natural impar.

C. Gîdea, profesor, Buzău

21383. Se dă un triunghi ABC și trei puncte mobile: $M\in(BC)$, $N\in(AC)$, $P\in(AB)$ astfel încît, tot timpul, $MN\parallel AB$ și $MP\parallel AC$. Fie M_0, N_0, P_0 poziția punctelor M, N, P pentru care aria lui $MNAP$, adică $\sigma[MNAP]$, este maximă.
Precizați ce fel de triunghi este ABC dacă:

$$\sigma[M_0N_0AP_0]=-\frac{1}{2}\cdot\sigma[ABC]\cdot\cos 3A\cos(B-C).$$

C. Gîdea, profesor, Buzău

21384*. Să se rezolve în mulțimea numerelor naturale ecuația:

$$5^x-4^x=y^2.$$

Nicolae Papacu, Slobozia

21385*. Să se rezolve ecuația:

$$\frac{3^x-1}{3^x+1}=2^{-x}.$$

* * *

21386. Dacă $a,b,c\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$, să se arate că:

$$\left(\frac{\sin a\sin b}{\sin c}\right)^2+\left(\frac{\cos a\cos b}{\cos c}\right)^2=1$$

dacă și numai dacă $a=c$ sau $b=c$.

Florin Rotaru, matematician, Focșani

Clasa a XI-a

21387*. Fie matricile cu elemente numere reale

$$A=(a_{ij})_{\substack{i=1,\ldots,n\\ j=1,\ldots,m}}\quad\text{și}\quad B=(b_{ij})_{\substack{i=1,\ldots,m\\ j=1,\ldots,n}}$$

Fie $n > m$, $n, m \in \mathbf{N}^*$. Notăm $M = (m_{ij})_{i,j=1,\ldots,n}$ unde

$$m_{ij} = \sum_{k=1}^{m} a_{ik} b_{kj}.$$

Să se arate că $\det M = 0$.

* * *

21388*. Fie $\{x_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ și $\{y_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ două șiruri de numere, astfel încît

$$y_0 = 2x_0\,;\ y_n = 2x_n + x_{n-1},\ n \geqslant 1.$$

Să se demonstreze că : $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = 0 \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$.

Dan Secleman, profesor, Craiova

21389. Fie $n \in \mathbf{N}$, par și $S_k = \sum\limits_{1}^{n} 1\cdot 2\cdot \ldots \cdot k$, $k = \overline{1, n}$.

1° Să se arate că

$$A_n = \frac{S_1(n+1)^{n-2} + S_3(n+1)^{n-4} + \ldots + S_{n-1}}{(n+1)^{n-2} + S_2(n+1)^{n-4} + \ldots + S_{n-2}}$$

este un număr natural.

2° Să se determine

$$\lim_{\substack{n\to\infty \\ n \text{ par}}} \left(\frac{A_n}{n}\right)^n.$$

Cornel Gruian, matematician, Cluj-Napoca

21390. Să se arate că următoarele afirmații sînt echivalente :
a) Există o infinitate de perechi $(A, B) \in M_n(\mathbf{R}) \times M_n(\mathbf{R})$ astfel încît $\det(AB) \neq 0$, $AB = BA$ și $A^2 + B^2 = 0$.
b) n este număr natural par.

Florin Vulpescu-Jalea, profesor, București

21391. Fiind dat șirul $a_1 = 2$ și $a_n = a_1 a_2 \ldots a_{n-1} + 1$ pentru $n \geqslant 2$, să se calculeze

$$\lim_{n\to\infty} \left[\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_n}\right]^{a_1 a_2 \ldots a_n}.$$

Marcel Chiriță, profesor, București

21392. Fie $a_i > 0$, $i = \overline{1, n}$ și $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i^x \geqslant \sum\limits_{i=1}^{n} a_i$, $(\forall)\, x \in \mathbf{R}$.

Să se arate că : $a_1^{a_1} \cdot a_2^{a_2} \cdot \ldots \cdot a_n^{a_n} = 1$.

Vasile Zidaru, profesor, Sfîntu-Gheorghe

Scanned with OKEN Scanner

21393*. Fie $f:(0, \infty)$ de 2 ori derivabilă, cu f'' continuă. Dacă f este mărginită și $f''(x) \to 0$ cînd $x \to +\infty$ atunci $f'(x) \to 0$ cînd $x \to +\infty$

* * *

Clasa a XII-a

21394*. Fie $0 < a \leqslant b \leqslant c$ trei numere reale. Să se arate că

$$2b^2 \cdot \ln \frac{c}{a} \geqslant (c-a)(4b-a-c).$$

Gigel Militaru, elev, Corabia

21395. Să se arate că dacă $x_k \in \mathbf{C}$, $k = 1,2, \ldots, n$ și

$$\sum_{1 \leqslant k \leqslant n} x_1 x_2 \ldots x_k = (-1)^{k-1}, \text{ atunci}$$

$$\sum_{k=1}^{n} x_k^p = 2^p - 1, \quad (\forall) p \in \{1,2,\ldots,n\}.$$

Ionel Gh. Tudor, profesor, Călugăreni, Giurgiu

21396. Fie K un corp comutativ. Să se demonstreze că o condiție necesară și suficientă ca o matrice $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(K)$ să se poată scrie sub forma:

$$\begin{pmatrix} s & 0 \\ 0 & s^{-1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ t & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & u \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

cu $s, t, u \in K$, $s \neq 0$ este ca $a \neq 0$ și $ad - bc = 1$.

* * *

21397. Se dă inelul $(\mathbf{Z}_n, \hat{+}, \hat{\cdot})$.

1. Să se determine n astfel încît inversul lui $\hat{3}$ să fie $\hat{5}$.

2. Pentru n determinat la punctul 1., să se afle valorile funcției polinomiale atașate polinomului

$$P \in \mathbf{Z}_n[X], \; P(X) = X^3 - \hat{5}X + \hat{6}.$$

3. Să se rezolve ecuația $P(X) = \hat{0}$ în inelul $\mathbf{Z}_n$, unde n are valorile determinate la punctul 1.

Ioan Bran, inginer, Botoșani

21398. Fie K un corp comutativ și $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(K)$.

Scanned with OKEN Scanner

1) Calculați A^2 și demonstrați că există elemente $\alpha, \beta \in K$ (exprimate în funcție de a,b,c,d) astfel încît:

$$A^2 - \alpha A - \beta I = 0.$$

Indicați cazul în care α, β nu sînt unic determinate.

2) Demonstrați că mulțimea $\mathcal{A}$ a matricilor B de forma $B = uI + vA (u, v \in K, I$ matricea unitate) împreună cu adunarea și înmulțirea matricilor este un inel comutativ unitar.

* * *

21393*. Considerăm funcția continuă $f : [0, 1] \to \mathbf{R}$. Să se calculeze limita șirului $(a_n)_{n \in \mathbf{N}}$ dat de $a_n = \int_0^1 x^n f(x)\,dx$.

* * *

21400*. Fie ecuația:

$$x^n + x^{n-1} + \ldots + x + 1 = 0$$

cu rădăcinile $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Să se calculeze:

$$\frac{1}{(x_1-1)^2} + \frac{1}{(x_2-1)^2} + \ldots + \frac{1}{(x_n-1)^2}.$$

* * *

PROBLEME PREGĂTITOARE PENTRU O.I.M. ȘI O.B.M.

O : 542. Fie $a,b,n \in \mathbf{N}^*$ așa încît $(a; b) = 1$. Să se arate că oricum am alege două mulțimi de numere întregi A și B, cu cîte n elemente și care pot fi ordonate în progresie aritmetică de rație a, respectiv b, mulțimea $C = \{bx + ay \mid x \in A,\ y \in B\}$ are exact $2n - 1$ elemente și poate fi ordonată în progresie aritmetică de rație ab.

Gabriel Sticlaru, cercetător, București

O : 543. Dacă I este centrul cercului înscris în triunghiul ABC și dacă $M \in (AB)$, $N \in (AC)$, să se demonstreze că dreapta MN trece prin punctul I dacă și numai dacă $b \cdot \frac{MB}{MA} + c \cdot \frac{NC}{NA} = a$, unde a,b,c sînt lungimile laturilor triunghiului dat.

Călin Burdușel, profesor, Tîrgoviște

O : 544. Se dă $a \in \mathbf{R}^*$ și funcțiile $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}^*$, $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ așa încît $f(x + a) = f(x)$ și $g(x + a) = g(x)$, $(\forall) x \in \mathbf{R}$. Să se arate că funcția $h : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ are proprietatea că $h(x + a) = f(x) \cdot h(x) + g(x)$, $(\forall) x \in \mathbf{R}$,

dacă și numai dacă :

$$h(x)=\begin{cases}(f(x))^{\left[\frac{x}{a}\right]}\cdot h\left(a\left\{\frac{x}{a}\right\}\right)+\dfrac{(f(x))^{\left[\frac{x}{a}\right]}-1}{f(x)-1}\cdot g(x), & \text{dacă } f(x)\neq 1\\ h\left(a\left\{\frac{x}{a}\right\}\right)+\left[\frac{x}{a}\right]\cdot g(x), & \text{dacă } f(x)=1.\end{cases}$$

(O generalizare a problemei 21039 din G.M. 3/1987)

D.M. Bătineţu-Giurgiu și *Fl. Vulpesu-Jalea*

PROBLEME PENTRU CONCURSUL ANUAL AL REZOLVITORILOR

Clasele a IX-a și a X-a

C : 769. Dacă $x\in\mathbf{R}$ are reprezentarea zecimală $x=\overline{a,a_1a_2\ldots a_n\ldots}$ .... să se arate că dacă există o unică cifră care apare de o infinitate de ori în reprezentarea zecimală a lui x, atunci $x\in\mathbf{Q}$.

I. Savu, matematician, București

C : 770. Se consideră triunghiul ABC având laturile de lungimi a,b,c.

a) Să se rezolve ecuația

$$ax=b\cdot\sqrt{x^2-c^2}+c\cdot\sqrt{x^2-b^2}.$$

b) Să se determine locul geometric al punctelor M din planul triunghiului cu proprietatea că cercurile circumscrise triunghiurilor MAB, MAC, MBC sînt congruente.

Marius Burtea, profesor, Alexandria

C : 771. Să se rezolve în mulțimea numerelor naturale ecuația

$$(a-1)^x=2^{x-1}(a^y-1),\ \text{unde } a\in\mathbf{N}^*\setminus\{1\}.$$

I. Cucurezeanu

C : 772. Fie H ortocentrul triunghiului ascuțitunghic ABC și M,N,P puncte pe segmentele (BC), (CA), (AB) care împart perimetrele triunghiurilor HBC, HCA, HAB în părți egale. Să se demonstreze că dreptele AM, BN și CP sînt concurente.

Mircea Lascu, profesor, Zalău

Clasele a XI-a și a XII-a

C : 773. Fie $x\in(0,1)\setminus\mathbf{Q}$. Să se determine șirul strict crescător $(a_n)_{n\geq 0}$ de numere naturale așa încît $a_0\in\mathbf{N}^*$ și $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=0}^{n}(-1)^k\left(\prod\limits_{i=0}^{k}\frac{1}{a_i}\right)=x$.

Dan Tănasie, student, București

Scanned with OKEN Scanner

C : 774. Dacă $P \in \mathbf{R}[X]$, $\text{grad}\, P \in 2\mathbf{N}+1$, atunci oricare ar fi $m \in 2\mathbf{N}^*+1$, există $A, B \in \mathcal{M}_m(\mathbf{R})$, $A \neq B$, așa încît $\det P(A) \cdot \det P(B) < 0$.

D. M. Bătineţu-Giurgiu

C : 775. Să se demonstreze că grupul de permutări S_6 conține un subgrup G cu proprietatea că fiecare permutare din G are un punct fix, dar nu există un punct fix comun tuturor permutărilor din G.

I. Savu și *Fl. Vulpescu-Jalea*

C : 776. Să se determine funcția derivabilă $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ așa încît $xf'(x) + 2f(x) + xF(x) = 0$, $(\forall)\, x \in \mathbf{R}$, unde $F : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ este o primitivă a funcției f.

* * *

PROBLEME DE INFORMATICĂ

I : 329. Să se cerceteze numărul rădăcinilor reale ale ecuației $\ln x + x - e^x + 2 = 0$ și să se întocmească un program *BASIC* pentru determinarea lor cu o eroare mai mică decît 10^{-6}.

Silviu Stössel, profesor, București

I : 330. Să se determine numărul de inversiuni și signatura pentru fiecare din permutările următoare :

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix} \text{ etc.}$$

(*Algebră, clasa a XI-a, pg.* 9, *ex.* 5)

Să se alcătuiască o subrutină pentru determinarea numărului de inversiuni și a signaturii unei permutări.

Silviu Crăciunaș, cercetător, C.C.U.B.

RUBRICA REZOLVITORILOR DE PROBLEME

ALEXANDRIA (TELEORMAN) Sc. gen. 3 cl. V Berceanu Adriana (180). **BERCENI** (GIURGIU) Sc. gen. 1 cl. VII Acheana Costel (91). **BUCUREȘTI** Sc. gen. 5 cl. VIII Stanciu Nicolae (90), Sc. gen. 7 cl. VII Teodorescu Ștefania (80), Sc. gen. 23 cl. VIII Ianuș Iuliana (150), Sc. gen. 24 cl. V Silion Gabriela (110), Sc. gen. 46 cl. VI Ioan Adrian-Nicolae (192), Sc. gen. 49 cl. VI Candiani Ruxandra (80), Sc. gen. 70 cl. V Șava Anca-Gabriela (100), cl. VI Costache Ileana (100), cl. VII Ionescu Ioana (100), Sc. gen. 108 cl. VI Minţă George (70), cl. VII Tudorache Andrei (60), Sc. gen. 117 cl. VIII Tabarcea Ion-Constantin (140), Sc. gen. 133 cl. VI Puchianu Elena (100), Sc. gen. 155 cl. VI Georgescu Irina (180), Sc. gen. 156 cl. VI Ţanu Valentina (70), Sc. gen. 164 cl. VI Păun Paul Andrei (90), Sc. gen. 172 cl. V Bucurescu Iuliana (220), Sc. gen. 174 cl. VI Niculescu Radu (110), Sc. gen. 178 cl. V Kişescu Bogdan (140), Sc. gen. 190 cl. VI Niţu Adrian (400), Şerban Apostolina (180), Sc. gen. 194 cl. VII Dumitru Diana-Elena (80), Sc. gen. 201 cl. VIII Dumitrescu Sorin (100), Sc. gen. 203 cl. III Sârbu Gabriela (180), Sc. gen. 278 cl. VI Oprea Cătălin (90), Lic. „Spiru Haret" cl. XI Burada Teodor (125), Barbu Adina (125), Oprea Giorgiana (125), Cazacu Ionuţ (125), Lupu Simona (125), Neagu Raluca (125), Rădulescu Gabriela (125), Lic. ind. 34 cl. VII Bătătorescu Cosmin (100), cl. IX Caprini Andreea (84), fără menţiune de școală cl. IX Sbirnea Emanuela (60), Lic. „Gh. Lazăr" cl. IX Teodorescu Alexandru (120),

Scanned with OKEN Scanner

BACĂU (BACĂU) Lic. pedagogic cl. VIII Iliescu Ştefan (150), Şc. gen. 10 cl. V Csegedi Ana (90), Hociug Emilia (60), cl. VI Ciurea Simona (80), Munteanu Liliana (90), Socîu Eusebiu (68), cl. VII Chilat Daniela (80), Romică George (97), Şc. gen. 16 cl. V Paveliuc Simona (100), Sava Ana-Maria (100), Şc. gen. 18 cl. VII Alexandrescu Oana-Antoaneta (100), Mitocaru Cristina (100), Şc. gen. 19 cl. VI Coman Florin (80), Uricaru Cristina (70), Şc. gen. 27 cl. V Boilă Roxana (86), Gheorghiu Oana-Ştefana (63), Şc. gen. 28 cl. V Raţă Călălin (79), fără menţiune de şcoală Jalbă Dan (50), Tolescu Irinel (90), **BĂILE GOVORA** Lic. ind. cl. VI Smărăndescu Monica (90). **BĂILE HERCULANE** (CARAŞ—SEVERIN) Şc. gen. cl. V Chirpot Călin (80). **BĂILEŞTI** (DOLJ) Şc. gen. 5 cl. VI Oroviceanu Virgil (80). **BAIA MARE** (MARAMUREŞ) Şc. gen. 17 cl. V Holio Mihai (83), Lic. ind. 8 cl. V Zaharia Ovidiu (200). **BĂNEASA** (CONSTANŢA) Şc. gen. 2 cl. V Pîrvu Adrian (160). **BEIUŞ** (BIHOR) Lic. ,,Samuil Vulcan" cl. V Matcaş Monica (100), cl.VI Micula Dragoş (110), Tuluca Adela (110); cl. VII Borz Claudiu (100), cl. VIII Stanciu Claudia (90), fără menţiune de şcoală cl. VII Dan Teodora (105). **BELCEŞTI** (IAŞI) şc. gen cl. V Ciobanu Ionica (60). **BISTRIŢA** (BISTRIŢA NĂSĂUD) Lic. ,,Liviu Rebreanu" cl.VI Cătană Oana-Camelia (100). **BOTOŞANI** Şc. gen. 7 cl.V Asandului Lăcrămioara (83), Cimpoeşu Sorin-Vasile (79), cl. VII Macsiniuc Delia (100), Răduţac Ana (50), Şc. gen. 12 cl. V Butuiană Cristina (78), cl. VII Creangă Otilia (87), Moga Manuela (80), Şc. gen. 13 cl. V Agrosoaie Andi (40), Amurăriţei Marius (70), Spiridon Loredana (97), Cuşmir Vasile (100), Ticală Ştefan-Dorin (50), cl. VI Guliţă Cristian (160), Pînzaru Wili (140), Lic. mat.-fiz. ,,A. T. Laurian" cl. XI Mihalache Radu (192). **BRAŞOV** Şc. gen. 5 cl. VI Tranie Loredana (80), cl. VIII Dancea Horaţiu (98), Şc. gen. 22 cl. VI Nancă Nicoleta-Anca (110), Şc. gen. 27 cl. VI Cazacu Aurelia (50), Chiţea Ruxandra (140), Nicolaescu Adrian (78), Vescan Claudia (100). **BRĂILA** Şc. gen. 6 cl. V Maxim Ion (100), Bunea Iuliana (85), Gurgu Mihaela-Floricica (85), Şc. gen. 22 cl. V Adam Mioara (130), Şc. gen. 29 cl. V Sîrbu Dragoş (58), Şc. gen. 30 cl. VI Castraveţ Ana-Maria (90), fără menţiune de şcoală cl. IV Chesaru Laura (80). **BRATIA DEAL** (VÎLCEA) Şc. gen. cl. II Milcă Ioana (40). **BOZOVICI** (CARAŞ-SEVERIN) Şc. gen. cl. V Bolboi Marius (80), Ciocloda Cristian (90). **CAPU CODRULUI** (SUCEAVA) Sc. gen. cl. V Prislopan Elena (93), Ungurean Bogdan (110). **CARACAL** (OLT) Şc. gen. 7 cl. V Florin Bogdan (110), cl. VI Lazăr Monica-Gabriela (90), Mareş Augustin-Marius (75), Micu Mihai, (80) Niţu Marius (80). **CARANSEBEŞ** (CARAŞ-SEVERIN) Şc. gen. 8 cl. V Alexa Petru (114), Mihot Gertrude (90). **CĂLĂRAŞI** (CĂLĂRAŞI) Şc. gen. 5 cl. VI Cărun Ovidiu (150), Dumitrescu Andi (90), Munteanu Otilia (110), Oprea Daniela (100), cl. VII Mirică Florentina (170), Şc. gen. 4 cl. VI Zamfirache Tudor (128). **CĂŞEIU** (CLUJ) Şc. gen. cl. VIII Buior Claudia (210). **CIREŞU** (BRĂILA) Şc. gen. cl.V Gheorghiţă Alina (130), cl. VI Gheorghică Cristian (129). **CÎMPIA TURZII** (CLUJ) Şc. gen. 5 cl. VI Crăciun Camelia (190). **CÎMPINA** (PRAHOVA) Şc. gen. 2 cl. VI Voicu Irina (80), Lic. ind. 5 cl. IX Budală Adrian (120). **CÎMPULUNG MOLDOVENESC** (SUCEAVA) Şc. gen. 3 cl. VI Scripcă Bogdan (72), Sirian Sorin (87), Ungurianu Cristina (100). **CÎMPULUNG MUSCEL** (ARGEŞ) Şc. gen. 5 cl. V Tudor Camelia (90), Şc. gen. 7 cl. V Burlănescu Raluca (80), Mărgescu Dana (110), Năstăsescu Mihaela-Cristina (100), Potoceanu Sorana (110), Săvulescu Elena Adriana (110), Sogiliuc Maria-Magdalena (80). **CÎRSTAVEŞTI** (VÎLCEA) Şc. gen. cl. V Prodescu Petre (100). **CLUJ-NAPOCA** (CLUJ) Şc. gen. 4 cl. V Tămîiulea Adela (90), Şc. gen. 6 cl. VII Netea IoanAnton (80), Şc. gen. 21 cl. IV Tolan Ramona (70). **COSTEŞTI** (VÎLCEA) Şc. gen. cl. VII Munteanu Nicoleta-Elvira (50), cl. VIII Gunie Cristina (79). **CRAIOVA** (DOLJ) Şc. gen. 21 cl. VII Barbu Cornelia (60), Buca Dan (80), cl. VIII Ştefan Cosmin (50), Şc.gen . 32 cl. V Stancu Florin (50), Lic. ind. chimie 5 cl. XI Mihalcea Gabriela (24), Lic. fil.-istorie cl. VI Popescu Luminiţa (100), cl. VII Dinculescu Raluca-Elena (75), Vică Monica (60). **CUDALBI** (GALAŢI) Şc. gen. 1 cl. VIII Bejan Lenuţa (20). **CUGIR** (ALBA) Şc. gen. 2 cl. VI Patachi Roxana (240). **CURTEA DE ARGEŞ** (ARGEŞ) Şc. gen. 4 cl. VI Milcu Andra (160), Şc. gen. 6 cl. VI FiţăFlorina-Cătălina (93). **FĂUREŞTI** (VÎLCEA) Şc. gen. cl. V Tudoraşcu Eliza (93). **FETEŞTI** (IALOMIŢA) Şc. gen. 7 cl. IV Tănase Ionuţ (74). **FOCŞANI** (VRANCEA) Şc. gen. 1 cl. VII Pavel Daniela (110), Şc. gen. 7 cl. VIII Marinescu Adina (200), Şc. gen. 8 cl. IV Pîrvu Nicoleta (95), Tudor Mihai (93), Şc. gen. 9 cl. IV Dodu Bogdan (100), Mesina Alina (90), cl. V Uşurelu Laura (57), Vlaicu Iulian (154), cl. VI Olaru Daniela (45), Tudose Simona (69), Ioniţă Cătălina (80), Şc. gen. 10 cl. III Bădălan Ştefan (130), cl. IV Bădălan Ana (80) Constantinescu Anca (30), Lic. ,,Al. I. Cuza" cl. X Mititelu Cătălin (72), Muscalu Camil (105), Lic. ,,Unirea" Ciobotaru Sonia (59). **GALAŢI** (GALAŢI) Şc. gen. 6 cl. VI Bostan Daniela (100), cl. VII Bazgu Cristina (150), Bîzu Mariana (110), Şc. gen. 9 cl. V Scovici Cristian (50), Tubluc Dana (90), Şc. gen. 10 lc. V Banu Monica (98), Barberiu Valentina (80), Bohăescu Romulus (100), Durlea Gianina (130), Giol Mihaela (100), Goidoiu Nicoleta (82), Isac Claudiu (100) Stamate Mihaela (95), Stan Aurora (90) Vicleanu Nicoleta (100), Şc. gen. 16 cl. V Oancea Geanina (78), Şc. gen. 24 cl. VI Arsene Aurelian (100), Bălan Viorel (101), Emanoil Adina (70), Mantale Răluca (100), Puşcaş Paul (45), Radu Claudiu (102), Stătescu Sorin (100), cl. gen. 25 cl. V Andrei Alina (117), cl. VI Banu Octavian (130), Chirilă Marian (180), Galu Mariana (115), Ganea Gabriela (120), Mihai Iuliana (110), Muscă Manuela (135), Talabă Mădălina (180), Talmazaru Mariana (118), Zvic Aurelia (115), Şc. gen. 27 cl. V Capotă Vasilica (78), Şc. gen. 28 cl. VI Budur Monica (240), Cinpercă Dan (144), Giurgea Mădălin (140). Gheorghe Liliana (270), Grigoraş Daniela (120), Mordiga

Scanned with OKEN Scanner

Odeta (99), Todinuță Oana-Iulia (148), Șc. gen. 29 cl. III Antohi Cornel (150), cl. VII Vlad Ioana (90), Șc. gen. 31 cl. V Stan Oana (50), cl. VI Ciuchină Ioana (99), Colea Alina (100), Iordache Bogdan (110), Lazăr Cristina (158), Năstase Raluca (137), Prutianu Lucian (90), Ripă Cătălina (130), Vlad Laura (98), Șc. gen. 42 cl. V Munteanu Iuliana (72). **GAUJANI** (GIURGIU) Șc. gen. cu cl. I—X cl. VI Velicu Diana (80). **GHERLA** (CLUJ) Șc. gen. Ana Ipătescu cl. III Costea Răzvan (150). **GURA HUMORULUI** (SUCEAVA) Șc. gen. 3 cl. VI Amariței Cristian (68) **GIURGHIU** (MUREȘ) Șc. gen. cl.VI Truția Mircea (51). **IAȘI** Lic. Național cl. V Furuică Gela (76), Lic. „C. Negruzzi" cl. VIII Mircea Birsan (20). **LIEȘTI** (GALAȚI) Șc. gen. 1 cl. VI Panaite Cristina (145). **LUCIENI** (DÎMBOVIȚA) Șc. gen. cl. VII Florea Marius (70), Ion Valentin (65), Neagu Răzvan (75), Stan Felix (80), Voicu Mirela (70). **LUNCA** (BOTOȘANI) Șc. gen. 1 cl. III Murarașu Liviu (187). **LUGOJ** (TIMIȘ) Șc. gen. 2 cl. V Cocoș Gabriel (90). **MĂCIN** (TULCEA) Șc. gen. 2 cl. VI Mititelu Isabela (107). **MĂRĂCINENI** (ARGEȘ) Șc. gen. 2 cl. VI Lupu Marian Eugen (100). **MĂSTĂCANI** (GALAȚI) Șc. gen. 1 cl. VI Mauvela Nicoleta (71), Patriche Doina (80). **MAURENI** (CARAȘ-SEVERIN) Șc gen. cl. V Vintan Nicolae Filip (70), cl. VI Pentan Dana (190), Petruț Liliana (74), Rus Viorica (70). **METEȘ** (ALBA) Șc. gen. cl. V Manea Adina Voica (50), Man Vasile (35), Opruța Nicoleta (50), Popa Felicia Florentina (47), Ștef Rodica (33), Zdrenchea Adriana (42), cl. VII Badea Lucrețiia (98). **MIREA** (HUNEDOARA) Șc. gen. cl. VII Ștefan Dana (110). **MOINEȘTI** (BACĂU) Șc. gen. 1 cl. V Breahna Anca (76), Ciobotaru Mariana (70), cl. VI Antohi Ramona (120), Iscu Lăcătușu Sergiu (79). **MORENI** (DÎMBOVIȚA) Șc. gen. 1 cl. VI Stoica Leonard (60), Rotariu Roxana (70) cl. VIII Popa Diana (80), Șc. gen. 4 cl. V Olariu Loredana (270), Toader Isabela (265), Stoica Simona (500), cl. VI Brînzan Celestin (100), Clipea Sebastian (480), Dinica Elena. Daciánu (279), Dobre Mihai (479), Iarca Răluca (88), Iliescu Daniela (400), Manole Cosmin (89), Marinescu Marian (120), Mihăilescu Camelia (160), Niță Oana (540), Rotariu Roxana (70), Stoichiță Mădălina (110), Stoicescu Elena (267), Raduța Gabriela (66), Tudose Radu (533), cl. VIII Popa Diana (80) **MOTRU** (GORJ) Șc. gen. 1 cl. V Baculescu Cornelia (168), Mocanu Eugen (75), Murgulescu Mariana (71), cl. VI Nasa Rimba Claudia (185), Vatau Rodica (210), Ștefan Costina (40). Udriște Mihaela (55), Vălceanu Claudius (85) ; cl. VII Toma Antonela (180), Lic. ind. cl. X Balaniu Mariana (110), Bran Claudiu (90), Ciurea Ema (100), Cotofană Alina (120), Chiseaga Ciprian-Gabriel (84), Daneț Camelia Dana (118), Nedelcu Laurențiu (108), Nistoran Mihaela (100), Roșu Otilia (144). **MOVILENI** (GALAȚI) Șc. gen. 1 cl. V Rachieru Cristina (110), Tudoran Cristian Dan (95), cl. VI Arfimon Mihaela (100). **MUNCELU** (VRANCEA) Șc. gen. cl. V Mandache Lăcrămioara (50). **MURGENI** (VASLUI) Șc. gen. cl. V Crăciun Alina (70), Secan Vireica (75), cl. VI Dorobanț Bogdan (109), Mihai Claudița (90), Stratulat Rica (90). **PĂTÎRLAGELE** (BUZĂU) Lic. ind. cl. VII Ciurea Ioana (90), Liță Cătălina (180), **PAUNEȘTI** (VRANCEA) Șc. gen. 1 cl. V Berbece Mariana (90), Bogdan Nicoleta (90), Bostan Mihaela (90), Cautiș Maricica (90), Chiriac Mihai (90), Cristian Cristina (90), Dumitru Florinel (90), Fihta Gheorghe (90), Iordache Valentina (90), Novac Maria (90), Pavel Valentin (90), Popa Lăcrămioara (90), Sandu Rodica (90), Stoica Cristinel (90), cl. VI Novac Lizica (90), Popa Nicoleta (90), Popa Rodica (90). **PERIEȚI** (OLT) Șc. gen. cl. V Luță Nicoleta (60), Tudorică Florina (80). **PETROȘANI** (HUNEDOARA) Lic. mat.-fiz. cl. X Isac Alin (230), cl. XI Georgescu Cristina (80). **PIATRA NEAMȚ** (NEAMȚ) Șc. gen. 2 cl. V Luca Marius Ioan (70), Părpăuță Andrei (70), Șc. gen. 27 cl. V Biciușcă Oana (80), Șc. gen. 28 cl. V Micu Florentina (90), cl. VI Ciurezu Cornel (90). **PITEȘTI** (ARGEȘ) Șc. gen. 3 cl. VI Telanu Daniela (80), Șc. gen. 14 cl. VII Băcanu Ruxandra (78), Șc. gen. 17 cl. VII Deaconescu Daniel (140). **PIRSCOV** (BUZAU) Șc. gen. cl. VI Gîtlan Gabriela (80). **PLOIEȘTI** (PRAHOVA) Șc. gen. 3 cl. VI Stănescu Andreia (120), Șc. gen. 10 cl. VI Cîrtoaje Cristian (132), Lupu Denis 132), Luca Cristian (83), Stoica Loredana (135), Șc. gen. 20 cl. VII Angelescu Iulia (100), Șc. gen. 26 cl. VI Radu Arina Georgiana (150), Șc. gen. 28 cl. VI Bărdăuș Gelu (82), Moldoveanu Cornel Felix (80), Mîndricel Elena Alina (80), fără mențiune de școală cl. VII Teodorescu Andrei (55). **POIANA** (DÎMBOVIȚA) Șc. gen. cl. V Gheorghe Irina Arabela (50). **SAMARINEȘTI** (GORJ) cl. VII Bran Valeriu Daniel (238). **SATU-MARE** Șc. gen. 1 cl. V Silaghi Călin (50), Tarța Carmen (70), Șc. gen. 17 cl. V Cămplan Cristian (30), Lic. ind. 6 cl. V Savescu Sorin-Ioan (70). cl. VI Apan Nicoleta (95), Kovacs Aliz (120), Kurtinecz Milena (127), Paleoca Codruța (110), Pop Mirela (110), Lic. ind. 14 cl. VI Horvath Daniela (95), Pascu Adrain (100), Lic. mat.-fiz. „Mihai Eminescu" cl. IX Pop Marius Lucian (165), cl. X Maier George (130), Moldovan Claudiu (180), Oros Eugen (280), fără mențiune de clasă și școală Olah Ștefania (120). **SĂRMAȘU** (MUREȘ) Șc. gen. cl. V Andrași Bogdan Terezia (90), cl. VII Burian Sergiu (210). **SEBEȘ** (ALBA) Șc. gen. 2 cl. VI Besoiu Adriani (190). **SEBIȘ** (ARAD) Șc. gen. cl. VI Csibi Melania (135) Cristea Cosmin (50), Hirina Corina Laura (70), Zopoto Alin (70). **SF. GHEORGHE** (COVASNA) Șc. gen. 9 cl. VII Bulat Dana (120), Lic. ind. 2 cl. VI Danciu Claudia (100), Lic. mat.-fiz. cl. V Vlad Cristina (60); cl. VI Lazăr Ramona-Constanța (89), Varga Anca Andreea (170). **SIBIU** (SIBIU) Șc. gen. 4 cl. VII Ticușan Stelian (80), Lic. „Gh. Lazăr" cl. IX Roru Eugen (130), Cărămidaru Maria (52), Lenghel Ramona Ioana (99), Mateșan Janetta (75), Natanaiz Alina (130), Nistor Rareș (106), Popescu Adrian (110), Stănescu Cristina (120), Sorea Sorina (100),

Scanned with OKEN Scanner

Voinicu Ioan (120), cl. XI Popescu Ioan Liviu (165), cl. XII Ticuşan Anca (108), fără mențiune de școală cl. X Braga Ionel (90), cl. XI Cîmpeanu Cristina (120). **SIGHETU MARMAȚIEI** (MARAMUREȘ)Șc. gen. 2 cl. V Dăneuș Lenuța (60), cl. VI Drule Dalia Mihaela (28), cl. VIII Chindriș Claudia Maria (90). **SINAIA** (PRAHOVA) Șc. gen. 2 cl. V Goga Casandra (67). **SINEȘTI** (IAȘI) Șc. gen. cl. VI Gafton Petronela (80). **SIRET** (SUCEAVA) cl. VI Mateiciuc Monica (100). **SÎNNICOLAUL-MARE** (TIMIȘ) Șc. gen. 2 cl. VII Sonescu Cătălin (80). **SÎNTANDREI** (BIHOR) Șc. gen. cl. VI Stef Angela (150). **SÎRBEȘTI** (GORJ) Șc. gen. cl. V Dragu Romelia (45), Lăzărescu Florin (45), Lăzărescu Marius (30), Nanu Nicolae (50), Rădulea Bogdan (50), cl. VI Lilă Daniela (150), Marinescu Elena (40), cl. VII Stoichiță Ion (42), Sordoiu Irina (80). **SLATINA** (OLT) Șc. gen. 3 cl. V Leonte Aurora (90), Moldoveanu Mihaela (70), Șc. gen. 4 cl. VII Pătrașcu Dalia-Cristina (82), Lic. „Ion Minulescu" cl. VI Năstase Miuța (20), fără mențiune de școală cl. VIII Szocs Gabriel (100). **STOINA** (GORJ) Șc. gen. cl. VI Ionescu Gabriela (170). **STRAOARE-MUNCELU** (VRANCEA) Șc. gen. cl. VI Dragomir Gabriel (50). **STREJNIC** (PRAHOVA) Șc. gen. cl. VI Nistor George (79). **STRENȚ** (ALBA) Șc. gen. cl. VIII Bolog Andrada (90). **SUCEAVA** Șc. gen. 3 cl. VI Bardan Nicușor (60), Băsu Iulian (110), Butnariu Eugen (80), Cusiac Angela (67), Rusu Sebastian (105), Sfetcu Ovidiu (140), Solcanu Simona (90), Tănase Paula Mihaela (120), cl. VII Buzolanu Monica (100), Petraș Cătălin (110), Puşcaşu Marcel (110). **TECUCI** (GALAȚI) Șc. gen. 2 cl. V Potîrnache Paul (100), cl. VI Moloca Paula (110), Parînca Cătălin (100), Șc. gen. 5 cl. V Andrucă Adriana (53), Cristian Irina (55), Daraban Oana Delia (90), Ivanov Roxana (89), Roșu Marian (77), Zăgrean Cleopatra (90), cl. VI Chiscop Cătălina (110), Stoica Marilena (72), Țocu Cătălin (90), Zagrean Cleopatra (150), cl. VII Apostu Adina (75). Șc. gen. 6 cl. VI Tălmaciu Magdalena (46), cl. VII Bălan Romeo (80), Șerban Cristian (57), Topală Florinel (100), Șc. gen. 10 cl. V Alexe Mihai (22), Borș Viorel-Cristinel (88), Capan Doru (85), Grigoraș Anca (87), Manea Ciprian (67), Mitrofan Cristina (60), Moropan Geanina (68), cl. VI Bobu Luminița (20), Chetrare Dorel (76). Dănilă Simona (100), Vîlcu Mircea (80), cl. VII Stamate Anca (50). **TELCIU** (BISTRIȚA-NĂSĂUD) Șc. gen. cl. VI Scridon Cosmin Grigore (60), Telcian Adrian Sorin (90). **TIMIȘOARA** (TIMIȘ) Șc. gen. 7 cl. V Păteanu Paula (78), cl. VI Damian Eniko (80), Vranianțu Anca (80), Șc. gen. 18 cl. V Radu Mihnea (111), Lic. „C. D. Loga" cl. V Alexa Flavia (90), cl. VI Iordache Cristina (50), Lic. „N. Lenau" Decean Flaviu (80). **TIGVENI** (ARGEȘ) Șc. gen cl. V Badea Doina (80). **TÎRGOVIȘTE** (DÎMBOVIȚA) Șc. gen. 1 cl. V Harnoiu Andrei (59), Șc. gen. 2 cl. V Aioanei Andreea (120), Andronescu Mirela (77), Șc. gen. 5 cl. V Rizea Emanuil (60), Șc. gen 6 Lupuşa Irina (78), Șc. gen. 8 cl. VII Simionescu Raluca 60. **TÎRGU-BUJOR** (GALAȚI) Șc. gen. 2 cl. V Telicov Roxana-Mădălina (108), cl. VI Dumitriu Adriana (97), Ochianu Daniela (105), Vasilache Anca (100). **TÎRGU-JIU** (GORJ) Șc. gen. 6 cl. V Țircă Diana (88). **TÎRGU MUREȘ** (MUREȘ) Șc. gen. 14 cl. V Dobrican Cristina (70), Suciu Simona (100), cl. VI Călugăr Lucian (60), Popovici Vlad (54), Șc. gen. 15 cl. V Grupar Anamaria (75). **TÎRGU-NEAMȚ** (NEAMȚ) Șc. gen. 5 cl. V Bălțătescu Cristina (76), cl. VI Antistescu Nicolae (70), cl. VIII Dănilă Dan (100). **TULCEA** Șc. gen. 10 cl. VI Boldea Arina (80), Șc. gen. 11 cl. VI Onofrei Marian (80), Lic. „Spiru Haret" cl. VII Tulceanu Alexandru (120), cl. VIII Tănase Otilia (111). **TURNU-MĂGURELE** (MEHEDINȚI) Șc. gen. 5 cl. VI Ana-Maria (77). **UNIREA** (ALBA) Șc. gen. 1 cl. VI Fanea Loredana (236). **UNGHENI** (ARGEȘ) Șc. gen. cl. VI Pănă Adela (75). **URLAȚI** (PRAHOVA) Șc. gen. 1 cl. V Berciu Adrian (93). **BACĂU** (BACĂU) Șc. gen. 1 cl. VII Ciosu Viorel (40), Șc. gen. 2 cl. VI Nicolau Radu (110), Șc. gen. 10 cl. V Gherceanu Alina (76), cl. VI Ciurea Simona (75), Eva Monica (80), Ioniță Nicoleta (70), Mireanu Andreea (80), Petrea Mihaela (80), Popa Loredana (75), Tolescu Irinel (79), cl. VII Chilat Daniela (78), David Dumitru (80), Păuleț Amalia (70), Popa Loredana (75), Schineț Magda (50), cl. VIII Ilanu Magdalena (35), Șc. gen. 15 cl. VI Aioanei Cătălina (50), Asaftei Laura (79), Șc. gen. 19 cl. V Iacob Loredana (39). Pruteanu Cătălina (60), cl. VI Aruxandrei Ana (80), Neacșu Ioan (71), Rus Ioana (80), Șc. gen. 27, cl. VI Ilisei Ciprian (280), Lic. „G. Bacovia" cl. IX Enăşoaie Mihnea (100), cl. X Tepeş Anculța (132), Voisei Mircea (140), Lic. „Ștefan cel Mare" cl. V Bordeianu Radu (78), cl. VI Popovici Robert (96). **BEIUȘ** (BIHOR) Lic. „Samuil Vulcan" cl. V Cociu Claudiu (80), Laboș Adrian (80), Lucan Adrian (60), Negrea Adrian (72), Magda Adriana (80), cl. VII Buzz Adrian (95), Masilescu Daniela (98), Mihoc Sebastian (140), Tamaș Corina (80). **BRAȘOV** (BRAȘOV). Șc. gen. 1 cl. V Ilie Romeo (60), Șc. gen. 5 cl. V Bos Anca (57), Cojocaru Aurelian (90), cl. VI Nicolau Klarin (150), Pârvu Andreia (80), Păcurar Paula (150), Șc. gen. 7 cl. VI Chioreanu Liviu (100), Moldovan Cristina (103), Solomon Gigi (90), Șc. gen. 18 cl. VIII Marian Anca (102), Șc. gen. 23 cl. VI Popescu Vasile (80), Șc. gen. 24 cl. VII Goşman Ioana (80), Șc. gen. 27 cl. V Călburean Cristina (89), Ciucluru Elena (153), Dumitru Laura (280), Tămpa Carmen (100), cl. VI Brânzea Antina (250), Chițu Adina (78), Șc. gen. 28 cl. VII Schiller Monica (90), Lic. „J. Honterus" cl. IX Dogaru Ioana (80). **BRĂILA** (BRĂILA) Șc. gen. 14 cl. IV Aplebaum Marcel (140), Șc. gen. 18 cl. V Cătălin Cauteș (55), Șc. gen. 22 cl. V Boaz Vasilica (100), Casă Mihaela (98), Coteț Nicoleta (95), Rusu Alina (100), Șc. gen. 23 cl. V Suditu Raluca (98), Șc. gen. 29 cl. V Stamate Daniela (80), Șc. gen. 31 cl. V Grosu Mariana (100), Matei Corina (140), Orășanu Raluca (43), Ruşescu Răzvan (140), Lic. „Gh. M. Murgoci" cl. X Catrina Florin

Scanned with OKEN Scanner

(120). **BUCUREȘTI** Șc. gen. 5 cl. VIII Stanciu Nicolae (100), Șc. gen. 6 cl. VI Mazuru Mihaela (100), Șc. gen. 11 cl. VII Popescu-Pompu Patrick (30), Șc. gen. 15 cl. VII Facsinay Andreea (70), Șc. gen. 2 cl. VIII. Ianuș Iuliana (150), Șc. gen. 24 cl. V Forsea Ana-Maria (90), Silion Gabriela (50), Silion Mihaela (80), cl. VIII Savopol Alexandru Virgil (90),, Șc. gen. 27 cl. V Stratulat Daniela (37), Șc. gen. 30 cl. VI Alexandru Mihaela Magdalena (120), Șc. gen. 46 cl. VII Ioan Adrian (90), Șc. gen. 59 cl. VI Cristescu Irina (110), Șc. gen. 70 cl. V Savu Carmen Gabriela (97), cl. VII Dumitru Alina (111), Șc. gen. 108 cl. X Dîrlea Victor (110), Șc. gen. 117 cl. V Marinov Irina (79), cl. VI Anton Radu Costin (79). Moldoveanu Alin (87), Șc. gen. 121 cl. VIII Ioniță Andrei (80), Șc. gen. 139 cl. VI Chiroiu Călin (24). Șc. gen. 149 cl. VII Mihai Dana (80), Șc. gen. 150 cl. VI Vătășescu Veronica (89), Șc. gen 155 cl. VI. Georgescu Irinel (180), Șc. gen. 156 cl. V Oprișan Cătălin (77), cl. VI Tudor Emanuel (63), cl. VII Parnia Oana (188), Preda Monica (120), Rădulescu Anca (88), Șc. gen 163 cl. VI Ion Dana Roberta (80), Șc. gen. 169 cl. V Dăncilă Eduard (90), Șc. gen. 172 cl. V Bănică Valeria (80), Bucurescu Iuliana (220), cl. VII Dumitrescu Cătălin (102), Șc. gen. 174 cl. VI Dușmanu Teodora Daniela (100), Maximciuc Alexandru (100), Mihai Camelia (80), Nedelcu Ramona (100), Oanță Mihai (74), Oganovici Lucian (80), Radetchi Sorin (90), Ranteș Cristina (80), cl. VII Mironov Daniela (50), Nicolescu Florin Nicolae (100), Șc. gen. 179 cl. VII Nicolae Veronica (170), Șc. gen. 195 cl. VI Bezdeanu Andrei (87), Șc. gen. 201 cl. VI Ungureanu Ștefan (89), Șc. gen. 203 cl. II Drăgulete Oana Mihaela (90), Șc. gen. 204 cl. V Marin Andrei (60), Șc. gen. 208 cl. V Șchiopu-Simu Horia (100), Lic. ,,N. Bălcescu'' cl. XI Ozunu Felicia (75), Lic. ind. 14 cl. IX Popescu Octavian (60), Lic. pedagogic cl. VIII Iliescu Ștefan (150), cl. IX Iancu Maria (100), Lic. filologie-istorie 1 cl. VII Ioan Silviu (90), Lic. ,,Gh. Lazăr'' cl. IX Teodorescu Alexandru (120). **CARACAL** (OLT) Șc. gen. 5 cl. VI Niculescu Dan Călin (26), Șc. gen. 6 cl. V Roșianu Mihăiță (110), cl. VI Cismaru Claudia (80), Dobromir Mihaela (100), Lateș Marcel (80), Mareș Augustin-Marius (80), cl. VIII Nedelciuc Doina (400). **CARANSEBEȘ** (CARAȘ-SEVERIN) Șc. gen. 8 cl. V. Borza Ionel (86), ; Chișevescu Mihail (69), Pipa Daria (70), Simulescu Florin (45), Toma Sorin (133). **CĂLINEȘTI** (MARAMUREȘ) Șc. gen. cl. V Hotea Maria (90), Rednic Ioan (90), Todoran Ioana Pălăguța (90), cl. VI Oanța Ioan (100), Godja Ștefan (85). **CĂLĂRAȘI** (CĂLĂRAȘI) Șc. gen. 4 cl. VI Marinescu Elena (110), Pănaitescu Mihai (100), Toader Liliana (40). **CEHU SILVANIEI** Șc. gen. cl. VI Iacob Nadia (90), Marchiș Ioniță (80), Olăhuț Monica (82), Paneș Remus (84). **CHIRAFTEI** (GALAȚI) Șc. gen. 1 cl. VI Maxim Daniel (90). **CIREȘU (BRĂILA)** Șc. gen. cl. V Bolentin Petrica (80), Dragomir Ilie (80), Stoicescu Marcel (90), Turtoi Luminița (80), Voinea Ionel (80), cl. VI Avramescu Nicu (180). **CÎMPINA** (PRHOVA) Șc. gen. 2 Cornoiu Jităraşcu Felix (80). **CÎMPULUNG MOLDOVENESC** (SUCEAVA) Șc. gen. 3 cl. V Lucaci Andrei (80), Ungurian Cristina (196), cl. VI Bedrule Liviu-Adrian (178), Ciurușniuc Lorin Marius (90), Corci Adriana (90), Piticari Gabriela (80), Trupan Liliana (80), Ungurianu Cristian (100), Vișinari Roxana (80), cl. VII Corci Adriana (90), Muzelok Cristina (70), Popescu Elena Gabriela (125), fără mențiune de clasă Erlich Iuliana (50), Gătej Elena Carmen (40), Maxim Eugenia (55), Tigănaș Liliana (80), Scripcă Bogdan (72), Boloca Mihaela (40), Ungurianu Cristina (90). **CARACAL** (OLT) Șc. gen. 6 cl. V Roșianu Mihăiță (110). **CARANSEBEȘ** (CARAȘ-SEVERIN) Șc. gen. 8 cl. V Margină Oana (189), cl. VI Bordoș Aurelian (80). **CĂLĂRAȘI** (CĂLĂRAȘI) Șc. gen. 1 cl. VI Petrescu Petronela (80). Șc. gen. 4 cl. VII Chirculescu Mădălina (77), cl. VIII Jelescu Cătălina (97), Șc. gen. 5 cl. VI Boca Traian (190), Buzatu Mihnea (135), Mirică Cristian (110), Nucu Morela (100). **CĂLINEȘTI** (MARAMUREȘ) Șc. gen. Călinești cl. VI Berci Claudia (100), Rad Maria (100). **CERNAVODA** (CONSTANȚA) Șc. gen. 2 cl. (fără) Hristu Viorica (65). **CÎMPINA** (PRHOVA) Șc. gen. 2 cl. VI Ioniță Laurențiu (90), Irimia Laurențiu (80). Șc. gen. 4 cl. VI Chițu Mihaela (202), Lic. ind. 5 cl. IX Tutunea Dragoș (150). **CIREȘU** (BRĂILA) Șc. gen. Cireșu cl. V Turtoi Luminița (90). **CÎMPULUNG-MUSCEL** (ARGEȘ) Șc. gen. 5 cl. VII Husea Iuliana (90). **CLUJ-NAPOCA** (CLUJ) Șc. gen. 6 cl. V Pop Codruța (110), Șc. gen. 16 cl. V Racovițan Adela (100), Lic. ,,N. Bălcescu'' cl. VII Bologa Cristian (140), Lic. mat.-fiz: 2 fără mențiune de clasă Boier Ioana (50). **CONSTANȚA** (CONSTANȚA) Șc. gen. 32 cl. V Manole Adrian (75). Șc. gen. 42 cl. VI Popa Cristian (80). **CORBU** (HARGHITA) Șc. gen. 1 cl. V Drugă Liviu (84). Goia Ileana (84). **COSTEȘTI** (ARGEȘ) Șc. gen. 1 cl. VI Anghel Cătălina (100), Goliță Emanuela (100), Marin Pedro Antonio (100). **COTEANA** (OLT) Șc. gen. 1 cl. VI Soricilă Ana (73). **CRAIOVA** (DOLJ) Șc. gen. 11 cl. VI Bușe Constantin Titel (98), Șc. gen. 19 cl. VI Mîndră Mihaela (87), Șc. gen. 21 cl. VI Popescu Tiberiu (115),, Șc. gen. 32 cl. VI Dogaru Florinel Cristian (98), Lic. ,,N. Bălcescu'' cl. VI Nicolae Elena (50), cl. IX Rizescu Marius Eusebiu (180), Lic. ,,Frații Buzești'' cl. V Simion Mădălina (100). **CURTEA DE ARGEȘ** (ARGEȘ) Șc. gen. 3 cl. IV Turjan Alexandru (78), cl. V Neagoe Roxana (75), Trulanu Liviu (87), Șc. gen. 4 cl. V Stoica Gabriel (80), Lic. ,,Vlaicu-Vodă'' cl. XII Tuță Diana (108). **CURTEA** (TIMIȘ) Șc. gen. 1 cl. V Avramescu Dorina (80). **DEJ** (CLUJ) Șc. gen. 1 cl. V Suteu Sidonia (80). Șc. gen. 3 cl. V Ilieș Nicoleta (90). **DEVA** (HUNEDOARA) Șc. gen. 2 cl. V Iacob Cristian (78), Lungoci Cristina (74), Lic. pedagogic cl. VI Ster Adrian (70). **DRĂGĂNEȘTI** (OLT) Șc. gen. 1 cl. II Dumitru Marcela (135). cl. V Dumitru Anuța (157). **DROBETA TR. SEVERIN** (SEVERIN) Șc. gen. 3 cl. VIII Cupeși Mihaela (80). **FĂGEȚ**

Scanned with OKEN Scanner

(TIMIS) Şc. gen. cl. VI Avram Marcel (140). Drăgan Diana (119), Durbălău Marcel (90). FĂLTICENI (SUCEAVA) Şc. gen. 3 cl. VI Bughin Manuela (80), Florescu Ciprian (100). FELDIOARA (BRAŞOV) Şc. gen. cl. VI Croitoru Laura (90). FETEŞTI (IALOMIŢA) Şc. gen. 7 cl. V Dache Florian (98). FIENI (DÎMBOVIŢA) Şc. gen. 1 cl. V Cojocaru Mihail (110). Firețeanu Daniel (57). FILIPEŞTII DE PĂDURE (PRAHOVA) Şc. gen. cl. V Cristea Camelia (50), cl. VI Costache Angelica (50), Grigore Aurelia (80). FOCŞANI (VRANCEA) Şc. gen. 5 cl. VI Baltariu Marius (90), Şc. gen. 6 cl. VI Stanciu Nicoleta (150), Lic. „Al. I. Cuza" cl. XII Muscalu Camil (100). GALAŢI (GALAŢI) Şc. gen. 2 cl. V Bondareu Raluca (170), Cheşcă Alina Beatrice (40), Simion Dobriţa (87), cl. VI Nistor Vasile (60), cl. VII Crăciunolu Robertino (60), Şc. gen. 6 cl. VII Zorgiu Aida (150), Şc. gen. 9 cl. V Fluturu Lucian (80), Şc. gen. 10 cl. VII Lungu Iulia (120), Şc. gen. 24 cl. V Codrescu Andreea (120), Diaconu Gabriel (115), Pugacev Mihaela (110) Scarlat Doru (80), Şc. gen. 25 cl. V Constantinescu Cati-Mihaela (78), Cot Mihaela (80), cl. VI Călina Oana (129), cl. VIII Chivu Adriana (120), Şc. gen. 28 cl. V Popescu Alin (100), cl. VI Ionescu Gabriel (106), Şc. gen. 29 cl. VII Vlad Ioana (80), Şc. gen. 33 cl. VI Tudose Cerasela (128), Şc. gen. 41 cl. V Buhgu Ana Maria (90), Şc. gen. 42 cl. V Fotache Iulian-Costinel (70), Lic. mat.-fiz. „Vasile Alecsandri" cl. IX Dumitrache Iulius-Cezar (144). GĂIEŞTI (DÎMBOVIŢA) Şc. gen. 6 cl. V Cherbel Răzvan (30), Lic. ind. 2 cl. IX Nicolae Lucian (120). GAPATA DE SUS (ARGEŞ) Şc. gen. cl. VIII Barbu Gheorghe (20). GHEORGHE GHEORGHIU-DEJ (BACĂU) Şc. gen. 5 cl. VIII Damian Anca-Cristina (78), Şc. gen. 8 cl. V Gogoaşe Monica (200), Martin Maria (48), Şc. gen. 9 cl. VI Popov Florin (80). GHERLA (CLUJ) Şc. gen. „Ana Ipătescu" cl. IV Tarţa Alin (100). GILĂU (CLUJ) Şc. gen. cl. V Vădan Crina (85), cl. VI Anghel Doina (10). GIURGIU (GIURGIU) Şc. gen. 3 cl. VI Frincu Florin (80), Voicu Alexandru Marius (80). GÎRDA DE SUS (ALBA) Şc. gen. cl. IV Cioara Adrian (192), Dobre Valentina (60), Haiduc Dorina (60), Paşca Ileana (120), Petruşe Aurica (98), Petruşe Delia-Violeta (255), Petruşe Ileana (230), Pleşa Călin (213). Savro Doru (60), cl. VI Bartes Constanţa (90), Belu Daniela (90), Bic Livia (126), Bite Carmen (90), Bite Dănuţ (90). Culda Daniela (90), Dobra Victoria (95), Dobra Corina (90), Haiduc Gabriela (90), Ioldeş Emilia (90), Mu Florica (86), Morar Gabriel (86), Negrea Dorel (95), Negrea Avram (90), Trinc Rodica (222), Trifa Georgeta (150), Tolca Vasile (75), Zdrenghea Mihaela (86). GRADINARI (CARAŞ SEVERIN) Şc. gen. cl. VII Stefănescu Anda (109). GURBEDIU (BIHOR) Şc. gen. 10 cl. V Groza Adina (25). HUŞI (IAŞI) Şc. gen. 1 cl. VII Munteanu Dan (116), cl. VIII Iftode Emanuel (110), Şc. gen. 2 cl. VI Ciupilan Corina (103), Popa Mihaela (103). HUNEDOARA (HUNEDOARA) Şc. gen. 6 cl. VI Andrei Adina (145). LEREŞTI (ARGEŞ) Şc. gen. cl. VI Soceanu Lavinia (80). LUGOJ (TIMIŞ) Şc. gen. 2 cl. V Baxo Daniel (78), Biriş Dana (69). Bogdan Mihaela (53), Jucu Alma (77), Mula Lavinia (39), Pantovici Mirabela (40), Pava Diana (88), Stănciulescu Ramona (74), Ştefănuţ Adelina (46), cl. VI Epure Iordache (80), Ogrinei Laura (90), Pascariu Laura (40), Satmari Hainal (60), Stărcescu Vandana (75), Şc. gen. 5 cl. V Bologa Bianca (50). NAZNA (MUREŞ) Şc. gen. cl. VII Suciu Mihai (93). NICSENI (BOTOŞANI) Şc. gen. cl. VI Tătărăşanu Ionel (140). NICULIŢEL (TULCEA) Şc. gen. cl. VI Jipa Ion (80). ORADEA (BIHOR) Şc. gen. 11 cl. VI Frisch Noemi (80), Jurj Monica (60), Ionescu Andreea (60). ORŞOVA (MEHEDINŢI) Şc. gen. cl. VI Megan Silviu (235), cl. VII Puşcaş Simona (25). OŢELU ROŞU (CARAŞ SEVERIN) Şc. gen. 3 cl. V Anculia Jeanina (142). PAPOŞESTI (ARGEŞ) Şc. gen. 1 cl. VI Drăguţ Laura (90). PATÎRLAGE (BACĂU) Lic. ind. cl. VI Moeni Atena (100). PĂUNEŞTI (VRANCEA) Şc. gen. cl. V Berbece Mariana (90), Bostan Mihaela (30), Cautiş Maricica (89), Chelaru Luminiţa (88), Chivoc Mihăiţă (30), Cristian Cristina (85), Ignat Daniela (12), Ignat Maria (30), Lupu Costin (30), Novac Maria (89), Pavel Valentin (30), Sandu Rodica (30), cl. VI Mazilu Nicuşor (100), Nemţeanu Adrian (90), Novac Dan (95), Novac Lizica (85), Popa Rodica (100), Popa Nicoleta (100). PIATRA NEAMŢ (NEAMŢ) Şc. gen. 2 cl. VI Alcaziu Vasile (98), Mivă Georgiana (80), Şc. gen. 27 cl. IV Atodiresei Ana (11), Andone Alina (30), Agavriloaiei Adrian (82), Mihăilă Marius (81), Anton Romeo (84), Mitrea Ciprian (83), Ichim Constantin (80), Mirza Daniela (30), Taşa Felicia (80), Andrei Carmen (86), Mazilu Mihaela (80), Jora Ionuţ (87), Vasile Vlad (90), Acatrinei Oana (77), Tofan Florin (80), Popovici Luiza (90), cl. V Adam Irina (73), Bacanelu Nicoleta (80), cl. VI Vitu Manuela (160), Şc. gen. 28 cl. V Ivan Beatris Ana (120), Popa Ionela Mădălina (70), Pascu Carmen (90), Iftode Adina (82), Pravicencu Anamaria (30), Lopincean Paula (70), cl. VI Bălcău Cristina (176). PITEŞTI (Argeş) Şc. gen. 5 cl. VI Răducu Daniel (10), cl. VII MarcuSimona (109), Şc. gen. 9 cl. VI Nicora Claudia (130), Vlăduţu Oana (130), Vecan Dana (146), Şc. gen. 13 cl. VI Georgescu Clara (50), Ene Vlad (80), Ilău Nicoleta (80), Şc. gen. 14 cl. V Maier Mihail (77), Şc. gen. 15 cl. V Ivan Nadia Loredana (150), Popescu Adrian (176), Şc. gen. 17 cl. VIII Deaconescu Daniel (150), Şc. gen. 18 Mihai Aurelian (80). PLOIEŞTI (PRAHOVA) Şc. gen. 3 cl. VI Ionescu Georgiana (95), Liptoc Luminiţa (85), Roman Irina (100), cl. VII Peltea Mihaela (60), Petre Ileana (80), Şc. gen. 10 cl. VI Ilie Carmen (115), cl. VII Cristache Costin (70), cl. VIII Băncilă Adriana (100), Şc. gen. 14 cl. VI Carp Cristina (60), Şc. gen. 20 cl. VI Matahan Angela (80), Muşat Luminiţa (99), Ungureanu Mihaela (80), Şc. gen. 21 cl. VI Matei Adrian (100), Şc. gen. 26 cl. VI Dinu Tiberiu (80), Şc. gen. 28 cl. V Manea Georgeta (80), Şc. gen. cl. III Enăchescu Mihaela (40), cl. VI Blum Andrei (96), Lic. pedagogic cl. VI Cocârlă Corina (212), cl. VII Mihăilă Camelia (100). POIANA (DÎMBOVIŢA) Şc. gen. cl. V Lupu Călin (100). POIANA CÎMPINA (PRAHOVA) cl. VI Vălcu Bogdan (165). PUCIOASA (DÎMBOVIŢA) Şc. gen. 3 Păuna Constantin (38), Şlavolu Robert (40).

I. P. Informaţia, c. 2003

Index 41 601

3,50 Lei

Scanned with OKEN Scanner

ISSN 0016-5441

SOCIETATEA DE ŞTIINŢE MATEMATICE
DIN REPUBLICA SOCIALISTĂ ROMÂNIA

GAZETA MATEMATICĂ

PUBLICAŢIE LUNARĂ PENTRU TINERET

4

DIN CUPRINS:

- APLICAŢII ALE INTEGRALEI RIEMANN
- O INEGALITATE PENTRU FUNCŢII POLINOMIALE SIMETRICE ŞI OMOGENE
- CHESTIUNI DE EXAMEN
- PROBLEME REZOLVATE PENTRU GIMNAZIU ŞI LICEU
- PROBLEME PROPUSE PENTRU CICLUL PRIMAR, GIMNAZIU, PRELIMINARE DE TIP O.I.M. PENTRU GIMNAZIU, LICEU, O.I.M. ŞI O.B.M., CONCURSUL ANUAL AL REZOLVITORILOR ŞI INFORMATICĂ
- RUBRICA REZOLVITORILOR DE PROBLEME

ANUL XCIII nr. 4/1988

Scanned with OKEN Scanner

GAZETA MATEMATICĂ

SUMARUL

1. Aplicații ale integralei Riemann, de *Marcel Chiriță*, *Ion Chițescu* și *Alexandru Constantinescu* 145
2. O inegalitate pentru funcții polinomiale simetrice și omogene, de *Mihai Bălună* 153
3. Probleme date la testul din 15 ianuarie 1988 la tabăra națională de matematică din Pitești, prezentare de *Ioan Tomescu* 155
4. Concursul interjudețean de matematică „Gheorghe Țițeica", faza finală, Slatina, 15—16 mai 1987, prezentare de *Constantin P. Niculescu* și *George Vraciu* 157
5. Din problemele date la admiterea în învățământul superior, iulie 1987, de *Maria Elena Panaitopol* 166
6. Probleme rezolvate pentru gimnaziu (E : 9111, E : 9116, E : 9123, E : 9119, E : 9120, E : 9125) 170
7. Probleme rezolvate pentru liceu (21071, 21065, 21102, 21100, 21080, 21086) 174
8. Probleme pentru ciclul primar (25—32) 178
9. Probleme pentru gimnaziu (E : 9395—E : 9418) 179
10. Probleme de tip O.I.M. pentru elevii din gimnaziu (O.G.69—O.G.70) 182
11. Probleme pentru liceu (21401—21428) 183
12. Probleme pregătitoare pentru O.I.M. și O.B.M. (O : 545—O : 547) 186
13. Probleme pentru concursul anual al rezolvitorilor (C : 777—C : 784) 187
14. Problemă rezolvată de informatică (I : 324) 188
15. Probleme de informatică (I : 331—I : 332) 188
16. Rubrica rezolvitorilor de probleme 189

ANUL XCIII 4 1988

COMITETUL DE REDACȚIE

Lector univ. **Dumitru Acu**, Sibiu ; lector univ. **Toma Albu** ; lector univ. **Horea Banea**, Brașov ; lector univ. **Octavian Băscă** ; conf. univ. **Dan Brânzei**, Iași ; prof. **Constantin Cărbunaru** ; prof. **Marcel Chiriță** ; prof. **Pal Dalyay**, Tg. Mureș ; lector univ. **Inocențiu Drăghicescu** ; prof. **Ioana Drăghici** ; înv. **Alexandrina Dumitru** ; prof. **Ilie Gheorghiță** ; prof. **Adrian Ghioca**, Sinaia ; cercetător principal **Gheorghe Gussi** ; lector univ. **Stere Ianuș** ; prof. **Ștefan Kadar**, Baia Mare ; lector univ. **Constantin Niță** ; prof. univ. **Arpad Pal**, Cluj-Napoca ; lector univ. **Laurențiu Panaitopol** ; prof. **Olimpia Popescu**, Ploiești ; matemat. **Paul Radovici-Mărculescu** ; lector univ. **Gheorghe Șirețchi** ; lector univ. **Ioan Tomescu** ; prof. **Florin Vulpescu-Jalea**.

REDACȚIA GAZETEI MATEMATICE

Redactor șef (delegat) : Acad. **N. Teodorescu** ; redactori principali : prof. **Ilie Iliescu**, prof. **Liviu Pârșan**, prof. **Marcel Țena** ; redactori principali onorifici : **C. Ioaneseu-Țiu**, asist. univ. **Eliferie Rogai** ; redactori : prof. **Liliana Balaci**, prof. **Alexandru Constantinescu**.

Responsabil de număr : prof. **Alexandru Constantinescu**.

ADRESA REDACȚIEI GAZETEI MATEMATICE

Str. Academiei nr. 14, tel. 14.46.50 — București, 1, cod. 79543.

Cititorii din străinătate se pot abona prin ROMPRESFILATELIA, Sectorul Export-Import- Presă, Calea Griviței nr. 64—66, P.O. Box 12—294, Telex 10376 Prefir București ROMÂNIA.

Scanned with OKEN Scanner

GAZETA MATEMATICĂ

PUBLICAȚIE LUNARĂ PENTRU TINERET

Anul XCIII nr. 4 aprilie 1988

APLICAȚII ALE INTEGRALEI RIEMANN

de Marcel Chiriță, Ion Chițescu și Alexandru Constantinescu

I. În acest articol pornind de la două probleme din [2] și [3] se va da o generalizare a lor cu aplicații în calcularea unor limite de șiruri și la metodele de calcul aproximativ a integralelor *Riemann*. La teorema 1 vom da două demonstrații.

Teorema 1. *Fie* $f:[a,b]\to\mathbf{R}$ *o funcție derivabilă cu derivata integrabilă Riemann și* $\lambda\in[0,1]$ *fixat. Dacă considerăm șirul* $(a_n)_{n\geq 1}$ *cu termenul general*

$$a_n=\int_a^b f(t)\,dt-\frac{b-a}{n}\left(\sum_{k=1}^{n} f\left(a+(k-\lambda)\frac{b-a}{n}\right)\right),\quad n\geq 1,$$

atunci

$$\lim_{n\to\infty} n\,a_n=\left(\lambda-\frac{1}{2}\right)(b-a)[f(b)-f(a)].$$

Demonstrația 1. Pentru fiecare $n\geq 1$ considerăm funcția $T_nf:[0,1]\to\mathbf{R}$,

$$T_nf(t)=n\left[\int_a^b f(x)\,dx-\frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(a+(k-t)\frac{b-a}{n}\right)\right].$$

Pentru fiecare $t\in(0,1]$ ne propunem să calculăm $\lim_{n\to\infty} T_nf(t)$. În prealabil vom face câteva observații. Calculăm mai întîi derivata funcției T_nf în raport cu t și obținem

$$(T_nf)'(t)=(b-a)\left[\frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f'\left(a+(k-t)\frac{b-a}{n}\right)\right].$$

Paranteza dreaptă reprezintă suma *Riemann* a funcției f' pentru diviziunea echidistantă

$$\Delta=\left(a,\ a+\frac{b-a}{n},\ \ldots\ldots,\ a+n\frac{b-a}{n}\right)$$

și punctele intermediare $a+(1-t)\frac{b-a}{n}$, $a+(2-t)\frac{b-a}{n},\ \ldots\ldots,\ a+(n-t)\frac{b-a}{n}$.

Rezultă că pentru orice $t\in[0,1]$ avem:

$$\lim_{n\to\infty}(T_nf)'(t)=(b-a)\int_a^b f'(x)\,dx=(b-a)(f(b)-f(a)),\qquad (1)$$

Din $(T_nf)'(t)=(b-a)\left[\frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f'\left(a+(k-t)\frac{b-a}{n}\right)\right]$ obținem că:

$$|(T_nf)'(t)|\leq\frac{(b-a)^2}{n}\sum_{k=1}^{n}\left|f'\left(a+(k-t)\frac{b-a}{n}\right)\right|\leq\frac{(b-a)^2}{n}\,n\cdot M'$$ deci

$$|(T_nf)'(t)|\leq(b-a)^2M'\ \text{adică}\ \sup_{t\in[0,1]}|(T_nf)'(t)|\leq(b-a)^2M',\qquad (2)$$

unde $M'=\sup\{|f'(x)|\mid x\in[a,b]\}$.

Relațiile (1) și (2) ne permit să aplicăm teorema de convergență dominată a lui *Lebesgue* pe intervalul de integrare $[0, t]$, $t \in [0, 1]$ și obținem

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^t (T_n f)'(x)\, dx = \int_0^t (b-a)(f(b)-f(a))\, dx \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} [T_n f(t) - T_n f(0)] = (b-a)(f(b)-f(a))\, t, \tag{3}$$

Dar $\lim_{n\to\infty} T_n f(0) = -\frac{1}{2}(b-a)(f(b)-f(a))$, conform [1], pag. 59. Din relația (3) va rezulta că

$$\lim_{n\to\infty} T^n f(t) = (b-a)(f(b)-f(a))\left(t - \frac{1}{2}\right), \quad (\forall) t \in [0,1]$$

sau altfel spus, renotînd $t = \lambda$, avem

$$\lim_{n\to\infty} n a_n = \left(\lambda - \frac{1}{2}\right)(b-a)(f(b)-f(a)),$$

ceea ce încheie demonstrația 1.

Demonstrația 2. Fie Δ_n o diviziune a intervalului $[a, b]$ definită astfel :

$$\Delta_n = (x_0, x_1, \ldots, x_n), \text{ unde } x_k = a + \frac{k}{n}(b-a)$$

și fie $y_k = a + (k-\lambda)\frac{b-a}{n}$, $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Atunci avem

$$a_n = \sum_{k=1}^{n} \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(t)\, dt - \sum_{k=1}^{n} \frac{b-a}{n} f(y_k) = \sum_{k=1}^{n} \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(t)\, dt - \sum_{k=1}^{n} \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(y_k)\, dt =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \int_{x_{k-1}}^{x_k} [f(t) - f(y_k)]\, dt, \quad (\forall)\, n \geq 1.$$

Aplicînd formula lui *Lagrange* pe fiecare interval de capete t și y_k obținem

$$a_n = \sum_{k=1}^{n} \int_{x_{k-1}}^{x_k} (t - y_k) f'(c_k)\, dt =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \int_{x_{k-1}}^{y_k} (t - y_k) f'(c_k)\, dt + \sum_{k=1}^{n} \int_{y_k}^{x_k} (t - y_k) f'(c_k)\, dt, \tag{4}$$

unde c_k se află în intervalul de capete t și y_k, deci aparține intervalului (x_{k-1}, x_k) și depinde de t și y_k. Deoarece funcția f' este integrabilă rezultă că ea este mărginită deci există și sînt finite numerele $m'_k = \inf\{f'(t) \mid t \in [x_{k-1}, x_k]\}$ și $M'_k = \sup\{f'(t) \mid t \in [x_{k-1}, x_k]\}$, $k \in \{0, 1, 2, \ldots, n\}$ și avem

$$m'_k \leq f'(c_k) \leq M'_k, \quad (\forall)\, k \in \{0, 1, \ldots, n\}, \tag{5}$$

Pe intervalul $[x_{k-1}, y_k]$, deoarece $t - y_k \leq 0$, din (5) rezultă că

$$M'_k(t - y_k) \leq f'(c_k)(t - y_k) \leq m'_k(t - y_k), \tag{6}$$

Relațiile (1) și (2) ne permit să aplicăm teorema de convergență dominată a lui *Lebesgue* pe intervalul de integrare $[0, t]$, $t \in [0, 1]$ și obținem:

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^t (T_n f)'(x)\, dx = \int_0^t (b-a)(f(b)-f(a))\, dx \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} [T_n f(t) - T_n f(0)] = (b-a)(f(b)-f(a))\, t, \tag{3}$$

Dar $\lim_{n\to\infty} T_n f(0) = -\frac{1}{2}(b-a)(f(b)-f(a))$, conform [1], pag. 59. Din relația (3) va rezulta că:

$$\lim_{n\to\infty} T_n f(t) = (b-a)(f(b)-f(a))\left(t - \frac{1}{2}\right), (\forall) t \in [0, 1]$$

sau altfel spus, renotînd $t = \lambda$, avem

$$\lim_{n\to\infty} n a_n = \left(\lambda - \frac{1}{2}\right)(b-a)(f(b)-f(a)),$$

ceea ce încheie demonstrația 1.

Demonstrația 2. Fie Δ_n o diviziune a intervalului $[a, b]$ definită astfel:

$$\Delta_n = (x_0, x_1, \ldots, x_n), \text{ unde } x_k = a + \frac{k}{n}(b-a)$$

și fie $y_k = a + (k-\lambda)\frac{b-a}{n}$, $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Atunci avem

$$a_n = \sum_{k=1}^{n} \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(t)\, dt - \sum_{k=1}^{n} \frac{b-a}{n} f(y_k) = \sum_{k=1}^{n} \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(t)\, dt - \sum_{k=1}^{n} \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(y_k)\, dt =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \int_{x_{k-1}}^{x_k} [f(t) - f(y_k)]\, dt, \quad (\forall)\, n \geqslant 1.$$

Aplicînd formula lui *Lagrange* pe fiecare interval de capete t și y_k obținem

$$a_n = \sum_{k=1}^{n} \int_{x_{k-1}}^{x_k} (t - y_k) f'(c_k)\, dt =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \int_{x_{k-1}}^{y_k} (t - y_k) f'(c_k)\, dt + \sum_{k=1}^{n} \int_{y_k}^{x_k} (t - y_k) f'(c_k)\, dt, \tag{4}$$

unde c_k se află în intervalul de capete t și y_k, deci aparține intervalului (x_{k-1}, x_k) și depinde de t și y_k. Deoarece funcția f' este integrabilă rezultă că ea este mărginită deci există și sînt finite numerele $m_k' = \inf\{f'(t) \mid t \in [x_{k-1}, x_k]\}$ și $M_k' = \sup\{f'(t) \mid t \in [x_{k-1}, x_k]\}$, $k \in \{0, 1, 2, \ldots, n\}$ și avem

$$m_k' \leqslant f'(c_k) \leqslant M_k', \quad (\forall)\, k \in \{0, 1, \ldots, n\}, \tag{5}$$

Pe intervalul $[x_{k-1}, y_k]$, deoarece $t - y_k \leqslant 0$, din (5) rezultă că

$$M_k'(t - y_k) \leqslant f'(c_k)(t - y_k) \leqslant m_k'(t - y_k), \tag{6}$$

Scanned with OKEN Scanner

Pe intervalul $[y_k, x_k]$, deoarece $t - y_k \geq 0$, din (5) rezultă că

$$m'_k(t - y_k) \leq f'(c_k)(t - y_k) \leq M'_k(t - y_k), \tag{7}$$

Din relația (4) și inegalitățile (6) și (7) rezultă că avem :

$$\sum_{k=1}^{n} \int_{x_{k-1}}^{y_k} (t - y_k)M'_k\,dt + \sum_{k=1}^{n} \int_{y_k}^{x_k} (t - y_k)m'_k\,dt \leq a_n \leq \sum_{k=1}^{n} \int_{x_{k-1}}^{y_k} (t - y_k)m'_k\,dt +$$

$$+ \sum_{k=1}^{n} \int_{y_k}^{x_k} (t - y_k)M'_k\,dt.$$

Deoarece m'_k și M'_k sînt constante, integrăm și obținem

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{(x_k - y_k)^2}{2} m'_k - \sum_{k=1}^{n} \frac{(x_{k-1} - y_k)^2}{2} M'_k \leq a_n \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{(x_k - y_k)^2}{2} M'_k -$$

$$- \sum_{k=1}^{n} \frac{(x_{k-1} - y_k)^2}{2} m'_k.$$

Ținînd cont că $y_k - x_{k-1} = \dfrac{(b-a)(1-\lambda)}{n}$ și $x_k - y_k = \dfrac{\lambda(b-a)}{n}$, $(\forall)\, k \in \{1, \ldots, n\}$ rezultă că

$$\frac{(b-a)^2\lambda^2}{2n^2}\left(\sum_{k=1}^{n} m'_k\right) - \frac{(b-a)^2(1-\lambda)^2}{2n^2}\left(\sum_{k=1}^{n} M'_k\right) \leq a_n \leq$$

$$\leq \frac{(b-a)^2\lambda^2}{2n^2}\left(\sum_{k=1}^{n} M'_k\right) - \frac{(b-a)^2(1-\lambda)^2}{2n^2}\left(\sum_{k=1}^{n} m'_k\right), \text{ sau}$$

$$\frac{(b-a)\lambda^2}{2}\left[\frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} m'_k\right] - \frac{(b-a)(1-\lambda)^2}{2}\left[\frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} M'_k\right] \leq na_n \leq$$

$$\leq \frac{(b-a)\lambda^2}{2}\left[\frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} M'_k\right] - \frac{(b-a)(1-\lambda)^2}{2}\left[\frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} m'_k\right], \tag{8}$$

Deoarece $s_n(f) = \dfrac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} m'_k$ și $S_n(f) = \dfrac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} M'_k$ reprezintă sumele *Darboux* inferioară, respectiv superioară a funcției f', avem că $\lim\limits_{n\to\infty} s_{\Delta_n}(f) = \int_a^b f'(t)\,dt = f(b) - f(a)$ și

$\lim\limits_{n\to\infty} S_{\Delta_n}(f) = \int_a^b f'(t)\,dt = f(b) - f(a)$. Trecînd la limită în dubla inegalitate (8) și ținînd cont că șirurile care mărginează și majorează, șirul $(na_n)_{n\geq 1}$ sînt convergente și au aceeași limită rezultă că și șirul $(na_n)_{n\geq 1}$ este convergent și

$$\lim_{n\to\infty} na_n = \frac{(2\lambda - 1)(b-a)[f(b) - f(a)]}{2},$$

ceea ce trebuia demonstrat.

Scanned with OKEN Scanner

În cazul particular cînd $\lambda = 0$, $a = 0$, $b = 1$ obținem $\lim\limits_{n\to\infty} na_n = \dfrac{f(0)-f(1)}{2}$.

În cazul particular cînd $\lambda = 1$, $a = 0$, $b = 1$ obținem $\lim\limits_{n\to\infty} na_n = \dfrac{f(1)-f(0)}{2}$.

Se observă că pentru $\lambda = \dfrac{1}{2}$ avem $\lim\limits_{n\to\infty} na_n = 0$, deci se pune problema dacă există și este finită $\lim\limits_{n\to\infty} n^2 a_n$. Răspunsul la această întrebare îl constituie următoarea teoremă (vezi [2]):

Teorema 2. *Fie $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ o funcție de două ori derivabilă cu derivata a doua integrabilă Riemann. Dacă se consideră șirul $(a_n)_{n\geq 1}$ cu termenul general*

$$a_n = \int_a^b f(t)\,dt - \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(a + \left(k - \frac{1}{2}\right)\frac{b-a}{n}\right), \quad n \geq 1,$$

atunci

$$\lim_{n\to\infty} n^2 a_n = \frac{(b-a)^2\,[f'(b) - f'(a)]}{24}.$$

Demonstrație. Ideea demonstrației este aceeași ca cea din demonstrația teoremei 1. Fie o diviziune Δ_n a intervalului $[a, b]$ definită astfel:

$$\Delta_n = (x_0, x_1, \ldots, x_n), \text{ unde } x_k = a + \frac{k}{n}(b-a)$$

și fie

$$y_k = a + \left(\frac{2k-1}{2}\right)\left(\frac{b-a}{n}\right) = \frac{x_{k-1} + x_k}{2}, \quad k \in \{0, 1, \ldots, n\}.$$

Atunci avem:

$$a_n = \sum_{k=1}^{n} \int_{x_{k-1}}^{x_k} [f(t) - f(y_k)]\,dt, \quad (\forall)\ n \geq 1.$$

Aplicăm formula lui *Taylor* cu restul *Lagrange* în punctul y_k pe fiecare interval $[x_{k-1}, x_k]$ și obținem

$$a_n = \sum_{k=1}^{n} \int_{x_{k-1}}^{x_k} \left[(t - y_k) f'(y_k) + \frac{1}{2}(t - y_k)^2 f''(c_k)\right] dt =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} f'(y_k) \int_{x_{k-1}}^{x_k} (t - y_k)\,dt + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} \int_{x_{k-1}}^{x_k} (t - y_k)^2 f''(c_k)\,dt, \tag{9}$$

unde punctele intermediare c_k sînt funcții de t. Prima sumă din exprimarea lui a_n este zero, deoarece

$$\sum_{k=1}^{n} f'(y_k) \int_{x_{k-1}}^{x_k} (t - y_k)\,dt = \sum_{k=1}^{n} f'(y_k)\left[\frac{(x_k - y_k)^2}{2} - \frac{(x_{k-1} - y_k)^2}{2}\right] = 0,$$

deoarece $2y_k = x_k + x_{k-1}$, $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

Conform relației (9) obținem

$$a_n = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\int_{x_{k-1}}^{x_k}(t-y_k)^2 f''(c_k)\,dt, \tag{10}$$

Din acest moment al demonstrației procedăm la fel ca la demonstrația teoremei 1, cu observația că acum distingerea cazurilor (6) și (7) nu mai este necesară, deoarece $(t-y_k)^2 \geqslant 0$, $(\forall)\ t \in [x_{k-1}, x_k]$.
Deci, conform relației (10) avem :

$$\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\int_{x_{k-1}}^{x_k}(t-y_k)^2 m_k''\,dt \leqslant a_n \leqslant \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\int_{x_{k-1}}^{x_k}(t-y_k)^2 M_k''\,dt, \tag{11}$$

unde $m_k'' = \inf\{f''(t) \mid t \in [x_{k-1}, x_k]\}$ și $M_k'' = \sup\{f''(t) \mid t \in [x_{k-1}, x_k]\}$.
În inegalitatea (11) calculînd integralele obținem :

$$\frac{(b-a)^2}{24}\left(\frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} m_k''\right) \leqslant n^2 a_n \leqslant \frac{(b-a)^2}{24}\left(\frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} M_k''\right), \tag{12}$$

Deoarece $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{b-a}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} m_k'' = \int_a^b f''(t)\,dt = f'(b) - f'(a)$ și

$$\lim_{n\to\infty}\frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} M_k'' = \int_a^b f''(t)\,dt = f'(b) - f'(a)$$

rezultă că șirul $n^2 a_n$ este convergent, conform criteriului cleștelui și rezultă că

$$\lim_{n\to\infty} n^2 a_n = \frac{(b-a)^2\,[f'(b) - f'(a)]}{24},$$

ceea ce trebuia demonstrat.

Caz particular. Dacă $f : [0, 1] \to \mathbf{R}$ este o funcție de două ori derivabilă cu derivata a doua integrabilă și dacă notăm cu $a_n = \int_0^1 f(t)\,dt - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{2k-1}{2n}\right)$, atunci $\lim\limits_{n\to\infty} n^2 a_n = \frac{1}{24}[f'(1) - f'(0)]$.

II. Aplicații. 1). Dacă considerăm funcția $f(x) = \dfrac{1}{x+1}$, $x \in [0, 1]$, avem

$$\int_0^1 \frac{1}{x+1}\,dx = \ln 2$$

și din teorema 1 obținem

$$\lim_{n\to\infty} n a_n = \lim_{n\to\infty} n\left[\ln 2 - \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k-\lambda}\right] = \frac{1-2\lambda}{4}, \quad (\forall)\ \lambda \in [0, 1].$$

Scanned with OKEN Scanner

Dacă aplicăm teorema 2 obținem

$$\lim_{n\to\infty} n^2 a_n = \lim_{n\to\infty} n^2\left[\ln 2 - \sum_{k=1}^{n}\frac{2}{2n+2k-1}\right] = \frac{1}{32}.$$

2). Dacă considerăm funcția $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$, $x \in [0, 1]$, avem

$$\int_0^1 f(t)\,dt = \frac{\pi}{4}$$

și obținem:

a) $\lim_{n\to\infty} n\left[\frac{\pi}{4} - \sum_{k=1}^{n}\frac{n}{n^2+k^2}\right] = \frac{3}{4}$.

b) $\lim_{n\to\infty} n^2\left[\frac{\pi}{4} - \sum_{k=1}^{n}\frac{4n}{4n^2+(2k-1)^2}\right] = \frac{1}{32}$.

3). Dacă considerăm funcția $f(x) = \sqrt{x+1}$, $x \in [0, 1]$, avem

$$\int_0^1 \sqrt{x+1}\,dx = \frac{2}{3}(2\sqrt{2}-1)$$

și obținem

$$\lim_{n\to\infty} n\left[\frac{2}{3}(2\sqrt{2}-1) - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{\frac{n+k}{n}}\right] = 1-\sqrt{2}.$$

4). Pentru funcția $f(x) = \ln x$, $x \in [1, 2]$, avem

$$\int_1^2 \ln x\,dx = 2\ln 2 - 1$$

și obținem că

$$\lim_{n\to\infty} n\left[2\ln 2 - 1 - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{k}{n}\right)\right] = -\frac{\ln 2}{2},$$

ceea ce constituie problema 21198 din G.M. 7–8/1987.

5). Să se determine $a, b \in \mathbb{R}$ astfel încît

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{n^2}{(n+1)^2} + \frac{n^2}{(n+2)^2} + \ldots + \frac{n^2}{(n+n)^2} + an + b\right] = 0.$$

Aplicînd teorema 1 pentru funcția $f(x) = \frac{1}{(1+x)^2}$, $x \in [0, 1]$ se obține succesiv că

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \frac{1}{2}$$

Scanned with OKEN Scanner

și deci

$$\lim_{n\to\infty} na_n = \lim_{n\to\infty} n\left[\frac{1}{2} - \left(\frac{n}{(n+1)^2} + \frac{n}{(n+2)^2} + \ldots + \frac{n}{(n+n)^2}\right)\right] = \frac{3}{8},$$

de unde în final rezultă că $a = -\frac{1}{2}$ și $b = \frac{3}{8}$.

6). Dacă considerăm funcția $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\frac{1}{x}, & x \in [-1,1] \setminus \{0\} \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

atunci $\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = 0$ deoarece funcția f este impară și aplicînd teorema 1 obținem că

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{2k-2\lambda-n}{n}\right)^2 \sin\frac{n}{2k-2\lambda-n} = (1-2\lambda)\sin 1.$$

7). Să se calculeze

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{(n+k-\lambda)(n+k+\lambda-1)} \quad \text{pentru } \lambda \in [0,1].$$

Dacă $\lambda \in [0,1] - \left\{\frac{1}{2}\right\}$ atunci

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{(n+k-\lambda)(n+k+\lambda-1)} = \frac{1}{1-2\lambda} \lim_{n\to\infty} n\left[\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k-(1-\lambda)} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k+\lambda}\right].$$

Dacă considerăm funcția $f(x) = \frac{1}{1+x}$, $x \in [0,1]$ și aplicînd teorema 1, avem

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{(n+k-\lambda)(n+k+\lambda-1)} = \frac{1}{1-2\lambda}\left[\lim_{n\to\infty} n\left(\int_0^1 f(x)\,dx - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k-\lambda}\right) - \right.$$

$$\left. - \lim_{n\to\infty} n\left(\int_0^1 f(x)\,dx - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k-(1-\lambda)}\right)\right] = \frac{1}{1-2\lambda}\left[\frac{1-2\lambda}{4} - \frac{1-2(1-\lambda)}{4}\right] = \frac{1}{2}.$$

Dacă $\lambda = \frac{1}{2}$ atunci avem

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{\left(n+k-\frac{1}{2}\right)^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\left(1+\frac{k-1/2}{n}\right)^2} = \int_0^1 \frac{1}{(1+x)^2}\,dx = \frac{1}{2}.$$

III. În continuare vom da o metodă de calcul aproximativ al integralei *Riemann*: Relația (8) se mai poate scrie:

$$\lambda^2 \frac{\sum_{k=1}^{n} m_k'}{n} - (1-\lambda)^2 \frac{\sum_{k=1}^{n} M_k'}{n} \leqslant \frac{2na_n}{(b-a)^2} \leqslant \lambda^2 \frac{\sum_{k=1}^{n} M_k'}{n} - (1-\lambda)^2 \frac{\sum_{k=1}^{n} m_k'}{n}, \qquad (13)$$

Scanned with OKEN Scanner

Dacă notăm cu $q'=\inf\{f'(x)\mid x\in[a,b)\}$ și cu $Q'=\sup\{f'(x)\mid x\in[a,b]\}$ avem că $\sum_{k=1}^{n} m_k' \geqslant n\,q'$ și $\sum_{k=1}^{n} M_k' \leqslant nQ'$ deci conform inegalităților (13) obținem

$$\lambda^2 q' - (1-\lambda)^2 Q' \leqslant \frac{2n\alpha_n}{(b-a)^2} \leqslant \lambda^2 Q' - (1-\lambda)^2 q', \tag{14}$$

Dacă notăm cu $M'=\sup\{|f'(x)|\mid x\in[a,b]\}$ atunci $q'\geqslant -M'$ și $Q'\leqslant M'$, deci $\lambda^2 q' - (1-\lambda)^2 Q' \geqslant -\lambda^2 M' - (1-\lambda)^2 M'$ iar $\lambda^2 Q' - (1-\lambda)^2 q' \leqslant \lambda^2 M' + (1-\lambda)^2 M'$.
Din inegalitățile (14) obținem

$$-M'(2\lambda^2 - 2\lambda + 1) \leqslant \frac{2n\alpha_n}{(b-a)^2} \leqslant M'(2\lambda^2 - 2\lambda + 1)$$

adică

$$\frac{2n|\alpha_n|}{(b-a)^2} \leqslant M'(2\lambda^2 - 2\lambda + 1) \text{ sau}$$

$$|\alpha_n| \leqslant \frac{(2\lambda^2 - 2\lambda + 1)(b-a)^2 M'}{2n}, \tag{15}$$

Inegalitatea (15) reprezintă o evaluare a erorii pe care o facem dacă aproximăm $\int_a^b f(x)\,dx$ cu o sumă *Riemann* de forma

$$\sigma_\Delta(f) = \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(a + (k-\lambda)\frac{b-a}{n}\right)$$

unde sistemul de puncte intermediare este de forma

$$a + (1-\lambda)\frac{b-a}{n},\ a + (2-\lambda)\frac{b-a}{n},\ \ldots,\ a + (n-\lambda)\frac{b-a}{n},$$

iar diviziunea Δ_n este echidistantă de normă $\frac{b-a}{n}$. Evaluarea erorii depinde și de sistemul de puncte intermediare ales ca mai sus. Se observă ușor că valoarea minimă pentru expresia $2\lambda^2 - 2\lambda + 1$ este atinsă pentru $\lambda = \frac{1}{2}$, deci dacă alegem sistemul de puncte intermediare $\xi_k = \frac{x_k + x_{k-1}}{2}$, $k\in\{1,2,\ldots,n\}$ atunci eroarea dată de formula (15) este minimă, mai exact în acest caz avem $|\alpha_n| \leqslant \frac{(b-a)^2 M'}{4n}$.

Folosind demonstrația teoremei 2 obținem o evaluare mai fină a integralei *Riemann* după cum urmează:

Să notăm $M'' = \sup\{|f''(x)|\mid x\in[a,b]\}$. Din (12) rezultă

$$-\frac{(b-a)^2}{24}\left(\frac{b-a}{n}\cdot nM''\right) \leqslant n^2\cdot\alpha_n \leqslant \frac{(b-a)^2}{24}\left(\frac{b-a}{n}\cdot nM''\right)$$

adică

$$|\alpha_n| \leqslant \frac{(b-a)^3 M''}{24\,n^2}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Scanned with OKEN Scanner

Bibliografie

[1] *N. Boboc, I. Colojoară*, Elemente de analiză matematică, manual pentru clasa a XII-a, 1979.
[2] *G. Polya, G. Szegö*, Aufgabe und Lehrsätze aus der Analysis, Springer Verlag, 1979.
[3] *Gh. Siretchi*, Calcul diferențial și integral, Vol. I—II, Editura Științifică și Enciclopedică, 1985.

O INEGALITATE PENTRU FUNCȚII POLINOMIALE SIMETRICE ȘI OMOGENE

de Mihai Bălună, profesor, București

Fie n un număr natural fixat. Vom nota cu $\mathbf{N}_n$ mulțimea

$$\{(a_1, a_2, \ldots, a_n) \mid a_1, \ldots, a_n \in \mathbf{N},\ a_1 \geqslant a_2 \geqslant \ldots \geqslant a_n\}$$

și cu $\mathcal{S}_n$ mulțimea permutărilor mulțimii $\{1, 2, \ldots, n\}$.

Pentru orice $a = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbf{N}_n$ definim polinomul

$$S_a(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{f \in \mathcal{S}_n} x_{f(1)}^{a_1} \cdots x_{f(n)}^{a_n}.$$

Observăm că $S_a(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ este un polinom simetric și omogen de grad $a_1 + a_2 + \ldots + a_n$.

De exemplu, $S_{3,2,1}(x, y, z) = x^3y^2z + x^3yz^2 + x^2y^3z + x^2yz^3 + xy^3z^2 + xy^2z^3$, iar $S_{2,0,0}(x, y, z) = 2(x^2 + y^2 + z^2)$.

Propoziția 1. *Dacă* $a, b \in \mathbf{N}_n$, $a = (a_1, \ldots, a_n)$, $b = (b_1, \ldots, b_n)$ *și* $S_a(x_1, \ldots, x_n) \geqslant S_b(x_1, \ldots, x_n)$, $(\forall)\ x_1, \ldots, x_n \in \mathbf{R}_+$, *atunci* $a_1 + a_2 + \ldots + a_k \geqslant b_1 + b_2 + \ldots + b_k$, $(\forall)\ k \in \{1, \ldots, n-1\}$ *iar* $a_1 + a_2 + \ldots + a_n = b_1 + b_2 + \ldots + b_n$.

Demonstrație. Pentru $k \leqslant n-1$, luăm $x_1 = x_2 = \ldots = x_k = x \geqslant 0$ și $x_{k+1} = \ldots = x_n = 1$. Atunci $S_a(x_1, \ldots, x_n)$ și $S_b(x_1, \ldots, x_n)$ devin funcții polinomiale de grade $a_1 + a_2 + \ldots + a_k$, respectiv $b_1 + b_2 + \ldots + b_k$, având coeficienții dominanți pozitivi.

Deoarece $\dfrac{S_b(x, \ldots, x, 1, \ldots, 1)}{S_a(x, \ldots, x, 1, \ldots, 1)} \leqslant 1$, $(\forall) x > 0$ (unde x apare de k ori), limita $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{S_b(x, \ldots, x, 1, \ldots, 1)}{S_a(x, \ldots, x, 1, \ldots, 1)}$ este finită, deci grad $S_b \leqslant$ grad S_a, de unde $a_1 + \ldots + a_k \geqslant b_1 + \ldots + b_k$.

Luînd acum $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = x$ obținem $(n!) \cdot x^{a_1 + \ldots + a_n} \geqslant (n!) \cdot x^{b_1 + \ldots + b_n}$, $(\forall) x > 0$, ceea ce nu este posibil decît dacă $a_1 + \ldots + a_n = b_1 + \ldots + b_n$.

Definiție. *Fie* $a, b \in \mathbf{N}_n$, $a = (a_1, \ldots, a_n)$, $b = (b_1, \ldots, b_n)$.

Spunem că $a \geqslant b$ *dacă și numai dacă* $a_1 + a_2 + \ldots + a_k \geqslant b_1 + b_2 + \ldots + b_k$, $(\forall) k \in \{1, \ldots, n-1\}$ *iar* $a_1 + a_2 + \ldots + a_n = b_1 + b_2 + \ldots + b_n$.

După cum se poate verifica ușor, „$\geqslant$" este o relație de ordine pe $\mathbf{N}_n$.

Lema 1. *Dacă* $a, b \in \mathbf{N}_n$ *și* $a > b$, *atunci există* $c^{(1)}, c^{(2)}, \ldots, c^{(p)} \in \mathbf{N}_n$ $(p \geqslant 2)$ *așa încît* $a = c^{(1)} > c^{(2)} > \ldots > c^{(p)} = b$, *iar* $c^{(k)}$ *și* $c^{(k+1)}$ *diferă prin exact două componente* $(\forall) k \in \{1, \ldots, p-1\}$.

Demonstrație. Luăm $c^{(1)} = a = (a_1, \ldots, a_n)$. Deoarece $a > b = (b_1, \ldots, b_n)$, există k așa încît $a_k > b_k$. Luăm cel mai mic k cu această proprietate și putem presupune $k = 1$ (în caz contrar avem $a_1 = b_1, \ldots, a_{k-1} = b_{k-1}$ și acești termeni se pot neglija în ceea ce urmează). Nu putem avea $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$ (ar rezulta $a_1 + \ldots + a_n = na_1$ și $b_1 + \ldots + b_n \leqslant nb_1 < na_1$) și nici $a_1 = \ldots = a_i = a_{i+1} + 1 = \ldots = a_n + 1$ (ar rezulta $a_1 + \ldots + a_n = ia_1 + (n-i)(a_1 - 1) = na_1 - n + i \geqslant na_1 - n + 1$, iar $b_1 + \ldots + b_n \leqslant nb_1 \leqslant n(a_1 - 1) = na_1 - n$), deci se realizează cel puțin una dintre situațiile:

1) $(\exists)\ i, j \in \mathbf{N}$, $1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n-1$ *așa încît* $a_i > a_{i+1}$ *și* $a_j > a_{j+1}$
2) $(\exists)\ i \in \mathbf{N}$, $1 \leqslant i \leqslant n-1$ *așa încît* $a_i \geqslant a_{i+1} + 2$.

Luăm atunci $c^{(2)} = (c_1^{(2)}, \ldots, c_n^{(2)})$ dat de

$$c_r^{(2)} = \begin{cases} c_r^{(1)} & \text{dacă } r \in \{1, \ldots, n\} - \{i_0, j_0\} \\ c_{i_0}^{(1)} - 1 & \text{dacă } r = i_0 \\ c_{j_0}^{(1)} + 1 & \text{dacă } r = j_0 \end{cases}$$

în cazul 1), unde $i_0 = \min\{i \mid a_i > a_{i+1}\}$, $j_0 = \min\{j \mid j > i_0, a_j > a_{j+1}\}$ sau, dacă nu se realizează cazul 1), luăm

$$c_r^{(2)} = \begin{cases} c_r^{(1)} & \text{dacă } r \in \{1, \ldots, n\} - \{i_0, i_0 + 1\} \\ c_{i_0}^{(1)} - 1 & \text{dacă } r = i_0 \\ c_{i_0+1}^{(1)} + 1 & \text{dacă } r = i_0 + 1 \end{cases}$$

unde $i_0 = \min\{i \mid a_i \geqslant a_{i+1} + 2\}$.

Se verifică imediat faptul că $a = c^{(1)} > c^{(2)} \geqslant b$, iar $c^{(1)}$ și $c^{(2)}$ diferă prin exact două componente.

Presupunînd acum că avem construiți $c^{(1)} > c^{(2)} > \ldots > c^{(l)} \geqslant b$ și $c^{(l)} > b$, procedînd ca mai sus construim $c^{(l+1)}$ așa încît $c^{(l)} > c^{(l+1)} \geqslant b$. Obținem astfel prin inducție un șir $a = c^{(1)} > c^{(2)} > c^{(3)} > \ldots \geqslant b$. Cum $c^{(k)} \leqslant a$, $(\forall)\, k \geqslant 1$, iar mulțimea $\{c \mid c_i \in \mathbf{N},\ c \leqslant a\}$ este finită (dacă $c = (c_1, \ldots, c_n)$ atunci $c_1, \ldots, c_n$ pot avea cel mult $a_1 + 1$ valori) rezultă că șirul $c^{(1)}, c^{(2)}, \ldots$ este finit, adică există p așa încît $c^{(p)} = b$.

Lema 2. *Dacă $a, b \in \mathbf{N}_n$, $a \geqslant b$ și a diferă de b prin exact două componente, atunci*

$$S_a(x_1, \ldots, x_n) \geqslant S_b(x_1, \ldots, x_n), \quad (\forall)\, x_1, \ldots, x_n \in \mathbf{R}_+.$$

Demonstrație. Fie $a = (a_1, \ldots, a_n)$, $b = (b_1, \ldots, b_n)$ și $i < j$ așa încît $a_i \neq b_i$, $a_j \neq b_j$. Avem atunci $b_i = a_i - r$, $b_j = a_j + r$, $r \in \mathbf{N}^*$ și

$$E = S_a(x_1, \ldots, x_n) - S_b(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{f \in \mathcal{S}_n} (x_{f(1)}^{a_1} \ldots x_{f(i)}^{a_i} \ldots x_{f(j)}^{a_j} \ldots x_{f(n)}^{a_n} -$$

$$- x_{f(1)}^{a_1} \ldots x_{f(i)}^{a_i - r} \ldots x_{f(j)}^{a_j + r} \ldots x_{f(n)}^{a_n}).$$

Notînd $\mathcal{A}_n = \{f \mid f \in \mathcal{S}_n,\ f \text{ pară}\}$ expresia devine

$$E = \sum_{f \in \mathcal{A}_n} x_{f(1)}^{a_1} \ldots x_{f(i-1)}^{a_{i-1}} x_{f(i+1)}^{a_{i+1}} \ldots x_{f(j-1)}^{a_{j-1}} x_{f(j+1)}^{a_{j+1}} \ldots x_{f(n)}^{a_n} \cdot$$

$$\cdot (x_{f(i)}^{a_i} x_{f(j)}^{a_j} + x_{f(j)}^{a_i} x_{f(i)}^{a_j} - x_{f(j)}^{a_i - r} x_{f(j)}^{a_j + r} - x_{f(i)}^{a_i - r} x_{f(i)}^{a_j + r}), \tag{1}$$

Deoarece $a_i > a_i - r \geqslant a_j + r > a_j$, parantezele din suma precedentă sînt de forma

$$p = x^{a_i} y^{a_j} + x^{a_j} y^{a_i} - x^{a_i - r} y^{a_j + r} - x^{a_j + r} y^{a_i - r} = x^{a_j} y^{a_j} (x^{a_i - a_j - r} -$$

$$- y^{a_i - a_j - r})(x^r - y^r) = x^{a_j} y^{a_j} (x^s - y^s)(x^r - y^r), \text{ unde } s = a_i - a_j - r > 0.$$

Deoarece funcția putere cu exponent pozitiv este strict crescătoare pe $[0, \infty)$, deducem $p \geqslant 0$, $(\forall)\, x, y \geqslant 0$, deci toți termenii sumei (1) sînt pozitivi, adică $E \geqslant 0$.

Teorema. *Fie $a, b \in \mathbf{N}_n$. Avem $S_a(x_1, \ldots, x_n) \geqslant S_b(x_1, \ldots, x_n)$, $(\forall)\, x_1, \ldots, x_n \in \mathbf{R}_+$ dacă și numai dacă $a \geqslant b$.*

Demonstrație. Implicația directă rezultă din propoziția 1. Reciproca rezultă astfel: Dacă $a = b$, atunci $S_a(x_1, \ldots, x_n) = S_b(x_1, \ldots, x_n)$, $(\forall)\, x_1, \ldots, x_n \in \mathbf{R}_+$.

Dacă $a > b$, conform lemei 1 există $c^{(1)}, c^{(2)}, \ldots, c^{(p)} \in \mathbf{N}_n$ așa încît $a = c^{(1)} > c^{(2)} > \ldots > c^{(p)} = b$ și $c^{(k)}$ diferă de $c^{(k+1)}$ prin exact două componente, $(\forall)\, k \in \{1, \ldots, p-1\}$. Conform lemei 2 avem:

$$S_a(x_1, \ldots, x_n) = S_{c^{(1)}}(x_1, \ldots x_n) \geqslant S_{c^{(2)}}(x_1, \ldots, x_n) \geqslant \ldots \geqslant S_{c^{(p)}}(x_1, \ldots, x_n) = S_b(x_1, \ldots, x_n),$$

$$(\forall)\, x_1, \ldots, x_n \in \mathbf{R}_+.$$

Aplicații

1) Dacă $a = (n, 0, \ldots, 0) \in \mathbf{N}_n$ și $b = (1, \ldots, 1) \in \mathbf{N}_n$, atunci $a \geqslant b$ deci $S_a(x_1, \ldots, x_n) \geqslant S_b(x_1, \ldots, x_n)$ sau

$$(n-1)! \cdot (x_1^n + \ldots + x_n^n) \geqslant n!\, x_1 \ldots x_n, \ (\forall)\, x_1, \ldots, x_n \in \mathbf{R}_+.$$

Scanned with OKEN Scanner

Notînd $a_k = x_k^n$, $(\forall)\ k \in \{1, \ldots, n\}$ obținem

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n \geqslant n\sqrt[n]{a_1 \ldots a_n},\ (\forall)\ a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}_+.$$

2) Cu notațiile obișnuite, inegalitatea lui *Euler* $R \geqslant 2r$ devine

$$\frac{abc}{4S} \geqslant \frac{2S}{p} \Leftrightarrow pabc \geqslant 8p(p-a)(p-b)(p-c) \Leftrightarrow abc \geqslant 8(p-a)(p-b)(p-c).$$

Notînd $p - a = x$, $p - b = y$, $p - c = z$ avem $x, y, z > 0$ și $a = y + z$, $b = x + z$, $c = x + y$ iar inegalitatea devine $(x + y)(x + z)(y + z) \geqslant 8xyz \Leftrightarrow x^2y + x^2z + xy^2 + xz^2 + y^2z + yz^2 \geqslant 6xyz \Leftrightarrow S_{(2,1,0)}(x, y, z) \geqslant S_{(1,1,1)}(x, y, z)$, evident, deoarece $(2, 1, 0) > (1,1,1)$.

3) Inegalitatea

$$\frac{(-a+b+c)^3}{a} + \frac{(a-b+c)^3}{b} + \frac{(a+b-c)^3}{c} \geqslant a^2 + b^2 + c^2,\ (\forall)\ a, b, c > 0,$$

(problema 21159 din G.M. 7—8/1987), se reduce după calcule la $a^4b + a^4c + b^4a + b^4c + c^4a + c^4b + 3(a^3b^2 + a^2c^2 + b^2a^2 + c^2a^2 + b^2c^2 + c^2b^2) \geqslant 8(a^2bc + ab^2c + abc^2)$, adică

$$S_{(4,1,0)}(a, b, c) + 3S_{(2,2,0)}(a, b, c) \geqslant 4S_{(2,1,1)}(a, b, c),$$

ceea ce rezultă din

$$S_{(4,1,0)}(a, b, c) \geqslant S_{(2,1,1)}(a, b, c) \text{ și}$$

$$S_{(2,2,0)}(a, b, c) \geqslant S_{(2,1,1)}(a, b, c).$$

PROBLEMELE DATE LA TESTUL DIN 15 IANUARIE 1988 LA TABĂRA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ DIN PITEȘTI

de lector dr. Ioan Tomescu, Facultatea de matematică, Universitatea din București

Cele patru probleme date la testul gen O.I.M. din 15 ianuarie 1988 au avut următoarele enunțuri:

1. *A, B și C sînt trei puncte pe un cerc de rază r, astfel încît* $AB = AC \leqslant r$. *D este punctul din interiorul cercului astfel încît triunghiul ACD este echilateral. Dreapta BD mai intersectează cercul în E. Să se arate că* $DE = r$.

2. *Fie* $k \geqslant 1$ *un număr natural. Să se determine numerele naturale* $a_1, \ldots, a_{2k}$ *pentru care*

$$\sum_{i=1}^{2k} 3^{a_i} = 3^k - 1.$$

3. *Fiind dat numărul întreg* $r \geqslant 1$ *să se determine cel mai mic număr întreg* $h(r) \geqslant 1$ *cu următoarea proprietate: Pentru orice partiție cu r clase a mulțimii* $\{1, 2, \ldots, h(r)\}$ *există numerele întregi* $a \geqslant 0$ *și* $1 \leqslant x \leqslant y$ *astfel încît numerele* $a + x$, $a + y$, $a + x + y$ *sînt conținute într-o aceeași clasă a partiției.*

4. *Pentru n număr natural,* $n \geqslant 1$, *se notează cu* M_n *mulțimea celor* $(n + 1)^3$ *puncte din spațiul* $\mathbb{R}^3$ *raportat la un sistem ortogonal de axe, ale căror coordonate sînt numere întregi cuprinse între 0 și n (inclusiv 0 și n). O colorare a mulțimii* M_n *cu culorile roșu și albastru este o funcție care asociază fiecărui punct din* M_n *una dintre culorile roșu și albastru.*

Să se determine numărul colorărilor mulțimii M_n *care satisfac următoarea proprietate: Pentru orice paralelipiped dreptunghic drept cu vîrfurile în punctele mulțimii* M_n *care are muchiile paralele respectiv cu axele de coordonate, numărul vîrfurilor de culoare roșie ale paralelipipedului este multiplu de 4.*

Prezentăm în continuare, pe scurt, soluțiile acestor probleme.

1. Notînd măsura arcului $\overset{\frown}{AB}$ cu α, obținem $m(\widehat{ABD}) = m(\widehat{ADB}) = 30 + \frac{\alpha}{2}$, $m(\widehat{CDE}) = 90 - \frac{\alpha}{2}$, $m(\widehat{DEC}) = \alpha$, $m(\widehat{DCE}) = 90 - \frac{\alpha}{2}$, deci triunghiurile CDE și OAB sînt con-

gruente, deci $DE = CE = r$. Se mai putea observa că măsura arcului $\widehat{CE}$ este de 60°, deci $CE = r$.

2. Se observă că o soluție a problemei este $a_1 = a_2 = 0$, $a_3 = a_4 = 1, \ldots, a_{2k-1} = a_{2k} = k-1$. Să arătăm că ea este unică (modulo o permutare a componentelor). Definim lungimea unei reprezentări a numărului $3^k - 1$ ca sumă de puteri ale lui 3 ca fiind numărul de termeni din sumă. Deoarece $2 \cdot 3^r = 3^r + 3^r$, se observă că fiecare scriere a unui număr în baza 3, scriere care este unică, generează o scriere a numărului ca sumă de puteri ale lui 3, de lungime egală cu suma cifrelor scrierii numărului în baza 3. Se observă că $2k$ este suma cifrelor numărului $3^k - 1$ în baza 2, deoarece $2(3^0 + 3^1 + \ldots + 3^{k-1}) = 3^k - 1$. Dacă demonstrăm că orice altă scriere a numărului $3^k - 1$ ca sumă de puteri ale lui 3 are o lungime strict mai mare, problema este rezolvată. Într-adevăr, dacă o scriere ca sumă de puteri ale lui 3 nu provine în modul indicat din scrierea unui număr în baza 3, rezultă că în sumă există un termen de forma 3^r care are o multiplicitate egală cu s și $s \geqslant 3$. Fie scrierea lui s în baza 3 : $s = a_q 3^q + a_{q-1} 3^{q-1} + \ldots + a_0$, unde $a_0 \neq 0$ și $q \geqslant 1$. Deoarece $(a_q 3^q + \ldots + a_0)3^r = a_q 3^{q+r} + \ldots + a_0 3^r$, care generează o scriere a lui $s3^r$ de lungime $a_q + \ldots + a_0 < s$, deoarece $s \geqslant 3$, rezultă că scrierea nu are o lungime minimă.

3. Vom demonstra că $h(r) = 2r$ prin dublă inegalitate. Fie $\{1, \ldots, 2r\} = C_1 \cup \ldots \cup C_r$ o partiție oarecare cu r clase. Deoarece între r și $2r$ există $r + 1 > r$ întregi, rezultă că există o clasă a partiției care conține cel puțin doi întregi din mulțimea $\{r, r+1, \ldots, 2r\}$. Deci există două numere întregi, u și v, astfel încît $r \leqslant u < v \leqslant 2r$ conținute într-o aceeași clasă C_t a partiției. Să notăm $a = 2u - v \geqslant 0$ și $x = y = v - u \geqslant 1$. Rezultă că $a + x = a + y = u$ și $a + x + y = v$ verifică condiția impusă, de unde obținem că numărul $h(r)$ este corect definit pentru orice $r \geqslant 1$ și în plus $h(r) \leqslant 2r$.

Să considerăm acum următoarea partiție :

$$\{1, 2, \ldots, 2r-1\} = \bigcup_{k=1}^{r-1} \{k, k+r\} \cup \{r\}.$$

Dacă $a + x$, $a + y$, $a + x + y$ ar fi toate conținute într-o clasă $C_k = \{k; k + r\}$ unde $1 \leqslant k \leqslant r - 1$ și $a \geqslant 0$, $1 \leqslant x \leqslant y$, se deduce că $a + x = a + y = k$ și $a + x + y = k + r$, deci $x = y = r$ și $a = k - r < 0$, ceea ce contrazice ipoteza. De asemenea cele trei numere nu pot fi toate trei conținute în clasa $C_r = \{r\}$, deoarece $a + x \neq a + x + y$. Rezultă deci că $h(r) \geqslant 2r$, deci există egalitatea.

4. Dacă $n = 1$ numărul de colorări este egal cu $C_8^0 + C_8^4 + C_8^8 = 72$. Dacă $n \geqslant 2$ pentru orice dreptunghi cu vîrfurile în punctele din M_n, care este paralel cu unul din planele de coordonate xOy, xOz sau yOz, mai putem găsi alte două dreptunghiuri situate în plane paralele cu dreptunghiul dat și care determină, între ele și cu dreptunghiul dat, trei paralelipipede cu muchiile paralele cu axele de coordonate. Să notăm cu r_1, r_2 și r_3 numărul de vîrfuri roșii din dreptunghiul dat și respectiv din celelalte două dreptunghiuri determinate mai înainte. Conform ipotezei, $r_1 + r_2$, $r_1 + r_3$ și $r_2 + r_3$ sînt multipli de 4, deci

$$r_1 = \frac{1}{2}(r_1 + r_2 + r_1 + r_3 - (r_2 + r_3))$$

este multiplu de 2. Deci orice dreptunghi cu vîrfurile în punctele din M_n care este paralel cu oricare din planele de coordonate conține un număr par de vîrfuri roșii. Dacă notăm de exemplu culoarea roșie cu 0 și culoarea albastră cu 1, rezultă că dacă trei vîrfuri ale unui astfel de dreptunghi au respectiv culorile a, b, c, atunci cel de al patrulea vîrf are culoarea $a + b + c$ (mod 2). Dacă fixăm culorile celor $3n + 1$ puncte din M_n situate pe axele de coordonate, atunci regula stabilită anterior determină în mod unic culorile celorlalte puncte din M_n. Pentru punctele situate în planele de coordonate acest lucru este evident, iar pentru celelalte puncte P, dacă proiecțiile lui P pe axele de coordonate au respectiv culorile a, b, c, atunci din cele trei dreptunghiuri perpendiculare pe axele de coordonate care au un vîrf în P rezultă aceeași culoare pentru P și anume $a + b + c$ (mod 2).

Să demonstrăm că orice paralelipiped cu fețele paralele cu planele de coordonate conține un număr de vîrfuri roșii care este multiplu de 4. Din construcție rezultă că acest număr este multiplu de 2. Dacă, de exemplu, paralelipipedul conține 6 vîrfuri albastre și 2 vîrfuri roșii atunci cele 2 vîrfuri roșii sînt fie extremitățile unei muchii, fie extremitățile unei diagonale a unei fețe, fie extremitățile unei diagonale a paralelipipedului și în fiecare dintre aceste cazuri găsim cîte o față care conține un singur vîrf roșu, ceea ce contrazice proprietatea colorării induse de colorarea punctelor de pe axe ca fiecare dreptunghi cu planul paralel cu unul din planele de coordonate să conțină un număr par de vîrfuri roșii. Un raționament analog are loc în cazul a 6 vîrfuri roșii și 2 albastre, deci paralelipipedul conține 0,4 sau 8 vîrfuri roșii. Rezultă

Scanned with OKEN Scanner

că pentru $n \geq 2$ numărul căutat de colorări este egal cu 2^{n+1}. Dacă un dreptunghi are planul paralel de exemplu cu xy, atunci culorile vîrfurilor sale sînt respectiv $a+b+c$, $a+b_1+c$, a_1+b+c, a_1+b_1+c, iar suma modulo 2 a acestor numere este 0.

CONCURSUL INTERJUDEȚEAN DE MATEMATICĂ „GHEORGHE ȚIȚEICA"

prezentare de Constantin P. Niculescu și George Vraciu

Faza finală a celei de a IX-a ediții a Concursului interjudețean de matematică „Gheorghe Țițeica" s-a desfășurat la liceul „Ion Minulescu" din Slatina în zilele de 15—16 mai 1987. Au participat 35 de echipe (formate din cîte trei elevi) din județele Argeș, Constanța, Dolj, Gorj, Maramureș, Mehedinți, Olt, Timiș și Vîlcea.

Juriul concursului, format din prof. dr. *George Vraciu* — președinte și conf. dr. *Alexandru Dincă*, conf. dr. *Constantin Niculescu*, lector dr. *Nicolae Țăndăreanu*, lector *Ion Virlan*, asistent dr. *Dumitru Bușneag* și asistent dr. *Ion Vladimirescu* — membri, au selecționat problemele de concurs și au coordonat corectarea lucrărilor.

În paralel cu concursul, la același liceu au avut loc în ziua de 15 mai 1987 lucrările sesiunii metodico științifice „Perfecționarea procesului de învățămînt matematic" prezidată de acad. *Nicolae Teodorescu*, președintele Societății de Științe Matematice din R.S.R.

Proba individuală. Vineri 15 mai 1987

Clasa a VII-a

1. *Să se arate că dacă* $x_1, \ldots, x_n \in \{-1, 1\}$ *și* $x_1x_2 + x_2x_3 + \ldots + x_{n-1}x_n + x_nx_1 = 0$ *atunci* n *este divizibil cu* 4.

* * *

2. *O dreaptă variabilă taie laturile* AB, BC, CD *și* DA *ale unui dreptunghi respectiv în* M, N, P *și* Q. *Să se arate că*

$$\frac{AB^2}{NQ^2} + \frac{BC^2}{MP^2} = \text{constant}.$$

* * *

3. *Fie* $ABCD$ *un paralelogram cu* $AC > BD$. *Să se afle punctul* $M \in AC$ *astfel încît patrulaterul* $BCDM$ *să fie inscriptibil. Să se arate că* BD *este tangentă comună exterioară a cercurilor* AMB *și* AMD.

* * *

Clasa a VIII-a

4. a) *Dacă* $ab > 0$, $u^2 + v^2 \leq a^2$, $x^2 + y^2 \leq b^2$, *atunci* $ux + vy \in [-ab, ab]$.

b) $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = 3x + 4\sqrt{1 - x^2}$. *Să se afle* $\max f$ *și să se precizeze* $x \in [-1,1]$ *pentru care* f *ia această valoare.*

* * *

5. *Fie* P, Q *două polinoame de grad respectiv* n *și* m, $m < n$. *Știind că resturile împărțirii lui* P *la* $x - a_1, \ldots, x - a_m$ *sînt* $Q(a_1), \ldots, Q(a_m)$, $a_i \neq a_j$ *pentru* $i \neq j$, *iar coeficientul lui* x^m *în* Q *este* 1, *să se afle restul împărțirii lui* P *la* $(x - a_1) \cdot \ldots \cdot (x - a_m)$.

Ion Vladimirescu

Scanned with OKEN Scanner

6. *Tetraedrul $ABCD$ se secționează cu un plan variabil π paralel cu muchiile AB și CD. Să se afle aria secțiunii în funcție de raportul x al distanțelor vîrfurilor A și C la π. Să se afle apoi poziția lui π pentru care secțiunea are aria maximă.*

* * *

Clasa a IX-a

7. *Să se arate că dacă $x, y, z \geq 0$ atunci are loc inegalitatea*

$$\frac{x+y+z}{3} - \sqrt[3]{xyz} \geq \max\left\{\frac{(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2}{3}, \frac{(\sqrt{y}-\sqrt{z})^2}{3}, \frac{(\sqrt{z}-\sqrt{x})^2}{3}\right\}.$$

Dumitru Buşneag

8. *Să considerăm parabolele:*

$(\Gamma_1): y = p^2 - x^2, \quad p \in \mathbf{N}^*$

$(\Gamma_2): y = x^2 - p^2, \quad p \in \mathbf{N}^*$

$(\Gamma_3): y = (x+1)^3 - x^3.$

$(\Gamma_4): y = x^2 - 6x + 1.$

a) Fie $M_k(k, y_k) \in \Gamma_3$, $k \in \mathbf{Z}$. Să se calculeze $S = \sum_{k=1}^{n} y_k$ și să se deducă valoarea expresiei $\sum_{k=1}^{n} k^2$ în funcție de n ($n \in \mathbf{N}^*$).

b) Să se determine numărul punctelor de coordonate întregi aflate în interiorul suprafeței delimitate de parabolele Γ_1 și Γ_2.

c) Dacă x_1 și x_2 sînt abscisele punctelor de intersecție ale parabolei Γ_4 cu axa Ox să se arate că $\frac{1}{x_1^n} + \frac{1}{x_2^n}$ este un număr întreg care nu se divide cu 5, pentru orice $n \in \mathbf{N}$.

Alexandru Dincă

9. *Se dau două cercuri $\mathcal{C}(O, R)$ și $\mathcal{C}(I, r)$ astfel încît $\mathcal{C}(I, r)$ este interior lui $\mathcal{C}(O, R)$. Să se demonstreze că dacă $OI^2 = R^2 - 2Rr$ atunci există o infinitate de triunghiuri înscrise în cercul $\mathcal{C}(O, R)$ și circumscrise cercului $\mathcal{C}(I, R)$. Există triunghiuri dreptunghice avînd această proprietate? Cîte?*

V. P. Soltan și S. I. Meidman

Clasa a X-a

10. a) *Fie $x_1, \ldots, x_n$ numere reale strict pozitive și $k \in \mathbf{N}^*$, $k \leq n$. Se notează $S_k(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{1 \leq i_1 < \ldots < i_k \leq n} x_{i_1} \ldots x_{i_k}$. Să se demonstreze inegalitățile*

$$S_1(x_1, \ldots, x_n) \cdot S_1\left(\frac{1}{x_1}, \ldots, \frac{1}{x_n}\right) \geq n^2,$$

$$S_k(x_1, \ldots, x_n) \cdot S_{n-k}(x_1, \ldots, x_n) \geq (C_n^k)^2 \cdot S_n(x_1, \ldots, x_n).$$

b) Dacă p este un număr prim și $n \in \mathbf{N}^*$ să se demonstreze că $(C_{p^n}^1, C_{p^n}^2, \ldots, C_{p^n}^{p^n-1}) = p$.

C. d. p. V. Baltianski și N. I. Vilenkin

11. a) *Să se arate că $\sin 1^\circ + \cos 1^\circ$ este un număr irațional.*

Scanned with OKEN Scanner

b) *Să se afle toți* $t \in [0,90°]$ *astfel încît sin t și cos t să aparțină simultan lui* $\mathbb{Q}$.

Dumitru Busneag și Alexandru Dincă

12. *Se dă un tetraedru* $[ABCD]$ *astfel încît* $AB \perp CD$ *și* $BC \perp AD$.
Să se demonstreze că:
a) Înălțimile tetraedrului sînt concurente;
b) Perpendicularele comune ale muchiilor opuse sînt concurente;
c) Suma măsurilor unghiurilor diedre dintre fețe și a unghiurilor dintre muchii și fețe este egală cu 6π.

C.d.p. *Gh. Țițeica*, problemele 342, 344, 346

Clasa a XI-a

13. *Fie* $A \in \mathcal{M}(n, \mathbb{R})$ *cu proprietatea că* $A^2 = I_n$. *Demonstrați că oricare ar fi* $X \in \mathcal{M}(n, \mathbb{R})$ *există* $Y, Z \in \mathcal{M}(n, \mathbb{R})$ *unice astfel încît* $X = Y + Z$, $AY = Y$ *și* $AZ = -Z$.

Liliana Niculescu

14. *Să se arate că dacă* $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ *atunci există o infinitate de numere complexe* λ *astfel încît matricile* $\lambda I_n + P(A)$ *să fie inversabile oricare ar fi polinomul* P *cu coeficienți întregi.*

Constantin P. Niculescu

15. *Fie* $f: (a, b) \to [m, M]$ *o funcție derivabilă astfel că* $0 \notin [m, M]$; a, b, m, M *aparțin lui* $\mathbb{R}$ *și* $a < b$.
i) Arătați că există un $\xi \in (a, b)$ *astfel încît*

$$\frac{f'(\xi)}{f(\xi)} = \frac{1}{\xi - a} + \frac{1}{\xi - b}.$$

ii) Cercetați valabilitatea afirmației de la punctul i) în cazul funcțiilor derivabile și mărginite $f: (a, b) \to \mathbb{R}$ *care nu se anulează în nici un punct.*

Constantin P. Niculescu

Clasa a XII-a

16. *i) Să se arate că dacă* $f: [0, 1] \to \mathbb{R}$ *este o funcție continuă atunci există limita*

$$l = \lim_{x \to 0} \frac{1}{x} \int_0^x f(t)\,dt.$$

ii) Este adevărat rezultatul de la punctul i) pentru funcțiile integrabile?

Constantin P. Niculescu

17. *Fie* $p \in \mathbb{N}$, $p \geq 2$. *Să se găsească toate aplicațiile* $f: \mathbb{Z}_p \to \mathbb{Z}_p$ *care se bucură de următoarele două proprietăți:*

$$f(x + y) = f(x) \cdot f(y), \qquad x, y \in \mathbb{Z}_p$$

$$f(\hat{0}) = \hat{1}.$$

Cunoașteți o problemă similară în cazul cînd $\mathbb{Z}_p$ *este înlocuit cu* $\mathbb{R}$? *Indicați detaliile. Puteți comenta și cazul altor inele?*

Constantin P. Niculescu

18. *Fie* A *un inel cu unitate* 1 *iar* $a, b \in A$ *astfel încît* $1 - ab$ *este inversabil. Să se demonstreze că și* $1 - ba$ *este inversabil.*

Scanned with OKEN Scanner

Soluții și comentarii

O paranteză dreaptă cu 10 poziții în dreptul numărului unei probleme reprezintă distribuția notelor obținute de concurenți; pe poziția k se găsește numărul concurenților care au obținut nota k. Semnul ■ semnifică sfîrșitul soluției unei probleme.

Clasa a VII-a

1. [3, 0, 2, 2, 2, 0, 2, 2, 1, 1].

Termenii sumei $S = x_1x_2 + x_2x_3 + \ldots + x_nx_1$ sînt egali cu $+1$ sau -1. Cum suma este nulă, numărul termenilor egali cu $+1$ este același cu numărul termenilor egali cu -1. Fie acest număr k. Considerăm produsul $P = (x_1x_2)(x_2x_3) \ldots (x_nx_1) = (-1)^k$. Pe de altă parte $P = x_1^2x_2^2 \ldots x_n^2 = 1$. Rezultă k par și cum $n = 2k$, rezultă că n este divizibil cu 4. ■

Această problemă a fost dată și la barajul din 3 iunie 1977 pentru selecționarea echipe olimpice a R.S.R.

2. [0, 0, 1, 1, 3, 0, 0, 0, 1, 9]

Notăm cu α unghiul format de dreptele MN și AB. Atunci

$$\frac{AB^2}{NQ^2} + \frac{BC^2}{MP^2} = \cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1. \blacksquare$$

3. [0, 0, 1, 4, 2, 0, 0, 2, 0, 6]

Pentru ca patrulaterul $BCDM$ să fie inscriptibil este necesar și suficient ca $\widehat{BDM} \equiv \widehat{BCM}$. Deci pentru a afla punctul M se duce prin D o semidreaptă situată față de BD de aceeași parte cu punctul A și care formează cu BD un unghi congruent cu $\widehat{BCA}$. Notînd cu O intersecția diagonalelor, avem $\widehat{MDO} \equiv \widehat{OAD}$ și cum $\widehat{OAD} < \widehat{ODA}$ (căci $OD < OA$) rezultă că M este între O și A.

Din faptul că $\widehat{ODM} \equiv \widehat{OAD}$ rezultă că măsura lui $\widehat{ODM}$ este măsura arcului $\widehat{DM}/2$ (aparținînd cercului circumscris triunghiului ADM). Deci BD este tangentă acestui cerc.

Din faptul că $\widehat{DBM} \equiv \widehat{MCD} \equiv \widehat{CAB}$ rezultă că măsura lui $\widehat{OBM}$ este măsura arcului $\widehat{MB}/2$ (din cercul circumscris triunghiului AMB). Deci BD este tangentă și acestui cerc. ■

Clasa a VIII-a

4. [1, 1, 0, 0, 12, 0, 0, 0, 10, 5]

a) Avem $(x^2 + y^2)(u^2 + v^2) - (xu - yv)^2 = (xv - yu)^2 \geqslant 0$ și deci

$$|xu + yv| \leqslant \sqrt{x^2 + y^2} \cdot \sqrt{u^2 + v^2} \leqslant |a| \cdot |b| = |ab| = ab.$$

b) Aplicînd inegalitatea de la punctul *a*) pentru $u = 3$, $v = 4$, $x = x$, $y = \sqrt{1 - x^2}$, $a = 5$ și $b = 1$ obținem

$$f(x) = 3x + 4\sqrt{1 - x^2} \leqslant 5.$$

Vom arăta că valoarea maximă a lui f este 5. Într-adevăr, ecuația $3x + 4\sqrt{1 - x^2} = 5$ are în intervalul $[-1, 1]$ o soluție (și numai una), $x = 3/5$. ■

Inegalitatea de la punctul a) este o formă particulară a inegalității *Cauchy — Buneakovski — Schwarz*: Dacă $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n \in \mathbb{R}$ atunci

$$\left|\sum_{k=1}^{n} a_kb_k\right| \leqslant \sqrt{\sum_{k=1}^{n} a_k^2} \cdot \sqrt{\sum_{k=1}^{n} b_k^2}$$

cu egalitate numai dacă $a_1/b_1 = \ldots = a_n/b_n$.

5. [3, 7, 6, 5, 2, 1, 4, 1, 0, 0].

Scanned with OKEN Scanner

Restul împărțirii polinomului P la $x-a_k$ este $P(a_k)$. Deci $P(a_k)=Q(a_k)$ pentru orice $k\in\{1,\dots,m\}$. Conform teoremei de împărțire cu rest, există polinoame S și R cu grad $R\leq m-1$ astfel că

$$P(x)=S(x)\cdot(x-a_1)\dots(x-a_m)+R(x),\ x\in\mathbb{R}.$$

Rezultă deci că $R(a_k)=Q(a_k)$ pentru orice k. În acest mod $Q-R$ este un polinom de grad m care are m rădăcini distincte $a_1,\dots,a_m$. Deci există $c\in\mathbb{R}$ astfel încît

$$Q(x)-R(x)=c(x-a_1)\dots(x-a_m).$$

Întrucît coeficientul lui x^m în $Q-R$ este 1, avem $c=1$. Prin urmare $R(x)=Q(x)-(x-a_1)\dots(x-a_m)$. ■

6. [0, 1, 1, 4, 6, 0, 0, 0, 7, 10]

Fie M, N, P și Q punctele în care planul π taie respectiv muchiile AC, AD, BD și BC. Din faptul că $AB\parallel\pi$ rezultă că planul π taie planele CAB și DAB (care conțin dreapta AB) după drepte paralele cu AB. Deci $MQ\parallel AB$ și $NP\parallel AB$. Analog, $MN\parallel CD$ și $PQ\parallel CD$. Deci $MNPQ$ este paralelogram. Notăm cu a și b lungimile muchiilor AB și CD iar cu α unghiul format de aceste muchii. Se arată ușor (folosind asemănarea) că raportul distanțelor punctelor A și C la planul π este egal cu AM/MC. Din asemănarea triunghiurilor AMN și ACD avem :

$$MN/CD=AM/AC.$$

Din $AM/MC=x$ rezultă $AM/AC=x/(x+1)$, deci obținem $MN=bx/(x+1)$. Din asemănarea triunghiurilor CMQ și CAB avem $MQ/AB=CM/CA$. Din $CM/MA=1/x$ rezultă $CM/CA=1/(x+1)$ deci obținem $MQ=a/(x+1)$. Aria paralelogramului $MNPQ$ este $S=MN\cdot MQ\cdot\sin\alpha=abx/(x+1)^2$; S este maximă dacă și numai dacă $(x+1)^2/x$ este minimă. Dar $(x+1)^2/x=x+1/x+2\geq 4$, egalitatea obținîndu-se pentru $x=1$, deci în cazul cînd planul π trece prin mijloacele muchiilor AC, BC, AD și BD. ■

Clasa a IX-a

7. [0, 4, 3, 2, 0, 1, 0, 0, 0, 7]

Rolurile lui x, y și z fiind simetrice este suficient să arătăm că

$$\frac{x+y+z}{3}-\sqrt[3]{xyz}\geq\frac{(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2}{3}.$$

Această inegalitate este echivalentă cu $z+\sqrt{xy}+\sqrt{xy}\geq 3\sqrt[3]{xyz}$, care se obține aplicînd inegalitatea mediilor numerelor z, $\sqrt{xy}$ și $\sqrt{xy}$. Egalitate în inegalitatea din enunț are loc dacă și numai dacă $x=y=z$. ■

Analog se demonstrează că dacă $a_1,\dots,a_n$ sînt numere reale pozitive atunci

$$\frac{a_1+\dots+a_n}{n}-\sqrt[n]{a_1\dots a_n}\geq\max_{i,j}\frac{(\sqrt{a_i}-\sqrt{a_j})^2}{n},$$

cu egalitate dacă și numai dacă $a_1=\dots=a_n$.

8. [0, 1, 1, 6, 4, 2, 1, 1, 0]

a) Avem $S=\sum_{k=1}^{n}y_k=\sum_{k=1}^{n}[(k+1)^3-k^3]=(n+1)^3-1=n^3+3n^2+3n$. Pe de altă parte $S=\sum_{k=1}^{n}[3k^2+3k+1]=3\sum_{k=1}^{n}k^2+3\sum_{k=1}^{n}k+n$. Întrucît $\sum_{k=1}^{n}k=n(n+1)/2$, rezultă $\sum_{k=1}^{n}k^2=n(n+1)(2n+1)/6$.

b) Din motive de simetrie este suficient să găsim numărul punctelor de coordonate întregi din domeniul D delimitat de semiaxele de coordonate și parabola Γ_1. Fie $k\in[0,p]$, $k\in\mathbb{N}$. Atunci numărul punctelor de coordonate întregi de abscisă k și care se găsesc în D este p^2-k^2+1.

Scanned with OKEN Scanner

Numărul total de puncte de coordonate întregi din D este

$$\sum_{k=0}^{p}(p^2-k^2+1)=p^3+p-\frac{p(p+1)(2p+1)}{6}+p+1=\frac{4p^3-3p^2+11p+6}{6}.$$

Numărul total de puncte de coordonate întregi din domeniul delimitat de parabolele Γ_1 și Γ_2 este deci

$$N=4\cdot\frac{4p^3-3p^2+11p+6}{6}-2(p^2+p+2)+1.$$

c) Avem $E(n)=\dfrac{1}{x_1^n}+\dfrac{1}{x_2^n}=\dfrac{x_1^n+x_2^n}{(x_1x_2)^n}=x_1^n+x_2^n=(3-2\sqrt{2})^n+(3+2\sqrt{2})^n\in\mathbb{N}$,

apartenența fiind motivată de formula binomului lui *Newton*. Avem

$$x_1^{n+2}-6x_1^{n+1}+x_1^n=0 \text{ și } x_2^{n+2}-6x_2^{n+1}+x_2^n=0$$

de unde prin adunare deducem relația de recurență

$$E(n+2)-6E(n+1)+E(n)=0,\ n\in\mathbb{N}.$$

De aici rezultă

$$(*)\qquad 5\mid(E(n+2)-E(n+1)+E(n)),\ n\in\mathbb{N}.$$

Avem $E(0)=2$, $E(1)=6$ și $E(2)=34$, nici unul dintre aceste numere nefiind divizibil cu 5. Presupunînd că ar exista un $n\geq 3$ cu $5\mid E(n)$, conform (*) am avea $5\mid(E(n-1)-E(n-2))$ și $5\mid(E(n-1)-E(n-2)+E(n-3))$, deci $5\mid E(n-3)$, ș.a.m.d. În definitiv ar trebui să existe $k\in\{0,1,2\}$ cu $5\mid E(k)$, contradicție. ■

9. [1, 0, 0, 1, 5, 4, 4, 0, 1, 1]

Fie A un punct arbitrar pe $\mathcal{C}(O,R)$. Tangentele din A la $\mathcal{C}(I,r)$ taie $\mathcal{C}(O,R)$ în B și C. Evident AI este bisectoare în ΔBAC. Pentru a demonstra că $\mathcal{C}(I,r)$ este înscris în triunghiul ABC este suficient să arătăm că $\widehat{IBC}\equiv\widehat{IBA}$. Fie D punctul în care AI taie $\mathcal{C}(O,R)$. Puterea punctului I față de $\mathcal{C}(O,R)$ este $IA\cdot ID=R^2-OI^2=2Rr$, dar $IA=r/(\sin A/2)$ și rezultă $ID=2Rr/IA=2R\sin A/2=BD$, deci triunghiul IBD este isoscel. Avem

$$\widehat{IBC}=\widehat{IBD}-\widehat{CBD}=\widehat{BID}-A/2=(\widehat{BAI}+\widehat{ABI})-A/2=\widehat{ABI},$$

ceea ce demonstrează că $\mathcal{C}(I,r)$ este înscris în triunghiul ABC.

Numărul de triunghiuri dreptunghice ABC care satisfac condițiile problemei este egal cu numărul de diametri ai cercului mare care sînt tangenți cercului mic: două, dacă O este exterior cercului mic; unu, dacă O este pe cercul mic; nici unul, dacă O este interior cercului mic. ■

Clasa a X-a

10. [0, 3, 1, 4, 4, 3, 0, 1, 2, 0]

a) Ambele inegalități sînt consecințe ale inegalității mediilor. Pentru prima, avem succesiv:

$$S_1(x_1,\ldots,x_n)\cdot S_1(1/x_1,\ldots,1/x_n)=(x_1+\ldots+x_n)(1/x_1+\ldots+1/x_n)\geq$$

$$\geq(n\sqrt[n]{x_1\ldots x_n})(n\sqrt[n]{1/x_1\ldots 1/x_n})=n^2.$$

Pentru a doua, remarcăm mai întîi că atît S_k cît și S_{n-k} conțin C_n^k termeni. Termenii din S_k care nu îl conțin pe x_j (j fixat) sînt în număr de C_{n-1}^k, deci S_k conține exact

$C_n^k - C_{n-1}^k = C_{n-1}^{k-1}$ termeni în care apare x_j. Prin urmare

$$S_k(x_1, \ldots, x_n) \cdot S_{n-k}(x_1, \ldots, x_n) \geqslant$$

$$\geqslant (C_n^k)^2 \left(\prod_{i=1}^{n} x_i^{C_{n-1}^{k-1}} \right)^{1/C_n^k} \left(\prod_{i=1}^{n} x_i^{C_{n-1}^{n-k-1}} \right)^{1/C_n^k} =$$

$$= (C_n^k)^2 \prod_{i=1}^{n} x_i = (C_n^k)^2 S_n(x_1, \ldots, x_n).$$

b) Fie $d = (C_{p^n}^1, \ldots, C_{p^n}^{p^n-1})$. Atunci $d \mid C_{p^n}^1 = p^n$ și deci $d = p^\alpha$ pentru un anume $\alpha \in \{0, \ldots, n\}$, $\alpha \geqslant 1$, căci $C_{p^n}^k \equiv 0 (\mathrm{mod}\ p)$ pentru orice $k \in \{1, \ldots, p^n - 1\}$. Conform unui rezultat datorat lui *Lagrange*, exponentul la care apare numărul prim p în descompunerea lui $m!$ este

$$\varepsilon_p(m!) = \sum_{i=1}^{\infty} \left[\frac{m}{p^i} \right].$$

Aici $[\ ]$ desemnează funcția parte întreagă.
Avem

$$\varepsilon_p(p^n!) = p^{n-1} + p^{n-2} + \ldots + p + 1$$

$$\varepsilon_p(p^{n-1}!) = p^{n-2} + p^{n-3} + \ldots + p + 1$$

$$\varepsilon_p((p^n - p^{n-1})!) = (p^{n-1} - p^{n-2}) + (p^{n-2} + p^{n-3}) + \ldots + p - 1 = p^{n-1} - 1$$

de unde rezultă că exponentul lui p în descompunerea lui

$$C_{p^n}^{p^{n-1}} = \frac{p^n!}{p^{n-1}!(p^n - p^{n-1})!}$$

este 1. Ca urmare $\alpha = 1$. ■

11. [0, 1, 4, 3, 4, 2, 2, 1, 0, 1]

a) Presupunem prin absurd că $p = \sin 1° + \cos 1° \in \mathbf{Q}$. Atunci $\sin 2° = p^2 - 1 \in \mathbf{Q}$ și $\cos 4° = 1 - 2\sin^2 2° \in \mathbf{Q}$. Cu formula $\cos 3\alpha = 4\cos^3 \alpha - 3\cos \alpha$ deducem de aici că $q = \cos 36° \in \mathbf{Q}$. Or, $36° = \pi/5$ și relația $\sin 2\pi/5 = \sin(\pi - 3\pi/5)$ ne arată că q este rădăcina pozitivă a ecuației $4x^2 - 2x - 1 = 0$, adică $q = \dfrac{1+\sqrt{5}}{4} \notin \mathbf{Q}$, contradicție.

b) Notînd $x = \mathrm{tg}\dfrac{t}{2}$, avem $\dfrac{2x}{1+x^2}, \dfrac{1-x^2}{1+x^2} \in \mathbf{Q}$ și $x \in [0, 1]$ adică $x \in [0, 1] \cap \mathbf{Q}$, deci t parcurge mulțimea $\{2\,\mathrm{arctg}(m/n);\ m \in \mathbf{N}, n \in \mathbf{N}^*, m \leqslant n\}$. ■

12. [0, 0, 0, 0, 2, 1, 0, 1, 2, 12].

a) Fie AA' înălțimea din A a tetraedrului. Din faptul că $CD \perp AB$ și $CD \perp AA'$ rezultă că $CD \perp (ABA')$, deci $CD \perp BA'$. Analog se arată că $BC \perp DA'$ deci A' este ortocentrul triunghiului BCD. Atunci avem și $CA' \perp BD$ și cum $AA' \perp BD$ rezultă $BD \perp (CAA')$ de unde $BD \perp AC$. Notăm $\{E\} = BA' \perp CD$. Din teorema celor trei perpendiculare rezultă $AE \perp CD$. În planul ABE ducem $BB' \perp AE$. Cum $CD \perp (ABE)$ avem $CD \perp BB'$. Rezultă $BB' \perp (ACD)$. Înălțimile AA' și BB' ale tetraedrului sînt în același timp înălțimi în ΔABE deci sînt concurente. Cele patru înălțimi ale tetraedrului sînt necoplanare și se taie două cîte două, deci sînt concurente.

b) Fie H punctul de intersecție al înălțimilor tetraedrului. Notăm $EH \cap AB = \{F\}$. Avem $CD \perp (ABE)$, deci $CD \perp EF$. Dar EF trece prin ortocentrul H al triunghiului ABE, deci $EF \perp AB$. Prin urmare EF este perpendiculara comună a dreptelor AB și CD. Am arătat că ea trece prin punctul de intersecție al înălțimilor tetraedrului. Analog, toate perpendicularele comune ale perechilor de muchii opuse trec prin H.

Scanned with OKEN Scanner

c) Unghiul diedru al planelor ACD și BCD este $\widehat{AEB}$ iar unghiurile formate de muchia AB cu planele (BCD) și (ACD) sînt respectiv $\widehat{ABE}$ și $\widehat{BAE}$. Avem $\mu(\widehat{AEB}) + \mu(\widehat{ABE}) + \mu(\widehat{BAE}) = \pi$ și analog se demonstrează încă 3 relații, prin însumarea cărora rezultă concluzia problemei. ■

Un tetraedru cu proprietățile din enunț se numește *tetraedru ortogonal* sau *ortocentric*. Pentru alte proprietăți se poate consulta de exemplu „Lecții complementare de geometrie" de *N. N. Mihăileanu*, Editura didactică și pedagogică, București 1976, pag. 89.

Clasa a XI-a

13. [0, 0, 1, 0, 2, 1, 0, 3, 2, 7]

Se arată ușor că $Y = (X + AX)/2$ și $Z = (X - AX)/2$ verifică condițiile din enunț. Pentru partea de unicitate, fie (Y', Z') o altă soluție a problemei. Atunci

$$Y + Z = Y' + Z', \quad AY = Y, \quad AY' = Y'$$

$$AZ = -Z, \quad AZ' = -Z'.$$

Deci $Y - Y' = Z' - Z$. Pe de altă parte

$$A(Y - Y') = AY - AY' = Y - Y'$$

$$A(Z' - Z) = AZ' - AZ = -Z' + Z,$$

deci avem și $Y - Y' = -(Z' - Z)$. Prin urmare $Y = Y'$ și $Z = Z'$. ■

14. [2, 4, 3, 1, 2, 3, 0, 0, 0, 1]

Pentru o matrice $B \in \mathcal{M}(n, \mathbf{C})$ definim *spectrul* lui B ca fiind mulțimea

$$\sigma(B) = \{\lambda \mid \lambda \in \mathbf{C},\ \lambda I_n - B \text{ neinversabil}\}.$$

Avem $\lambda \in \sigma(B)$ dacă și numai dacă λ este o rădăcină a polinomului

$$P_B(\lambda) = \det(\lambda I_n - B), \text{ de grad } n.$$

Ca urmare $\operatorname{card} \sigma(B) \leqslant n$ pentru orice $B \in \mathcal{M}(n, \mathbf{C})$.

Pe de altă parte, o reuniune numărabilă de mulțimi cel mult numărabile este o mulțime cel mult numărabilă, iar mulțimea $\mathcal{P}$ a polinoamelor cu coeficienți întregi este numărabilă. Prin urmare

$$\bigcup_{P \in \mathcal{P}} \sigma(P(A)) \text{ este numărabilă}$$

și cum $\mathbf{C}$ nu este, rezultă afirmația din enunț. ■

15. [2, 2, 0, 7, 2, 1, 1, 0, 0, 1]

i) Putem presupune de exemplu că $f(x) > 0$ în orice punct. Considerăm funcția $g : (a, b) \to \mathbf{R}$, $g(x) = \ln f(x) - \ln[(b - x)(x - a)]$. Funcția g este derivabilă și limitele lui g în a și respectiv b sînt $+\infty$. Aici a intervenit faptul că $\ln f(x)$ este o funcție mărginită. Conform teoremei lui *Fermat*, rezultă că există $\xi \in (a, b)$ astfel încît $g'(\xi) = 0$, echivalentul relației din enunț.

ii) Răspunsul este negativ. Un exemplu ni-l oferă funcția $f(x) = e^{-1/x}$, $x \in (0, 1)$. ■

Clasa a XII-a

16. [0, 0, 0, 0, 10, 5, 0, 0, 0, 1]

i) Conform formulei de medie, pentru fiecare $x \in [0, 1]$ există un $c_x \in [0, x]$ astfel încît

$$\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,dt = \frac{1}{x} \cdot x \cdot f(c_x) = f(c_x).$$

Continuitatea lui f și faptul că $\lim_{x \to 0} c_x = 0$ asigură existența limitei din enunț, a cărei valoare este $l = f(0)$.

Scanned with OKEN Scanner

ii) Vom arăta printr-un exemplu că răspunsul este negativ. Considerăm şirurile

$$x_n = 1/2^n, \quad y_n = 1/2^n + 1/2^{n+1}, \quad n \in \mathbf{N}$$

şi funcţia

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{dacă } x \in \{0, x_0, x_1, y_1, x_2, y_2, \dots\} \\ 1, & \text{dacă } x \in \bigcup_{n=1}^{\infty} (x_n, y_n) \\ -1, & \text{dacă } x \in \bigcup_{n=0}^{\infty} (y_{n+1}, x_n) \end{cases}$$

definită succesiv pe intervale de lungime $1/2^n$.

Integrabilitatea lui f rezultă din criteriul lui *Lebesgue* de integrabilitate *Riemann*. Şirurile $(x_n)_n$ şi $(y_n)_n$ converg la 0. Pe de altă parte pentru orice $p \in \mathbf{N}$,

$$\left| \frac{1}{x_n} \int_0^{x_n} f(t)\,dt \right| = \left| \frac{1}{x_n} \int_0^{x_{n+p}} f(t)\,dt \right| \leqslant \frac{x_{n+p}}{x_n} \to 0, \text{ cînd } p \to \infty$$

şi deci

$$\frac{1}{x_n} \int_0^{x_n} f(t)\,dt = 0.$$

În plus

$$\left| \frac{1}{y_n} \int_0^{y_n} f(t)\,dt \right| = \frac{1}{y_n} \left| \int_0^{x_n} f(t)\,dt + \int_{x_n}^{y_n} f(t)\,dt \right| = \frac{1}{y_n} \int_{x_n}^{y_n} f(t)\,dt =$$

$$= \frac{y_n - x_n}{y_n} = \frac{2^{-n-1}}{2^{-n} + 2^{-n-1}} = \frac{1}{3}$$

pentru orice $n \in \mathbf{N}^*$, ceea ce face ca răspunsul la punctul ii) să fie negativ.

17. [0, 0, 1, 1, 2, 3, 0, 0, 1, 8]

Considerăm mai întîi cazul inelului $\mathbf{Z}_p$. Fie $a = f(\hat{1})$. Atunci $f(\hat{2}) = f(\hat{1} + \hat{1}) = a^2$ şi prin inducţie matematică se arată că $f(\hat{n}) = a^n$ pentru orice $n \in \mathbf{N}$. În particular, $a^p = \hat{1}$, deci a aparţine grupului $U_p = \{m \in \mathbf{Z}_p ; (m, p) = 1\}$ a unităţilor lui $\mathbf{Z}_p$. Card $U_p = \varphi(p)$ şi un rezultat al lui *Euler* afirmă că $a^{\varphi(p)} = \hat{1}$. Această relaţie împreună cu $a^p = \hat{1}$ implică $a^q = \hat{1}$ unde $q = (p, \varphi(p))$. Funcţiile căutate vor fi deci de forma $f_a(x) = a^x$, unde a este orice element din U_p astfel că $a^q = \hat{1}$.

În particular, în cazul cînd p este prim, singura soluţie este funcţia identică $\hat{1}$.

ii) Considerăm cazul inelului $\mathbf{R}$. Fie deci $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ cu $f(0) = 1$ şi $f(x + y) = f(x) f(y)$ pentru orice $x, y \in \mathbf{R}$. Întrucît $f(2x) = f(x)^2$ pentru orice $x \in \mathbf{R}$, rezultă că $f(x) \geqslant 0$ pentru orice $x \in \mathbf{R}$; cum $1 = f(x - x) = f(x) f(-x)$, deducem că $f(x) > 0$ pentru orice $x \in \mathbf{R}$. Notăm $g(x) = \ln f(x)$, $x \in \mathbf{R}$ şi problema este echivalentă cu aceea a găsirii tuturor funcţiilor $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ care verifică *ecuaţia funcţională a lui Cauchy*

$$g(x + y) = g(x) + g(y), \quad x, y \in \mathbf{R}.$$

Notăm $g(1) = a$. Atunci $g(r) = ar$ pentru orice $r \in \mathbf{Q}$.

Dacă g este în plus continuă sau monotonă atunci $g(x) = ax$ pentru orice $x \in \mathbf{R}$. În acest caz funcţia f corespunzătoare este funcţia exponenţială, $f(x) = e^{ax}$. În cazul general, privim $\mathbf{R}$ ca spaţiu vectorial peste corpul $\mathbf{Q}$ şi pe g ca aplicaţie $\mathbf{Q}$ — liniară. Fie $(e_a)_{a \in A}$ o bază a lui $\mathbf{R}$. Orice element x al lui $\mathbf{R}$ este o combinaţie liniară finită $\sum_{a \in F} r_a e_a$ de elementele bazei, cu

Scanned with OKEN Scanner

coeficienți rationali. Alegînd arbitrar o familie $(v_a)_{a\in A}$ de numere reale, aplicația $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ dată prin

$$g(x) = \sum_{a\in F} r_a v_a, \qquad \text{dacă } x = \sum_{a\in F} r_a a$$

este o soluție a ecuației funcționale a lui *Cauchy* și orice soluție se obține în acest mod. Vezi și *M. Nicolescu*, „*Analiză matematică*"; vol. II, E. T. București 1958, p. 269—274.

iii) În cazul inelului Z avem soluțiile $f_1(x) = (-1)^x$ și $f_2(x) = 1$. În cazul inelului Q singura soluție este funcția identică 1. ∎

18. [2, 0, 1, 4, 1, 0, 0, 0, 0, 8]

Dacă u este inversul lui $1 - ab$ atunci inversul lui $1 - ba$ este $1 + bua$. Într-adevăr, $(1 - ba)(1 + bua) = 1 + bua - ba - babua = 1 - ba + b(1 - ab)ua = 1 - ba + ba = 1$ și analog, $(1 + bua)(1 - ba) = 1$. ∎

Walter Rudin (*Unique right inverses are two sided*, Amer. Math. Monthly 92 (1985) pag. 489—490) demonstrează următorul rezultat mai puternic:

Fie R un inel cu unitate 1. Dacă $z \in R$ este un invers la stînga (respectiv dreapta) al lui $1 - xy$ atunci $1 + yzx$ este invers la dreapta (stînga) al lui $1 - yx$. Prin urmare dacă $1 - x$ are unic invers la stînga, rezultă că el este inversabil.

DIN PROBLEMELE DATE LA ADMITEREA ÎN ÎNVĂȚĂMÎNTUL SUPERIOR, IULIE 1987

de **Maria Elena Panaitopol**, profesoară, București

În cele ce urmează ne vom referi la cîteva probleme de geometrie plană date la admiterea în Institutul Politehnic, iulie 1987.

1) *Pe diametrul AB al cercului $C(O, r)$ se consideră un punct fix D și M un punct mobil pe cerc. Perpendiculara în M pe MD intersectează tangentele în A și B la cerc respectiv în E și F. Să se arate că produsul $AE \cdot BF$ nu depinde de poziția lui M pe cerc.*

Soluție. În patrulaterul inscriptibil $AEMD$ avem $\widehat{AED} \equiv \widehat{AMD}$, iar în patrulaterul inscriptibil $DMFB$ avem $\widehat{FDB} \equiv \widehat{BMF}$. Cum $\widehat{AMD} \equiv \widehat{BMF}$, deoarece au același complement, rezultă că $\widehat{AED} \equiv \widehat{BDF}$ și deci triunghiurile dreptunghice DAE și DBF sînt asemenea. Rezultă de aici $\dfrac{AE}{DB} = \dfrac{AD}{BF}$ deci $AE \cdot BF = AD \cdot DB = k$, A, B, D fiind fixe.

Comentariu. Pornind de la problema dată putem formula următoarea nouă problemă:

Fie cercul $C(O, r)$, diametrul AB și Ax, By tangente la cerc în A și respectiv B în același semiplan determinat de dreapta AB; $E \in (Ax$, $F \in (By$ astfel încît $AE \cdot BF = k < r^2$. Să se arate că:

i) EF taie cercul în punctele M și N.

ii) Perpendicularele în M și N pe EF trec prin cîte un punct fix.

Soluție. Fie $A' \in (OA)$ și $B' \in (OB)$ astfel încît

$$AA' \cdot A'B = k = r^2 - OA'^2 \text{ și } BB' \cdot B'A = k = r^2 - O'B'^2.$$

Din $AA' \cdot A'B = AE \cdot BF$ rezultă că triunghiurile EAA' și $A'BF$ sînt asemenea și deci $\widehat{AEA'} \equiv \widehat{FA'B}$, $\widehat{AA'E} \equiv \widehat{A'FB}$.

Patrulaterele $EMA'A$ și $FMA'B$ sînt inscriptibile și de aici avem

$$m(\widehat{AMB}) = m(\widehat{AMA'}) + m(\widehat{A'MB}) = m(\widehat{AEA'}) + m(\widehat{A'FB}) = \frac{\pi}{2}$$

deci M se află pe semicercul de diametru AB, deci EF intersectează cercul $C(O, r)$.

Fie $B'N \perp EF$, $N \in EF$. În mod analog se arată că N se află de asemenea pe semicerc. Aceste observații justifică enunțul, punctele fixe fiind A' și B'.

2) *Fie triunghiul ABC înscris în cercul $C(O, r)$, AM, BN și CP mediane care intersectează cercul în punctele Q, R și respectiv S.*

Să se arate că $\frac{AM}{MQ}+\frac{NB}{NR}+\frac{CP}{PS}\geq 9$.

Soluție. Fie $a=BC$, $b=AC$ și $c=AB$. Din puterea punctului M față de cerc avem

$AM\cdot MQ=MB\cdot MC$ de unde $MQ=\frac{a^2}{4AM}$. Rezultă $\frac{AM}{MQ}=\frac{4AM^2}{a^2}$.

Conform teoremei medianei avem $4AM^2=2(b^2+c^2)-a^2$, deci

$$\frac{AM}{MQ}=\frac{2(b^2+c^2)-a^2}{a^2}=2\left(\frac{b^2}{a^2}+\frac{c^2}{a^2}\right)-1.$$

Analog avem

$$\frac{NB}{NR}=2\left(\frac{c^2}{b^2}+\frac{a^2}{b^2}\right)-1 \text{ și } \frac{CP}{PS}=2\left(\frac{a^2}{c^2}+\frac{b^2}{c^2}\right)-1.$$

Rezultă că

$$\frac{AM}{MQ}+\frac{NB}{NR}+\frac{CP}{PS}=2\left(\frac{b^2}{a^2}+\frac{a^2}{b^2}+\frac{c^2}{a^2}+\frac{a^2}{c^2}+\frac{c^2}{b^2}+\frac{b^2}{c^2}\right)-3.$$

Cum pentru $x>0$ avem $x+\frac{1}{x}\geq 2$ rezultă că

$$\frac{AM}{MQ}+\frac{NB}{NR}+\frac{CP}{PS}\geq 2\cdot 6-3=9.$$

ceea ce trebuia arătat.

Comentariu. Problema se poate generaliza astfel:
Fie triunghiul ABC inscris în $C(O,r)$ și $M\in(BC)$, $N\in(AC)$, $P\in(AB)$ astfel încît $\frac{BM}{BC}=\frac{CN}{AC}=\frac{AP}{AB}=\lambda$, $\lambda\in(0,1)$. *Dacă Q, R și S sînt intersecțiile lui AM, BN și respectiv CP cu cercul atunci* $\frac{AM}{MQ}+\frac{NB}{NR}+\frac{CP}{PS}\geq 9$.

Soluție. Avem $BM=a\lambda$ și $MC=a(1-\lambda)$. Din relația lui *Stewart* rezultă că $AM^2=b^2\lambda+c^2(1-\lambda)-a^2\lambda(1-\lambda)$.
Din puterea punctului M față de cerc avem că $MA\cdot MQ=MB\cdot MC$, de unde $MQ=\frac{a^2\lambda(1-\lambda)}{AM}$. Rezultă că

$$\frac{AM}{MQ}=\frac{AM^2}{a^2\lambda(1-\lambda)}=\frac{b^2\lambda+c^2(1-\lambda)}{a^2\lambda(1-\lambda)}-1=$$

$$=\frac{1}{a^2}\left(\frac{b^2}{1-\lambda}+\frac{c^2}{\lambda}\right)-1.$$

Dar din $m_{arit}\geq m_{geom}$ rezultă că

$$\frac{b^2}{1-\lambda}+\frac{c^2}{\lambda}\geq\frac{2bc}{\sqrt{\lambda(1-\lambda)}}.$$

Cum $\sqrt{\lambda(1-\lambda)}\leq\frac{1}{2}$, $\left(\Leftrightarrow\left(\lambda-\frac{1}{2}\right)^2\geq 0\right)$, rezultă că $\frac{1}{\sqrt{\lambda(1-\lambda)}}\geq 2$ și deci

$$\frac{AM}{MQ}\geq\frac{4bc}{a^2}-1.$$

Scanned with OKEN Scanner

În mod analog se arată că

$$\frac{BN}{NR} \geq \frac{4ac}{b^2} - 1 \text{ și } \frac{CP}{PS} \geq \frac{4ab}{c^2} - 1.$$

Rezultă că

$$\Sigma \frac{AM}{MQ} \geq 4\left(\frac{bc}{a^2} + \frac{ac}{b^2} + \frac{ab}{c^2}\right) - 3$$

și aplicînd din nou inegalitatea mediilor avem

$$\frac{bc}{a^2} + \frac{ac}{b^2} + \frac{ab}{c^2} \geq 3\sqrt[3]{\frac{bc}{a^2} \cdot \frac{ac}{b^2} \cdot \frac{ab}{c^2}} = 3,$$

$$\text{deci } \Sigma \frac{AM}{MQ} \geq 4 \cdot 3 - 3 = 9.$$

Ne propunem să găsim poziția punctului M astfel încît raportul $\frac{AM}{MQ}$ să fie minim.

Fie $f(\lambda) = \frac{AM}{MQ}$ deci

$$f(\lambda) = \frac{1}{a^2}\left(\frac{b^2}{1-\lambda} + \frac{c^2}{\lambda}\right) - 1, \quad f : [0, 1] \to \mathbf{R}.$$

Avem că $f'(\lambda) = \frac{1}{a^2}\left(\frac{b^2}{(1-\lambda)^2} - \frac{c^2}{\lambda^2}\right)$. Dar $f'(\lambda) = 0$ implică $\lambda^2 b^2 = (1-\lambda)^2 c^2$ deci $\lambda = \frac{c}{b+c}$ și $1 - \lambda = \frac{b}{b+c}$. Avem în acest caz $\frac{BM}{MC} = \frac{\lambda}{1-\lambda} = \frac{c}{b}$ deci AM este bisectoare. Așadar $\frac{AM}{MQ} \geq f\left(\frac{c}{b+c}\right) = \frac{4p(p-a)}{a^2}$.

3) *Dacă A este fix, iar B și C sînt mobile pe cercul circumscris triunghiului ABC astfel încît $AC^2 + AB^2 = k$ (constant) să se determine locul geometric al mijlocului M al laturii BC.*

Soluție. Fie R raza cercului circumscris triunghiului ABC. Din teorema medianei avem:

$$AM^2 = \frac{AB^2 + AC^2}{2} - \frac{BC^2}{4}, \tag{1}$$

Din teorema lui *Pitagora* în triunghiul BOM rezultă că

$$OM^2 = R^2 - \frac{BC^2}{4}, \tag{2}$$

unde O este centrul cercului circumscris triunghiului ABC.
Din relațiile (1) și (2) rezultă că

$$AM^2 - OM^2 = \frac{AB^2 + AC^2}{2} - R^2 = \frac{k}{2} - R^2 = \text{constant},$$

deoarece R este constant.

Rămîne, deoarece O și A sînt fixe, să găsim locul geometric al punctelor pentru care diferența pătratelor distanțelor la două puncte fixe este constantă, problemă ce apare în manualul de geometrie de cl. a IX-a la pag. 76 (problema 14), ediția 1985.

În continuare vom rezolva această problemă.

Scanned with OKEN Scanner

Fie $AM^2 - OM^2 = k_1$, $MN \perp OA$, $N \in OA$. Avem $MN^2 = AM^2 - NA^2$ și $MN^2 = MO^2 - ON^2$. Rezultă că $AM^2 - MO^2 = NA^2 - ON^2 = (NA - ON)(NA + ON) = k_1$ sau $NA - ON = \frac{k_1}{OA} =$ constant. Deoarece O și A sînt puncte fixe și $NA - ON$ este constant rezultă că N este fix deci locul geometric al lui M este segmentul de pe perpendiculara în N pe OA, situat în interiorul cercului.

4) *Se dau două cercuri secante. Prin unul din punctele de intersecție notat A se duce o dreaptă variabilă care intersectează a doua oară cercurile în M_1 respectiv M_2. Să se afle locul geometric al punctului $M \in (M_1M)$ astfel încît $MM_1 = 2MM_2$ și $O_2 \neq 0$ este drepte centrelor.*

Soluție. Fie $D \in (O_1O_2)$ astfel încît $O_1D = 2DO_2$ și $O_1S \perp M_1M_2$, $DP \perp M_1M_2$, $O_2T \perp M_1M_2$ unde S, P, T sînt pe dreapta M_1M_2 și O_1O_2 este dreapta centrelor.

Notînd $AM_2 = 2x$ și $AM_1 = 2y$ avem că $M_1M_2 = 2(x + y)$;

$$M_1M = \frac{2}{3} M_1M_2 = \frac{4}{3}(x + y) \text{ și } AM = M_1A - M_1M = \frac{2y - 4x}{3}, \quad (1).$$

De asemenea avem că $SP = \frac{2}{3} ST = \frac{2}{3}(x + y)$ și $AP = SA - SP = y - \frac{2}{3}(x+y) =$

$$= \frac{y - 2x}{3}, \quad (2).$$

Din (1) și (2) rezultă că $AM = 2AP$ deci $PA = PM$ și cum $DP \perp MA$ rezultă că $DM = DA$, (3). Deoarece punctele O_1 și O_2 sînt fixe rezultă că punctul D este fix. Deoarece punctele D și A sînt fixe rezultă că DA este constant, deci DM este constant, deoarece conform relației (3) avem că triunghiul ADP este isoscel cu virful în D deci $DM = DA$.

Deoarece D este fix și DM constant rezultă că locul geometric al lui M este cercul $\mathcal{C}(D, DA)$ dar, deoarece M_1 și M_2 sînt distincte de A și B, din cercul obținut se scot punctele care rezultă considerînd $M_1 \equiv A$ sau $M_2 \equiv A$.

Observație. Problema este o variantă a problemei 8 de la pag. 84 din manualul de geometrie, cl. a IX-a, ediția 1985.

5) *Fie triunghiul ABC cu B, C fixe și A variabil astfel încît $tgB + tgC = k$ (constant). Să se afle locul geometric al ortocentrului triunghiului ABC.*

Soluție. Fie $AA' \perp BC$, $BB' \perp AC$, $A' \in BC$, $B' \in AC$ și $\{H\} = AA' \cap BB'$. Avem $\widehat{BHA'} \equiv \widehat{AHB'}$ (opuse la vîrf) și $\widehat{AHB'} \equiv \widehat{BCA}$ (au aceeași măsură egală cu $90° - m(\widehat{A'AC})$). Rezultă că $\widehat{BHC} \equiv \hat{C}$ și analog $\widehat{CHA'} \equiv \hat{B}$.

În triunghiul BHA' avem $\operatorname{tg} \widehat{BHA'} = \operatorname{tg} \hat{C} = \frac{BA'}{HA'}$, iar în triunghiul CHA' avem

$$\operatorname{tg} \widehat{A'HC} = \operatorname{tg} \hat{B} = \frac{CA'}{HA'},$$

Deci $\frac{BA' + CA'}{HA'} = \operatorname{tg} \hat{B} + \operatorname{tg} \hat{C} = k$ de unde rezultă că $HA' = \frac{BC}{k} = k_1$ (constant).

Cum BC este fixă, rezultă că locul geometric este format din două drepte paralele situate în cele două semiplane determinate de dreapta BC, din care lipsesc punctele situate pe perpendicularele în B și C pe BC. Rezultatul se păstrează în cazul în care unul din unghiurile triunghiului ABC este obtuz, dar calculele sînt oarecum diferite.

Comentariu. Legat de această problemă se mai pot formula următoarele probleme:

Problema 1. *Fiind date punctele B și C fixe și A variabil astfel încît $ctg\, B + ctg\, C = k$ (constant), să se afle locul geometric al punctului A și locul geometric al centrului de greutate al triunghiului ABC.*

Problema 2. *Fiind date B și C fixe și A variabil astfel încît $ctg \frac{B}{2} + ctg \frac{C}{2} = k$ (constant). să se găsească locul geometric al centrului cercului înscris triunghiului ABC.*

Aceste probleme le lăsăm spre rezolvare cititorilor.

Scanned with OKEN Scanner

PROBLEME REZOLVATE PENTRU GIMNAZIU

Clasa a V-a

Problema E : 9111* (G.M. 4/1987, pag. 150)

Cei 30 elevi ai unei clase au obținut la o lucrare scrisă următoarele note: 12 elevi au obținut 10 sau 9, 20 elevi au obținut 9 sau 8, 15 eleni au obținut 8 sau 7 și 5 elevi au obținut 7 sau 6. Să se afle media aritmetică a tuturor notelor obținute.

Marius Dinu, elev, Zătreni, Vîlcea

Soluție. Fie x_{10} numărul elevilor care au obținut nota 10, x_9 numărul elevilor care au obținut nota 9, x_8 numărul elevilor care au obținut nota 8, x_7 numărul elevilor care au obținut nota 7 și x_6 numărul elevilor care au obținut nota 6. Avem următoarele ecuații:

$$x_{10} + x_9 = 12; \quad x_9 + x_8 = 20; \quad x_8 + x_7 = 15;$$

$$x_7 + x_6 = 5 \quad \text{și} \quad x_6 + x_7 + x_8 + x_9 + x_{10} = 30.$$

Dar ultima ecuație se mai scrie:

$x_6 + (x_7 + x_8) + (x_9 + x_{10}) = 30$ sau $x_6 + 15 + 12 = 30$ de unde $x_6 = 3$.

Rezultă $x_7 = 2$, $x_8 = 13$, $x_9 = 7$ și $x_{10} = 5$.

Media aritmetică a notelor va fi:

$$m = \frac{5\times10 + 7\times9 + 13\times8 + 2\times7 + 3\times6}{30} \quad \text{sau } m = 8{,}30.$$

Soluție bună au dat: *Beçșan Corina*, cl. a V-a, Lic. Șt. naturale Cluj-Napoca; *Tocan Franco*, cl. a V-a, Șc. gen. 8 Bîrlad.

Clasa a VI-a

Problema E : 9116* (G.M. 4/1987, pag. 151)

Folosind rigla și compasul să se împartă în trei părți congruente un unghi de măsură 108°.

I. Nicolaescu, profesor, Drăgășani, Vîlcea

Soluție. Fie xOy unghiul de măsură 108°. Considerăm punctele $A \in Ox$ și $B \in Oy$ astfel încît $OA \equiv OB$ (folosind compasul). Rezultă că triunghiul AOB este isoscel cu baza AB. Avem:

$$\widehat{OAB} \equiv \widehat{OBA} = \frac{180° - 108°}{2} = 36°.$$

Luăm un punct $C \in AB$ astfel încît $BC \equiv OB$ (folosind compasul). Rezultă că triunghiul OBC este isoscel cu baza OC, de unde deducem:

$$\widehat{BCO} \equiv \widehat{BOC} = \frac{180° - 36°}{2} = \frac{144°}{2} = 72°.$$

Scanned with OKEN Scanner

Din $\widehat{AOB} = 108°$ și $\widehat{BOC} = 72°$ rezultă că $\widehat{AOC} = 36°$. Construim (cu compasul) bisectoarea OD a unghiului $\widehat{BOC}$ ($D \in AB$), deci $\widehat{COD} \equiv \widehat{DOB} = \frac{72°}{2} = 36°$. Prin urmare am împărțit unghiul xOy în $\widehat{xOC} \equiv \widehat{COD} \equiv \widehat{DOy} = 36° = \frac{108°}{3}$.

Soluție bună au dat: *Cocârlă Corina*, cl. a VI-a, Lic. Pedagogic Pitești; *Petruș Marius*, cl. a VI-a, Șc. gen. Almașu.

Problema E: 9123* (G.M. 4/1987 pag. 152)

Se consideră trapezul $ABCD$ $(AB \| CD)$ *în care* $CD = k \cdot AB$, $k > 1$.

a) *Să se arate că are loc relația*

$$BC^2 + AD^2 + 2kAB^2 = AC^2 + BD^2.$$

b) *Dacă în plus trapezul se poate circumscrie unui cerc atunci are loc și relația:* $(k+1)\,AB = BC + AD$.

c) *Dacă în plus trapezul are diagonalele perpendiculare, atunci:*

$$kAB^2 = BC \cdot AD; \quad (k+1)\,AB = \sqrt{AC^2 + BD^2} \quad \text{și} \quad AB \geq \frac{\sqrt{S}}{k+1},$$

unde S *este aria trapezului.*

Nicolae Pavelescu, profesor, Rm. Vîlcea

Soluție. a) Fie $AA' \perp CD$ și $BB' \perp CD$, $(A', B' \in CD)$. Scriind teorema lui *Pitagora* în triunghiurile dreptunghice $AA'C$, $BB'D$, $AA'D$ și $BB'C$ avem

$$AC^2 = A'A^2 + A'C^2; \qquad A'D^2 = AD^2 - A'A^2;$$
$$BD^2 = B'B^2 + B'D^2; \qquad B'C^2 = BC^2 - B'B^2;$$

Ținînd seama că $AA' \equiv BB' = h$ și că $A'C = DC - A'D$ și $B'D = DC - B'C$, obținem:

$$AC^2 = h^2 + DC^2 + A'D^2 - 2\,DC \cdot A'D \text{ și}$$
$$BD^2 = h^2 + DC^2 + B'C^2 - 2\,DC \cdot B'C.$$

Adunînd aceste relații și ținînd seama că $DC = k \cdot AB$ se obține relația din enunț.

b) Dacă trapezul se poate circumscrie unui cerc atunci avem relația $AB + CD = AD + BC$ de unde $AB + kAB = AD + BC$, deci

$$AB(k+1) = AD + BC, \qquad (1).$$

c) Fie $AC \cap BD = \{O\}$. Avem $\frac{AO}{OC} = \frac{BO}{OD} = \frac{AB}{CD} = \frac{1}{k}$,

Scanned with OKEN Scanner

de unde, prin proporții derivate obținem :

$$\frac{AO}{AC} = \frac{BO}{BD} = \frac{1}{k+1} \Rightarrow \begin{cases} AC = AO\,(k+1) \\ BD = BO\,(k+1). \end{cases}$$

Adunăm pătratele acestor două relații, ținem seama că triunghiul AOB este dreptunghic ($\widehat{AOB} = 90°$) și obținem

$$AC^2 + BD^2 = (k+1)^2 \cdot AB^2 \Rightarrow (k+1)\,AB = \sqrt{AC^2 + BD^2}, \quad (2).$$

Din (1) și (2) obținem $AC^2 + BD^2 = (AD + BC)^2$ și ținînd seama de relația de la a) rezultă

$$BC^2 + AD^2 + 2\,kAB^2 = BC^2 + AD^2 + 2BC \cdot AD \Rightarrow kAB^2 = BC \cdot AD.$$

Pentru ultima relație din enunț ridicăm (1) la pătrat și ținem seama că aria unui patrulater ortodiagonal este semiprodusul diagonalelor și că două numere pozitive a și b verifică inegalitatea $a^2 + b^2 \geq 2ab$.

Soluție bună au dat: *Bănuț Cristian*, cl. a VI-a, Șc. gen. 37 Craiova; *Ciupercă Florina*, cl. a VI-a, Șc. gen. 3 Alexandria.

Clasa a VII-a

Problema E : 9119* (G.M. 4/1987, pag. 151)

Aflați numerele pătrate perfecte de forma $4n^2 - 35$, $n \in \mathbb{N}$.

Elena Mihaela Ghica, elevă, Rm. Vilcea

Soluție. Fie p^2 numărul natural căutat. Avem $4n^2 - 35 = p^2$, $p, n \in \mathbb{N}$, de unde :

$$4n^2 - p^2 = 35 \Leftrightarrow (2n - p)\,(2n + p) = 1 \cdot 5 \cdot 7.$$

Deoarece $2n - p < 2n + p$ putem avea următoarele două cazuri :

$$\begin{cases} 2n - p = 5 \\ 2n + p = 7 \end{cases} \quad \text{sau} \quad \begin{cases} 2n - p = 1 \\ 2n + p = 35, \end{cases}$$

cu soluțiile $n=3$, $p = 1$ sau $n = 9$, $p = 17$. Deci numerele căutate sînt 1 și 289. Într-adevăr avem : $1 = 4 \cdot 3^2 - 35$ și $289 = 4 \cdot 9^2 - 35$.

Soluție bună au dat : *Rădulescu Laura*, cl. a VII-a, Șc. gen. 10 Galați ; *Dumitrescu Marius*, cl. a VII-a, Lic. ind. 7 Rm. Vilcea.

Problema E : 9120* (G.M. 4/1987, pag. 161)

a) *Să se determine polinomul* $P(X)$ *de gradul întîi știind că* $P(-2) = -1$ *și* $P(2) = 3$.

b) *Să se arate că numărul* $P(0) + P(P(0)) + P(P(P(0))) + \ldots\ldots + \underbrace{P(P(\ldots(0)\ldots))}_{1985 \text{ paranteze}}$ *este produsul a patru numere prime.*

Florea Pricăn, profesor, Rm. Vilcea

Scanned with OKEN Scanner

Soluție. a) Fie $P(X) = ax + b$, $a \neq 0$, polinomul căutat. Se formează sistemul:

$$\begin{cases} P(-2) = -2a + b = -1 \\ P(2) = 2a + b = 3, \end{cases}$$

cu soluția $a = 1$; $b = 1$, deci $P(X) = X + 1$.

b) Fie $S = P(0) + P(P(0)) + P(P(P(0))) + \ldots + \underbrace{P(P(\ldots(0)\ldots))}_{1985 \text{ paranteze}}$.

Avem: $P(0) = 1$; $P(P(0)) = P(1) = 2$; $P(P(P(0))) = P(2) = 3$; $\ldots$; $\underbrace{P(P(\ldots(0)\ldots))}_{1985 \text{ paranteze}} = 1985$. Deci $S = 1 + 2 + 3 + \ldots + 1984 + 1985$. Pentru a calcula această sumă scriem:

$$S = 1 + 2 + \ldots + 1984 + 1985$$

$$S = 1985 + 1984 + \ldots + 2 + 1$$

și le adunăm. Obținem:

$$2S = \underbrace{1986 + 1986 + \ldots + 1986 + 1986}_{\text{de } 1985 \text{ ori}}$$

$2S = 1986 \cdot 1985$ de unde $S = 993 \cdot 1985 = 3 \cdot 5 \cdot 331 \cdot 397$.

Soluție bună au dat: *Pădurariu Cristian* cl. a VII-a, Șc. gen. Valea Lupului; *Turca Marcel*, cl. a VII-a, Șc. gen. 1 Anina.

Clasa a VIII-a

Problema E: 9125* (G.M. 4/1987, pag. 152)

În laboratorul de biologie, care are forma unui paralelipiped dreptunghic cu dimensiunile de 8 m, 8 m și 4 m, au scăpat dintr-o cutie 33 fluturi vii, care s-au împrăștiat, zburînd în toată sala, fără a ieși afară.

Să se arate că în orice moment există doi fluturi la o distanță mai mică de 3,50 m unul de altul.

Gh. Efrim, Brezoi

Soluție: Paralelipipedul se poate descompune într-un număr de 32 cuburi cu muchia de 2 m. Deoarece în laborator sînt 33 fluturi rezultă că cel puțin doi fluturi se află într-un același cub de muchie 2 m. Deoarece distanța maximă între două puncte din cub este atinsă cînd cele două puncte sînt capetele unei diagonale a cubului rezultă că distanța dintre cei doi fluturi este mai mică sau egală cu lungimea diagonalei, care este de $2\sqrt{3}$ m.

Deoarece $2\sqrt{3} < 2 \cdot 1{,}75 = 3{,}50$m rezultă că există doi fluturi la o distanță mai mică de 3,50 m unul de altul.

Soluție bună au dat: *Stubner Cristian*, cl. a VIII-a, Șc. gen. 18 Sibiu; *Frențiu Alin*, cl. a VIII-a, Lic. „Emil Racoviță" Cluj-Napoca.

PROBLEME REZOLVATE PENTRU LICEU

Clasa a IX-a

Problema 21071* (G.M. 4/1987 pag. 154)

Numerele reale strict pozitive satisfac relațiile:

$$x^2 + xy + \frac{y^2}{3} = 25; \quad \frac{y^2}{3} + z^2 = 9; \quad z^2 + zx + x^2 = 16.$$

Se cere să se calculeze valoarea expresiei:

$$xy + 2yz + 3zx.$$

(Olimpiadă U.R.S.S., 1986)

Soluție: Fie

$$A = x^2 + xy + \frac{y^2}{3} = 25, \quad B = \frac{y^2}{3} + z^2 = 9 \text{ și } C = z^2 + zx + x^2 = 16.$$

Egalitatea evidentă $A = B + C$ este echivalentă cu

$$xy = 2z^2 + zx \Leftrightarrow xy = z(2z + x), \tag{1}$$

Dar $D = xy + 2yz + 3zx = y(x + 2z) + 3zx = y \cdot \frac{xy}{z} + 3zx$, conform relației (1).

Deci

$$D = \frac{3x}{z}\left(\frac{y^2}{3} + z^2\right) = \frac{27x}{z}, \tag{2}$$

conform relației $\frac{y^2}{3} + z^2 = 9$. Pe de altă parte $D = xy + 2yz + 3zx = 2z^2 + zx + 2yz + 3zx$, conform relației $xy = 2z^2 + zx$, deci $D = 2z(2x + y + z)$ adică

$$2x + y + z = \frac{D}{2z} \overset{(2)}{=} \frac{27x}{2z^2}, \tag{3}$$

Dar $A - B + C = 32$ sau

$$x(2x + y + z) = 32 \Leftrightarrow 32 = x \cdot \frac{D}{2z} \Leftrightarrow 32 \overset{(3)}{=} \frac{27x^2}{2z^2}.$$

Rezultă că $\frac{x}{z} = \frac{8}{3\sqrt{3}}$. Înlocuind în relația (2) obținem:

$$D = 27 \cdot \frac{8}{3\sqrt{3}} \text{ sau } xy + 2yz + 3zx = 24\sqrt{3},$$

ceea ce trebuia calculat.

Soluție bună au dat: *Olariu Alina*, cl. a IX-a, Lic. mat. fiz. Hunedoara; *Șerbănescu Raluca*, cl. a IX-a, Lic. ind. Cîmpina.

Problema 21065* (G.M. 4/1987, pag. 153)

Fie $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ *o funcție cu proprietatea că:*

$$(f \circ f \circ f)(x) = (f \circ f)(x) + x, \ (\forall) x \in \mathbf{R}.$$

1) Să se arate că f este o funcție injectivă.
2) Să se calculeze $f(0)$.
3) Arătați că există cel puțin o astfel de funcție.

Liviu Pîrșan

Soluție. 1) Fie x_1 și x_2 astfel încît $f(x_1) = f(x_2)$. Rezultă că $(f \circ f \circ f)(x_1) = (f \circ f \circ f)(x_2)$ deci conform relației din enunț avem că $(f \circ f)(x_1) + x_1 = (f \circ f)(x_2) + x_2$. Dar $(f \circ f)(x_1) = (f \circ f)(x_2)$ deci $x_1 = x_2$. Astfel am verificat că funcția f este injectivă.

2) Înlocuind $x = 0$ în relația din enunț rezultă că $(f \circ f \circ f)(0) = (f \circ f)(0)$. Dar f este injectivă deci $(f \circ f)(0) = f(0)$, deci $f(0) = 0$, ceea ce trebuia calculat.

3) Considerăm funcția $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = \alpha x$. Relația din enunț devine $\alpha^3 x = \alpha^2 x + x$, $(\forall) x \in \mathbf{R}$ sau $(\alpha^3 - \alpha^2 - 1)x = 0$, $(\forall) x \in \mathbf{R}$ deci $\alpha^3 - \alpha^2 - 1 = 0$ deoarece este suficient să alegem un $x \neq 0$. Fie α_0 o rădăcină reală a ecuației $\alpha^3 - \alpha^2 - 1 = 0$. Atunci $f(x) = \alpha_0 x$ este funcția căutată.

Scanned with OKEN Scanner

Soluție bună au dat: *Popescu Ion*, cl. a IX-a, Lic. ind. Cîmpulung Muscel; *Berinde Ștefan*, cl. a IX-a, Lic. „Horia, Cloșca și Crișan" Alba Iulia.

Clasa a X-a

Problema 21102 * (G.M. 5/1987, pag. 197)

Fie a, b, c, d, α numere complexe date cu $|a|=|b|\neq 0$ și $|c|=|d|\neq 0$. Să se arate că ecuația $c(bx+a\alpha)^n - d(ax+b\alpha)^n = 0$, $n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}$, are numai rădăcini reale.

D. Acu, lector univ., Sibiu

Soluție. Ecuația se mai poate scrie sub forma

$$\left(\frac{bx+a\alpha}{ax+b\alpha}\right)^n = \frac{d}{c}.$$

Din $|c|=|d|$ rezultă $\left|\frac{d}{c}\right|=1$ și deci putem scrie $\frac{d}{c}=\cos t + i\sin t$, $t\in[0,2\pi)$. Atunci

$$\frac{bx_k+a\alpha}{ax_k+b\alpha}=u_k,\ (1),\ \text{unde } u_k=\cos\frac{t+2k\pi}{n}+i\sin\frac{t+2k\pi}{n},\ k\in\{0,1,\ldots,n-1\}.$$

Din (1) obținem: $x_k=\dfrac{b\bar{\alpha}u_k-a\alpha}{b-au_k}$, $k\in\{0,1,\ldots,n-1\}$.

Avem $\bar{x}_k=\dfrac{\overline{b\alpha u_k-a\alpha}}{\overline{b-au_k}}=\dfrac{\bar{b}\bar{\alpha}\bar{u}_k-\bar{a}\bar{\alpha}}{\bar{b}-\bar{a}\cdot\bar{u}_k}$. Cu $|a|=|b|=r$, $|u_k|=1$, $|z|^2=z\cdot\bar{z}$ avem:

$$\bar{x}_k=\frac{\frac{r^2}{b}\alpha\frac{1}{u_k}-\frac{r^2}{a}\alpha}{\frac{r^2}{b}-\frac{r^2}{a}\cdot\frac{1}{u_k}}=\frac{\alpha a-b\bar{\alpha}u_k}{au_k-b}=\frac{b\bar{\alpha}u_k-a\alpha}{b-au_k}=x_k,\ k\in\{0,1,\ldots,n-1\}.$$

De aici rezultă că $x_k\in\mathbb{R}$, $k\in\{0,1,\ldots,n-1\}$.

Soluție bună au dat: *Bordaș Călălin*, cl. a X-a, Lic. „Gh. Murgoci" Brăila; *Georgescu Paul*, cl. a X-a, Lic. „N. Bălcescu" Brăila.

Problema 21100 *. (G. M. 5/1987, pag. 197)

Fie m, n, p trei numere naturale consecutive în ordinea $m<n<p$. Să se arate că $mp^n - np^m + 1$ este divizibil cu n^2.

*(O generalizare a problemei 20792 * din G.M. nr. 6/1986).*

Delia Mutiu, elevă, Sibiu

Soluție. Deoarece m, n, p sînt numere naturale consecutive, $n=m+1$ și $p=n+1=m+2$. Atunci $m\cdot p^n - n\cdot p^m + 1 = m(n+1)^n - n(n+1)^m + 1 = m(C_n^0\cdot 1 + C_n^1\cdot n + C_n^2\cdot n^2 + C_n^3\cdot n^3 + \ldots + C_n^{n-2}\cdot n^{n-2} + C_n^{n-1}\cdot n^{n-1} + C_n^n\cdot n^n) - n(C_m^0\cdot 1 + C_m^1\cdot n + C_m^2\cdot n^2 + C_m^3\cdot n^3 + \ldots + C_m^{m-1}\cdot n^{m-1} + C_m^m\cdot n^m) + 1 = m + m\cdot n^2 + m\cdot C_n^2\cdot n^3 + m\cdot C_n^3\cdot n^3 + \ldots + m\cdot C_n^{n-2}\cdot n^{n-2} + m\cdot C_n^{n-1}\cdot n^{n-1} + m\cdot n^n - (n + m\cdot n^2 + C_m^2\cdot n^3 + C_m^3\cdot n^3 + \ldots + C_m^{m-1}\cdot n^m + C_m^m\cdot n^{m+1}) + 1 = m + 1 + m\cdot n^2 + m\cdot C_n^2\cdot n^3 + m\cdot C_n^3\cdot n^3 + \ldots + m\cdot C_n^{n-2}\cdot n^{n-2} + 2m\cdot n^n - n - m\cdot n^2 - C_m^2\cdot n^3 - \ldots - m\cdot n^m - n^{m+1} = m\cdot C_n^2\cdot n^3 + m\cdot C_n^3\cdot n^3 + \ldots + m\cdot C_n^{n-2}\cdot n^{n-2} + 2m\cdot n^n - C_m^2\cdot n^3 - \ldots - m\cdot n^m - n^n = n^2[mC_n^2 + (mC_n^3 - C_m^2)n + \ldots + mC_n^{n-2}\cdot n^{n-4} - m\cdot n^{m-2} + (2m-1)n^{n-2}]$. Rezultă că $m\cdot p^n - n\cdot p^m + 1$ este divizibil cu n^2, oricare ar fi m, n, p trei numere naturale consecutive.

Soluție bună au dat: *Giscă Dan*, cl. a X-a, Lic. agroind. Călugăreni; *Onișor Ovidiu*, cl. a X-a, Lic. ind. Cîmpia Turzii.

Clasa a XI-a

Problema 21080 * (G.M. 4/1987, pag. 155)

Studiați convergența șirului $(x_n)_{n\geq 0}$ definit prin recurență

$$x_{n+1}=x_n(e^{x_n}-1),\quad x_0\in\mathbb{R}.$$

Constantin Drugan, profesor, Rm. Vîlcea

Scanned with OKEN Scanner

Soluție. (Prezentată de *Alexandru Constantinescu* și elev *Gheorghe Augustin*, liceul „Spiru Haret", București).

Dacă considerăm funcția $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = x(e^x - 1)$ atunci se observă că $x_1 = f(x_0)$, $x_2 = f(x_1)$ și în general $x_{n+1} = f(x_n)$, $(\forall)\ n \in N$.

În prealabil vom studia comportarea funcției f și vom schița graficul acestei funcții. Graficul funcției f ne va permite să observăm comportarea șirului $(x_n)_{n\geq 0}$ după diferitele alegeri ale lui x_0, după care vom trece la rezolvarea riguroasă a acestor cazuri.

Deoarece $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = -1$ și $\lim\limits_{x\to-\infty} [f(x) + x] = \lim\limits_{x\to-\infty} xe^x = \lim\limits_{y\to-\infty} \left(-\frac{y}{e^y}\right) = 0$ rezultă că dreapta $y = -x$ este asimptotă oblică pentru graficul lui f la $-\infty$. Deoarece $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$ și $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \infty$ rezultă că f nu are asimptotă la ∞.

Avem $f'(x) = e^x(x + 1) - 1$. Vom studia semnul lui f'.

Avem $\lim\limits_{x\to-\infty} f'(x) = -1$ și $\lim\limits_{x\to\infty} f'(x) = \infty$. În plus $f''(x) = 0 \Leftrightarrow e^x(x + 2) = 0 \Leftrightarrow x = -2$.

Avem $f'(-2) = -e^{-2} - 1$. Se observă că $f'(x) = 0$ are $x = 0$ ca soluție. Unicitatea acestei soluții rezultă din tabelul de variație a funcției f'. Avem tabelul:

x	$-\infty$		-2		0		∞
$f''(x)$		$-$	0	$+$		$+$	
$f'(x)$	-1	$\searrow$	$(-e^{-2} - 1)$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	∞

Deci $f'(x) < 0$ pentru $x < 0$ și $f'(x) > 0$ pentru $x > 0$.

Tabelul de variație a funcției f arată astfel:

x	$-\infty$		-2		0		∞
$f'(x)$		$-$		$-$	0	$+$	$+$
$f(x)$	∞	$\searrow$	$f(-2)$	$\searrow$	0	$\nearrow$	∞
$f(x)$		$-$	0	$+$		$+$	

Schița graficului funcției f arată astfel:

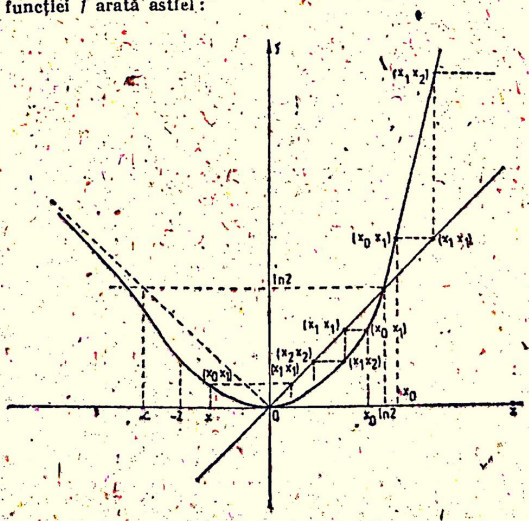


Fig. 1

Scanned with OKEN Scanner

Rezolvînd sistemul $\begin{cases} y = x \\ y = x(e^x - 1), \end{cases}$

obținem punctele de intersecție ale graficului lui f cu prima bisectoare și anume punctele $(0,0)$ și $(\ln 2, \ln 2)$.

În continuare vom studia convergența șirului $(x_n)_{n\geq 0}$ după diferitele valori ale termenului inițial x_0.

În prealabil observăm că ecuația $f(x) = \ln 2$ are în afara soluției $x = \ln 2$ și o soluție negativă notată α.

Cazul 1. Fie $x_0 > \ln 2$. Considerăm șirul punctelor (x_0, x_1), (x_1, x_1), (x_1, x_2), (x_2, x_2), (x_2, x_3),... Se observă, vezi fig. 1, că acest șir de puncte tinde la ∞, deci $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$.

Cazul 2. Fie $x_0 \in (0, \ln 2)$. Se observă că șirul de puncte, consid erat ca mai sus, tinde către punctul $O(0,0)$ deci $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$.

Cazul 3. Fie $x_0 \in (\alpha, 0)$. Atunci se observă, vezi fig. 1, că $x_1 = f(x_0) \in (0, \ln 2)$, deci șirul $(x_n)_{n\geq 0}$ se comportă ca în cazul 2, deci $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$.

Cazul 4. Fie $x_0 \in (-\infty, \alpha)$. Atunci $x_1 > \ln 2$, deci $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$, vezi cazul 1.

Cazul 5. Dacă $x_0 = \ln 2$ sau $x_0 = \alpha$, adică $x_1 = \ln 2$, se observă că șirul (x_n) este constant $x_n = \ln 2$, $(\forall) n \geq 1$, deci $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \ln 2$.

Dacă $x_0 = 0 \Rightarrow x_n = 0$, $(\forall)\ n \geq 1$, deci $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$.

Trecem la justificarea riguroasă a afirmațiilor de mai sus.

Cazul 1. Fie $x_0 > \ln 2$. Rezultă că $e^{x_0} > e^{\ln 2} = 2$, deci $e^{x_0} - 1 > 1 \Rightarrow x_0(e^{x_0} - 1) > \ln 2$, adică $x_1 > \ln 2$. Se verifică ușor prin inducție matematică că $x_n > \ln 2$, $(\forall) n \geq 0$.

Pe de altă parte din relația de recurență rezultă că : $\dfrac{x_{n+1}}{x_n} = e^{x_n} - 1 > 1$, deci șirul $(x_n)_{n\geq 0}$ este strict crescător.

Rezultă că există $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = l$ și $\ln 2 < l \leq \infty$.

Dacă presupunem că $l < \infty$, atunci, trecînd la limită în relația de recurență, obținem că $l = l(e^l - 1)$ sau $e^l = 2$, (deoarece $l \neq 0$), adică $l = \ln 2$, contradicție.

Deci $l = \infty$, adică $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$.

Cazul 4 se reduce la cazul 1, deoarece se observă că dacă $x_0 < \alpha < 0$, atunci $e^{x_0} - 1 < e^{\alpha} - 1 < 0$ deci $x_0(e^{x_0} - 1) > \alpha(e^{\alpha} - 1) = f(x) = \ln 2$, deci $x_1 > \ln 2$.

Cazul 2. Fie $0 < x_0 < \ln 2$. Rezultă că $1 < e^{x_0} < 2 \Rightarrow 0 < e^{x_0} - 1 < 1$.

Deci $0 < x_0(e^{x_0} - 1) < \ln 2$, adică $0 < x_1 < \ln 2$. Se verifică ușor prin inducție că $0 < x_n < \ln 2$, $(\forall) n \geq 0$.

Avem $\dfrac{x_{n+1}}{x_n} = e^{x_n} - 1$. Dar $0 < e^{x_n} - 1 < 1$, deci $x_{n+1} < x_n$, $(\forall) n \geq 0$, adică șirul $(x_n)_{n\geq 0}$ este un șir strict descrescător de numere pozitive. Fie $l = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$. Rezultă că $0 \leq l < \ln 2$.

Din relația de recurență prin trecere la limită, rezultă că $l = 0$, adică $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$.

Cazul 3 se reduce la cazul 2, deoarece din $x_0 \in (\alpha, 0)$ rezultă că $x_1 = x_0(e^{x_0} - 1) \in (0; \ln 2)$.

Clasa a XII-a

Problema 21036 * (G.M. 4/1987, pag. 156)

Fie $(M, *)$ un monoid și e elementul său neutru.

a) *Este posibil să existe $H \subset M$ așa încît $(H, *)$ să fie grup iar elementul neutru al lui H să fie diferit de e?*

b) *Notăm cu U mulțimea elementelor simetrizabile ale monoidului M. Este posibil să existe $H \subset M$, $H \neq U$, $H \neq \emptyset$ astfel încît $(H, *)$ să fie grup?*

c) *Demonstrați că dacă $(H, *)$ este grup, $H \subset M$ și $H \cap U \neq \emptyset$ atunci elementul neutru al lui H este e.*

Liliana Niculescu, profesoară, Craiova

Scanned with OKEN Scanner

Soluție. a) și b). Răspunsul este afirmativ așa cum o dovedește următorul exemplu: Fie $M = \mathcal{U}_6 = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ mulțimea resturilor modulo 6 înzestrată cu operația de înmulțire. Elementul neutru este $e = 1$ iar mulțimea elementelor simetrizabile este $\{1,5\}$. Luăm $H = \{2,4\}$ înzestrată cu înmulțirea modulo 6. Tabla operației este:

$\cdot$	2	4
2	4	2
4	2	4

Avem $H \subset M \setminus U$. Tabla arată că înmulțirea modulo 6 determină pe H o structură de grup în care elementul neutru este 4 ($4 \neq e$).

c) Fie e' elementul neutru din H și $a \in H \cap U$. Fie a' simetricul lui a (în monoid). Avem:

$$e' = e * e' = (a' * a) * e' = a' * (a * e') = a' * a = e.$$

Soluție bună au dat: *Stănică Daniel*, cl. a XII-a, Lic. ind. 3 Cîmpulung Muscel; *Alexe Lucică*, cl. a XII-a, Lic. agroind. Călugăreni.

PROBLEME PENTRU CICLUL PRIMAR

25. Determinați numerele x, y, z, u, v care satisfac simultan egalitățile:

$$x = y : 40;\ z = 4 \cdot u;\ u = 280 : 7;\ 160 = v + 40;\ y = z + v.$$

* * *

26. Reconstituiți adunarea:

$$\begin{array}{r} V\ O\ L\ V\ O \\ +\ F\ I\ A\ T \\ \hline M\ O\ T\ O\ R \end{array}$$

* * *

27. Determinați numerele a, b, c, d din egalitățile:

1) $a \times a = a$; 2) $b + b = b$; 3) $c \times 0 = 0$; 4) $8 \times d = 0$.

* * *

28. Un tractor a lucrat într-o săptămînă 50 ore, iar alt tractor a lucrat 48 ore. Ambele tractoare au consumat 588 l motorină. Cîți litri a consumat pe săptămînă fiecare tractor?

* * *

29. Un automobil a parcurs într-o zi 360 km și în a doua zi $\frac{2}{3}$ din drumul parcurs în prima zi. Pentru fiecare 100 km parcurși automobilul consumă 12 l benzină. Cîți litri de benzină a consumat automobilul în cele două zile?

* * *

30. Într-un bloc de locuințe sînt apartamente cu două, trei și patru camere. Știind că sînt 24 apartamente cu două și patru camere, în total 64 camere, iar numărul apartamentelor cu trei camere reprezintă 3/4 din cel al numărului apartamentelor cu două camere, să se afle:

a) Cîte apartamente sînt cu două camere și cîte cu patru camere?

b) Cîte camere sînt în total în acel bloc?

Ion M. Trică, institutor, Curtea de Argeș

Scanned with OKEN Scanner

31. Suma a trei numere este 1988. Să se afle numerele, știind că, dacă împărțim al doilea număr la primul număr obținem citul 3, iar dacă împărțim pe al treilea la al doilea obținem citul 2 și restul 108.

Emilia Popescu, profesoară, Lupeni, Hunedoara

32. Să se afle numerele necunoscute x și t din egalitățile:

a) $[36 : (24 - x) + 29] : 5 = 7$;

b) $t : [(921 - 639) : 6 - 39] = 9$.

Ion M. Trică, institutor, Curtea de Argeș

PROBLEME PENTRU GIMNAZIU

Clasa a V-a

E : 9395. Media aritmetică a patru numere naturale este 30. Să se afle cele patru numere știind că, media aritmetică a primelor trei numere este 32, media aritmetică a ultimelor trei este 29, iar al treilea număr este egal cu 3/4 din al patrulea.

Ion Trică, institutor, Curtea de Argeș

E : 9396* Să se determine toate numerele de forma $\overline{1988abc}$, scrise în baza zece, care se divid la 125.

Ion Lupșor, profesor, Rapolt, Hunedoara

E : 9397*. Suma a șase numere prime consecutive este un număr prim. Să se determine numerele.

Ady Lucian Ivașcu, elev, Olanu, Vîlcea

E : 9398*. Fie numerele $a \in \mathbf{N}^*$, $b \in \mathbf{N}$. Dacă fracția $\frac{a+b}{4a+11b}$ este echivalentă cu $\frac{1}{5}$, calculați $\frac{b}{a}$.

Gh. Racu, profesor, Dorohoi, Botoșani

E : 9399. Să se găsească toate numerele naturale de două cifre care împărțite simultan la 3, 4 și 5 dau același rest.

M. Gh. Fluture, Cudalbi, Galați

E : 9400. Să se determine ultima cifră a numărului:

$$A = 1987^{1987} + 1987^{1988} + 1987^{1989} + 1987^{1990}.$$

Bogdan Stanoiu, elev, Pucioasa, Dîmbovița

Scanned with OKEN Scanner

Clasa a VI-a

E : 9401. Să se arate că dacă $2x + 1 = 0$, atunci

$\sqrt{8x^2 + 2} + \sqrt{8x^2 + 12x + 5} = 3$;

$\sqrt{8x^2 - 4x + 5} + \sqrt{8x^2 + 16x + 10} = 5$;

$(4x + 3)\sqrt{8x^2 + 2} + 4x\sqrt{8x^2 + 12x + 5} = 0$;

$(4x + 4)\sqrt{8x^2 - 4x + 5} + (4x - 1)\sqrt{8x^2 + 10x + 10} = 0$;

$\sqrt{4x^2 - 4x + 1} + \sqrt{4x^2 + 8x + 4} = 3$;

$\sqrt{4x^2 + 12x + 9} + \sqrt{4x^2 - 8x + 4} = 5$.

C. Ionescu - Țiu

E : 9402. Un număr natural poate fi reprezentat prin următoarele expresii: $E_1 = \overline{aa} \cdot \overline{aa} + \overline{aa}$ și $E_2 = \overline{bb} \cdot c \cdot c$, a, b și c fiind cifre în baza 10 astfel încît $a + 1 = b = c - 1$. Să se afle acest număr.

Valentin Vasile, profesor, Oltenița, Călărași

E : 9403*. Aflați numărul $\overline{abcd}$ știind că $\sqrt{3\sqrt{2\sqrt{\overline{abcd}}}}$ este număr natural.

D. Săvulescu, profesor, Bacău

E : 9404. În triunghiul ABC avem : $\hat{B} < 90°$, $\hat{C} < 90°$. Perpendicularele duse în B pe AB și în C pe AC se întîlnesc în E, iar $AE \cap BC = \{D\}$.

a) Dacă AE este bisectoarea unghiului $\widehat{BAC}$, să se arate că triunghiul ABC este isoscel;

b) Dacă, în plus, $AB = 2 \cdot DC$, să se arate că $AD = 3 \cdot DE$.

Gh. Gându, profesor, Bacău

E : 9405*. În triunghiul ABC dreptunghic în B fie AD bisectoarea unghiului $\hat{A}$ ($D \in BC$). Perpendiculara DM dusă în D pe ipotenuză, ($M \in AC$), taie prelungirea catetei AB în E.

Să se arate că triunghiul DEC este isoscel.

Ion Lupșor, profesor, Borșa, Maramureș

E : 9406*. Pe laturile Ox și Oy ale unghiului nealungit $\widehat{xOy}$ se iau punctele A, $B \in (Ox$, $A \in (OB)$, C, $D \in (Oy$, $C \in (OD)$ astfel încît $2 \cdot OA + AB = 2 \cdot OC + CD$. Să se arate că mediatoarele segmentelor AB și CD se intersectează într-un punct de pe bisectoarea unghiului $\widehat{xOy}$.

Formulați și demonstrați reciproca acestei propoziții.

* * *

Scanned with OKEN Scanner

Clasa a VII-a

E : 9407. Fie AA', BB' și CC' lungimile medianelor triunghiului ABC, R raza cercului circumscris și p semiperimetrul triunghiului. Să se arate că :

$$AA' + BB' + CC' < \frac{16\,p\,R^3}{AB \cdot AC \cdot BC}.$$

Emilia Tiflea, profesoară, Bacău

E : 9408. Fie O centrul cercului circumscris unui patrulater inscriptibil $ABCD$ și M, N, P, Q simetricele punctului O față de laturile AB, BC, CD și AD. Arătați că $S_{MNPQ} = 2S_{ABCD}$.

C. Gîdea, profesor, Buzău

E : 9409*. Fie D și E picioarele perpendicularelor duse din A și respectiv D pe laturile BC și respectiv AC ale triunghiului isoscel ABC ($AB \equiv AC$), iar F mijlocul lui DE. Să se arate că $\widehat{AFD} \equiv \widehat{BEC}$.

Geta Stănică și *Iulian Stănică*, profesori, Marotinu de Sus, Dolj

E : 9410. Diferența dintre suma pătratelor a șase numere naturale impare consecutive și suma pătratelor a șase numere naturale pare consecutive este 1986. Să se afle numerele.

Cîmpean Dorina, profesoară Alba-Iulia

E : 9411*. Fie triunghiul ABC, cu $\hat{A} = 60°$ și $\hat{C} = 70°$. Bisectoarea unghiului $\hat{A}$ întîlnește bisectoarea exterioară a unghiului $\hat{C}$ în E. Dacă $D \in EC$ astfel încît $(BE) \equiv (ED)$ să se demonstreze că patrulaterul $ABDC$ este inscriptibil.

Nora Mihățan, profesoară, Ocna - Mureș

E : 9412*. Într-un triunghi ascuțitunghic în care $\hat{A} > \hat{C} > \hat{B}$, pe latura BC luăm punctul D astfel încît $m(\widehat{BDA}) = 2m(\widehat{ACB})$ și ducem bisectoarele DP și DQ ale unghiurilor $\widehat{BDA}$ respectiv $\widehat{ADC}$, cu $P \in |AB|$, $Q \in |AC|$. Atunci :

a) $AQ \equiv QC$;

b) $BP^2 \cdot AC^2 - QC^2 \cdot AB^2 = PQ^2 \cdot AB^2 - AB^2 \cdot DC^2$.

Bogdan Suceavă, elev, București

Clasa a VIII-a

E : 9413*. Oricare ar fi numerele consecutive $x, y, z \in \mathbf{N}^*$ astfel încît $x < y < z$, numărul $A = (x^n + 1)(y^n - 1)(z^n + 1)$ se divide cu $xy(z + 1)$, pentru orice n natural impar.

(În legătură cu problema 7205* din G.M. 4/1981).

Daniel Cojocaru, profesor, Slatina

Scanned with OKEN Scanner

E: 9414. Fie un cub $[ABCDA'B'C'D']$ și M mijlocul muchiei AA', $AA' = a$. Să se afle distanța de la punctul B la planul $(MC'D')$.

Dacă T este proiecția punctului B pe planul $(MC'D')$ să se afle aria secțiunii determinată în cub de planul (DTC').

Gh. Neagu, profesor, Bacău

E: 9415. Fie numerele reale $x \geq \frac{1}{2}$, $y \geq \frac{2}{3}$, $z \geq \frac{3}{4}$ astfel încît $2x + 3y + 4z = -22 + 18\sqrt{2}$. Să se arate că:

$$\sqrt{2x-1} + 2\sqrt{3y-2} + 3\sqrt{4z-3} \leq 9.$$

Petre Năchilă, profesor, Ploiești

E: 9416*. Să se rezolve în $\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$ ecuația:

$$\frac{4}{x} + \frac{5}{y} = \frac{1}{2}.$$

Liviu Pîrșan

E: 9417. Fie un triunghi isoscel ABC în care $(AB) = (AC)$, D piciorul înălțimii din A pe latura BC, $DE \perp AC$ $(E \in AC)$. În punctul A ridicăm o perpendiculară pe planul (ABC) și luăm pe ea un punct M. Arătați că proiecția lui M pe BE, mijlocul lui DE și punctul A sînt coliniare.

Mihaela Berindeanu, profesoară, București

E: 9418*. Să se demonstreze că într-o prismă triunghiulară regulată centrele de greutate ale bazelor și punctele de intersecție ale diagonalelor fețelor laterale se găsesc pe aceeași sferă dacă și numai dacă raportul dintre latura bazei prismei și înălțimea acesteia este egal cu $\sqrt{3}$.

Maria Vizuroiu și *Nicolae Vizuroiu*, profesori, Pitești

PROBLEME PRELIMINARE DE TIP O.I.M.

PENTRU ELEVII DIN GIMNAZIU

O.G. 69. Fie $A = \overline{abcd}$ un număr de patru cifre care este pătrat perfect și fie $p = \overline{ef}$ un număr prim impar de cel mult două cifre (eventual $e = 0$). Fie $\overline{xy} = \overline{ab} + \overline{ef}$ și $zt = \overline{cd} + \overline{ef}$. Să se determine numerele A și p astfel încît $\overline{xyzt}$ să fie pătrat perfect.

P. Radovici-Mărculescu, București

O.G. 70. Fie $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ un hexagon inscriptibil și P un punct oarecare al cercului circumscris lui. Notăm cu P_{ij} proiecția punctului P pe dreapta A_iA_j, $i \neq j$. Să se arate că are loc relația:

$$PP_{12} \cdot PP_{34} \cdot PP_{56} = PP_{23} \cdot PP_{45} \cdot PP_{16} = PP_{14} \cdot PP_{25} \cdot PP_{36}.$$

Mihai Miculița, profesor, Oradea

Scanned with OKEN Scanner

PROBLEME PENTRU LICEU

Clasa a IX-a

21401*. Într-un triunghi oarecare ABC notăm cu G punctul de intersecție al medianelor și fie K punctul de intersecție al simedianelor. Dreptele AG și AK intersectează a doua oară cercul circumscris triunghiului ABC în punctele M, respectiv N. Se consideră intersecțiile: $\{P\} = BC \cap GN$, $\{R\} = BC \cap KM$ și $\{S\} = GR \cap KP$. Să se arate că patrulaterul $AGSK$ este un paralelogram.

Nicolae Oprea, profesor, Livada, Satu-Mare

21402*. În triunghiul ascuțitunghic în care $\hat{A} = 60°$ și $BH = OI$ să se determine unghiurile $\hat{B}$ și $\hat{C}$, unde notațiile sînt cele obișnuite.

Marcel Chiriță, profesor, București

21403. Fie ABC un triunghi oarecare și M un punct interior lui. Dacă $m(\widehat{MBC}) = m(\widehat{MCA}) = m(\widehat{MAB}) = \alpha$ atunci demonstrați că $\alpha \leqslant 30°$.
(În legătură cu inegalitatea lui *Erdös*).

Călin Udrea, elev, Pitești

21404. În triunghiul ABC mediana AA', $A' \in (BC)$ și bisectoarea BB', $B' \in (AC)$, se intersectează în punctul M. Dreapta CM intersectează latura (AB) în C'. Să se arate că $\frac{BC}{B'C'} - \frac{B'C'}{AC'} = 1$.

Ioan Ani, profesor, Năsăud

21405*. Fie ABC un triunghi ascuțitunghic. Mediatoarea segmentului (AC) taie dreptele AB și BC în punctele N, respectiv P. Dacă notăm cu $\{L\} = AP \cap CN$, să se arate că $(AL) \equiv (BC)$.

Gheorghe Ciorăscu, profesor, Piatra Neamț

21406. Suma a n numere naturale distincte este $n^2 - 2$, unde n este par. Să se arate că cel puțin două din cele n numere sînt pare.

Vasile Zidaru, profesor, Sfîntu-Gheorghe

21407. Fie ABC un triunghi ascuțitunghic, $\mathcal{C}(O, R)$ cercul circumscris triunghiului, iar M și N două puncte coliniare cu O, $M \in (ON)$, $N \in [ABC]$. Pentru un punct $P \in [ABC]$ se notează cu $f(P)$ aria triunghiului avînd ca vîrfuri proiecțiile lui P pe laturile triunghiului ABC.

a) Să se demonstreze relația:

$$\frac{f(O) - f(M)}{f(O) - f(N)} = \frac{OM^2}{ON^2};$$

b) Utilizînd relația de la a) în cazul $N \in [AB] \cup [BC] \cup [CA]$, să se arate că pentru orice $M \in [ABC]$, avem:

$$f(M) = \left(1 - \frac{OM^2}{R^2}\right) f(O); \quad \frac{OM^2}{R^2} = 1 - 4\left(\frac{xy}{ab} + \frac{yz}{bc} + \frac{zx}{ca}\right),$$

unde x, y, z sînt distanțele punctului M la BC, CA, AB.
(În legătură cu problema 2 din G.M. 9/1986, pag. 342).

V. Cîrtoaje, Ploiești

Scanned with OKEN Scanner

Clasa a X-a

21408. Să se demonstreze că în orice triunghi este adevărată inegalitatea

$$4(b^2 + c^2 + ac)\sin A \sin C \leqslant (a + 2c)^2.$$

Cezar Joița, student și *Bogdan Suceavă*, elev, București

21409. Să se determine rădăcinile și parametrii reali m și n știind că toate rădăcinile polinomului $P(x)$ sînt numere prime unde:

$$P(x) = x^4 - 103x^3 + mx^2 + (n - 2)x + 16790.$$

D. Săvulescu, profesor, Bacău

21410*. Să se găsească un punct M în planul patrulaterului inscriptibil $ABCD$ astfel încît $\widehat{MAB} \equiv \widehat{MBC} \equiv \widehat{MCD} \equiv \widehat{MDA}$, în ipoteza că $AB \equiv AD$ și $CB \equiv CD$. Dacă A_1, B_1, C_1, D_1 sînt proiecțiile punctului M pe laturile AB, BC, CD și DA să se arate că patrulaterele $ABCD$ și $A_1B_1C_1D_1$ sînt asemenea.

Alexandru Bumbăcea, student, București

21411*. Fiind date numerele complexe a, b, c distincte astfel încît $|a| = |b| = |c|$ și $|b + c - a| = |a|$, să se arate că $b + c = 0$.

Dorinel Anca, profesor, Tîrgoviște

21412*. Să se afle aria maximă a unui pentagon $ABCDE$ înscris într-un cerc de rază 1 dacă $AC \perp BD$.

Mihaela Predescu, profesoară, Pitești

21413. Să se arate că într-un triunghi ascuțitunghic ABC de laturi a, b, c avem relația:

$$\frac{(a^2 + b^2 + c^2)^3}{216 \cdot a^2b^2c^2} > \cos A \cdot \cos B \cdot \cos C.$$

Csinta Csongor, student, București

21414. Fără a folosi tabele arătați că:

$$\operatorname{tg}\frac{\pi}{7} \cdot \operatorname{tg}\frac{2\pi}{7} \cdot \operatorname{tg}\frac{3\pi}{7} = \sqrt{1{,}4}\,\operatorname{tg}\frac{\pi}{5} \cdot \operatorname{tg}\frac{2\pi}{5}.$$

Geta Stănică și *Iulian Stănică*, profesori, Marotinu de Sus, Dolj

Clasa a XI-a

21415*. Fie $A_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $A_n = (a_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ cu $a_{ij} \in \{-1; 1; i; -i\}$, $(\forall)\, i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Atunci șirul $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$, dat de relația $x_n = \dfrac{\det(A_n)}{n!}$, $(\forall)\, n \geqslant 1$ este convergent la zero.

Ionuț Vijiac, elev, Constanța

21416*. Fie $A = \{x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \mid x^2 \in \mathbb{Q}\}$. Să se găsească o formă explicită pentru funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dată de:

$$f(a) = \inf_{x \in A} |x - a|.$$

Vasile Zidaru, profesor, Sfîntu Gheorghe

Scanned with OKEN Scanner

21417. Fie $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un șir de numere reale, strict monoton.

a) Dacă șirul $(a_{n+1}-a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este strict monoton în același sens ca și $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, atunci șirul $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este divergent.

b) Dacă șirul $(a_{n+1}-a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este strict monoton în sens opus șirului $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, atunci nu rezultă neapărat că șirul $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este convergent.

c) Să se studieze convergența șirului $b_n=\ln n!-\ln^2 n$.

Dana Nicolau, elevă, București

21418. Determinați $a\in\mathbb{R}$ astfel încît șirul $(a_n)_{n\geq 1}$, unde

$$a_n=\sqrt[n+3]{(n+3)!}+\sqrt[n+2]{(n+2)!}+\sqrt[n+1]{(n+1)!}+a\sqrt[n]{n!}$$

să fie convergent și calculați $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

P. Rotaru, profesor, Comănești, Bacău

21419*. Să se calculeze limita:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left[\left(a+\frac{1}{a^n}\right)^n-a^n\right],\ \text{dacă } a\in\mathbb{R},\ a>1.$$

Florin Nichita, elev, Ploiești

21420. Dacă $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este un șir de numere reale strict pozitive care este strict crescător și nemărginit, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ este un șir convergent de numere reale și dacă $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{a_n}=d\in\mathbb{R}_+^*$,

$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)^n=c\in\mathbb{R}_+^*$ să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}^{b_n}-a_n^{b_n}}{a_n^{b_n-1}}$.

D. M. Bătinețu-Giurgiu, profesor, București

21421. Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ o funcție pentru care $(\exists)\ M>0$ astfel încît $|f(x+y)+f(x-y)-2f(x)|<M$, $(\forall)\ x,y\in\mathbb{R}$, unde M este un număr fixat strict pozitiv. Atunci există o singură funcție $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ continuă, care este un polinom de gradul I și pentru care $|f(x)-g(x)|<M$, $(\forall)\ x,y\in\mathbb{R}$.

Marcel Chiriță, profesor, București

Clasa a XII-a

21422. Se dau funcțiile continue $f,g,h:[0,1]\to\mathbb{R}$. Dacă

$$\int_0^1 f(x)\,dx=\frac{1}{4},\quad \int_0^1 g(x)\,dx=\frac{1}{6},\quad \int_0^1 h(x)\,dx=\frac{1}{12},$$

arătați că $(\exists)\ x_0\in[0,1]$ astfel încît $f(x_0)+g(x_0)=x_0-h(x_0)$.

Alexandru Toporan, profesor, Orșova

21423. Să se calculeze integralele:

$$\int_{\pi/3}^{\pi/2}\sin x\cdot\cos^{2n}\frac{x}{2}\,dx\ \text{și}\ \int_{\pi/3}^{\pi/2}\sin^{2n}\frac{x}{2}\cdot\sin x\,dx,$$

unde $n\in\mathbb{N}^*$.

Radu Ghenghiu, profesor, Oradea

Scanned with OKEN Scanner

21424*. Fie funcția $f:(0,\infty)\to\mathbf{R}$ și $a\in\mathbf{R}^*$. Să se arate că f admite primitive dacă și numai dacă funcțiile $g, h:(0,\infty)\to\mathbf{R}$, definite prin

$$g(x)=(ax+x^3)\,f(x^4) \text{ și } h(x)=(-ax^2+x^5)\,f(x^6),$$

admit primitive.

Dan Mihalca, profesor, București

21425. Să se determine funcțiile derivabile $f, g, h:\mathbf{R}\setminus\{0\}\to\mathbf{R}$, astfel încît:

$$xf'(x)=g(x)+h(x);\quad xg'(x)=h(x)+f(x);$$

$$xh'(x)=f(x)+g(x).$$

Gh. Stoica, București

21426*. Fie $f\in\mathbf{R}[X]$. Să se arate că dacă există $A, B\in M_n(\mathbf{R})$ așa încît $\det f(A)\cdot\det f(B)<0$ atunci există $x\in\mathbf{R}$ cu proprietatea că $f(x)=0$. Reciproca este adevărată?

D. M. Bătinețu-Giurgiu, profesor, București

21427. Se consideră polinomul $p\in\mathbf{R}[X]$ dat de $p(x)=(3x^2-5)(3x^2-10)$. Dacă $P_1, P_2, P_3, P_4\in\mathbf{R}[X]$ astfel încît:

$$P_1(p(x))+xP_2(p(x))+x^2P_3(p(x))=(x^2-1)(x^2-4)\,P_4(x),\ (\forall)\ x\in\mathbf{R},$$

să se arate că ecuațiile $P_1(x)=0$, $P_2(x)=0$, $P_3(x)=0$ admit o rădăcină comună. Să se afle rădăcina comună.

Florin Rotaru, Focșani

21428*. Fie $f:(a,b]\to\mathbf{R}$ și $c\in(a,b)$ astfel încît f este integrabilă pe intervalul $[a,b]$ și f este continuă în punctul c. Să se arate că $(\forall)\ \varepsilon>0$, există o funcție $\varphi:[0,1]\to[a,b]$ continuă și bijectivă astfel încît $f\circ\varphi$ este integrabilă și

$$\left|\int_0^1 (f\circ\varphi)(t)\,dt-f(c)\right|<\varepsilon.$$

Ioan Comșa, profesor, Sibiu

PROBLEME PREGĂTITOARE PENTRU O.I.M. ȘI O.B.M.

O : 545. Fie $\{E, F\}$ o partiție a planului. Să se arate că:

a) pentru orice $s\in(0,\infty)$, există o suprafață poligonală convexă, de arie s, ale cărei vîrfuri aparțin toate lui E, sau aparțin toate lui F;

b) pentru orice $p\in(0,\infty)$, există un poligon convex, cu perimetrul p, ale cărui vîrfuri aparțin toate lui E, sau aparțin toate lui F.

Florin Vulpescu-Jalea, profesor, București

O : 546. Dacă $x_1, x_2, \ldots, x_n\in[-1,1]$ și $x_1+x_2+\ldots+x_n=0$ atunci $\left|\sum_{k=1}^{n} k\,x_k\right|\leqslant\left[\frac{n^2}{4}\right]$.

Petrică Ciungu, profesor, Tîrgu-Jiu

O : 547. Dacă șirul $(a_n)_{n\geqslant 0}$ are proprietatea că $a_0=a_1=1$ și $a_{n+2}=\frac{5-a_{n+1}^2}{a_n}$, $(\forall)\ n\in\mathbf{N}$, atunci $a_n\in\mathbf{Z}$, $(\forall)\ n\in\mathbf{N}$. Să se determine termenul general a_n, $n\in\mathbf{N}$.

Laurențiu Panaitopol

PROBLEME PENTRU CONCURSUL ANUAL AL REZOLVITORILOR

Clasele a IX-a și a X-a

C : 777. Considerăm un triunghi oarecare ABC de arie S. Fie punctele arbitrare $A_1 \in (BC)$, $C_1 \in (AB)$ și O intersecția dreptelor AA_1 și CC_1. Dacă $\sigma[AOC_1] = S_1$, $\sigma[A_1C_1B] = S_2$, $\sigma[A_1OC] = S_3$, $\sigma[A_1OC_1] = x$, $\sigma[ACO] = y$ demonstrați că:

$$x = \sqrt{\frac{S_1S_2S_3}{S}}; \quad y = \sqrt{\frac{S_1S_3S}{S_2}}.$$

D. P. Mavlo, Moscova, U.R.S.S.

C : 773. Să se demonstreze că în orice triunghi avem inegalitatea

$$h_a + h_b + h_c \geq \frac{2pR + pr - 2R^2}{R},$$

egalitatea avînd loc dacă și numai dacă triunghiul este dreptunghic.

N. Bișboacă, profesor, Alba Iulia

C : 779. a) Să se rezolve în $\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$ ecuațiile:
i) $179x - 49y + 3 = 0$; ii) $25x + 15y - 14 = 0$.
b) Fie d dreapta de ecuație $25x + 15y - 14 = 0$. Să se determine locul geometric al punctelor $M(u, v)$, cu $u, v \in \mathbf{Z}$, care au proprietatea că distanța lor la dreapta d este minimă.

Costel Chiteș, profesor, Bacău

C : 780. Numerele complexe $x_1, x_2, \ldots, x_n$ satisfac egalitățile

$$x_1^k + x_2^k + \ldots + x_n^k = n\,\delta_{nk},\ k = 1, 2, \ldots, n$$

unde

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ dacă } i = j \\ 0 \text{ dacă } i \neq j \end{cases}$$ (δ_{ij} se numește simbolul lui *Kronecker*).

Să se demonstreze că $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sînt rădăcinile de ordinul n ale unității.

Marcel Țena

Clasele a XI-a și a XII-a

C : 781. Fie $n \in \mathbf{N}^* \setminus \{1\}$. Se știe că dacă $X, Y \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ și $XY = YX$ atunci $\det(X^2 + Y^2) \geq 0$.
a) Este adevărat că dacă $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ și $\det(A^2 + B^2) \geq 0$ atunci $AB = BA$?
b) Dați exemplu de matrice $C, D \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ cu proprietatea că $\det(C^2 + D^2) < 0$.

D. M. Bătinețu - Giurgiu, profesor, București

Scanned with OKEN Scanner

C : 782. Fie $k \in \mathbf{N}^* \setminus \{1\}$ și șirul $(a_n)_{n \geq 1}$ având termenul general $a_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt[k]{n^k + i}}$. Să se arate că $\lim_{n \to \infty} n^{k-1}(1 - a_n) = \frac{1}{2k}$.

Laurențiu Panaitopol

C : 783. Fie $(A, +, \cdot)$ un inel cu $0 \neq 1$ având proprietatea că $(\forall)\ a \in A,\ a \neq 1,\ (\exists)\ b \in A$ așa încît $ab = a + b$. Să se demonstreze că A este corp.

Daniel Grigorcscu, profesor, București

C : 784. Fie $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ și $g : [a, b] \to \mathbf{R}_+^*$ două funcții care admit primitive. Să se demonstreze că dacă $G : [a, b] \to \mathbf{R}$ este o primitivă a lui g, atunci există o primitivă $H : [a, b] \to \mathbf{R}$ a lui G așa încît funcția $f \circ H : [a, b] \to \mathbf{R}$ admite primitive.

Ioan Comșa, profesor, Sibiu

PROBLEME REZOLVATE DE INFORMATICĂ

Problema I : 324 (G.M. 7/1987, pag. 300)

Considerăm funcțiile $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = \begin{cases} 2x - 3 & \text{dacă } x \leq 0 \\ 7x & \text{dacă } x > 0 \end{cases}$

și $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $g(x) = \begin{cases} x^2, & \text{dacă } x \leq -2 \\ 2x - 1, & \text{dacă } x > -2. \end{cases}$

(Algebră cl. a IX-a, pag. 42, ex. 16).

Dacă $V = (x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)$ *este un vector de numere reale date, transmise dintr-un program principal, să se scrie o subrutină care să întoarcă programului principal vectorii* Y *și* Z, *unde* $Y(i) = (f \circ g)(x_i)$ *și* $Z(i) = (g \circ f)(x_i)$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

Soluție dată de *Radu Luchianov*, elev, cl. a X-a, Lic. ind. „S. Haret" București.

```
 90 DIM X,(N)
100 SUB FOGOF(N):FOR I = 1 TO N
110 IF NOT X(I) < = - 2 THEN GOTO 140
120 Y(I) = 2* X↑2-3
130 Z(I) = (2* X -3)↑2
140 IF NOT X(I) -2 AND X(I) < = 0 THEN GOTO 170
150 Y(I) = 2* (2* X-1)-3
160 Z(I) = 2* (2* X -3)
170 IF NOT X(I) > 0 THEN GOTO 200
180 Y(I) = 7* (2* X-1)
190 Z(I) = 14X-1
200 NEXT I
210 SUBEND
```

PROBLEME DE INFORMATICĂ

I : 331. Să se arate că ecuația $\ln x + \sin x - 0{,}5x = 0$ are exact două rădăcini reale în intervalul $(0, \pi)$. Să se scrie programul BASIC pentru calculul rădăcinilor cu o aproximație mai mică decît 10^{-5}.

Silviu Stossel, profesor, București

Scanned with OKEN Scanner

I : 332. Să se scrie programul BASIC pentru a determina termenul mai mic și termenul cel mai mare din dezvoltarea $(A + B)^n$, $A, B \in \mathbf{Q}$, $n \in \mathbf{N}$.

Aplicație : a) $(1+0{,}1)^{100}$; b) $(0{,}5-4{,}6)^{50}$.

Silviu Stossel, profesor, București

RUBRICA REZOLVITORILOR DE PROBLEME

AIUD (ALBA) Lic. ind. „Avram Iancu" cl. XI Pădurean Mircea (31). **ALBA IULIA** (ALBA) Ș. g. 7 cl. VI Serbu Marilena (60), Ș. g. 8 cl. IV Rus Cristian Flaviu (150), cl. VII Coman Carmen (88). **ALEXANDRIA** (TELEORMAN) Ș. g. 3 cl. V Vladu Claudia (70), cl. VI Păunică Robert (73). **ARAD** (ARAD) Ș. g. 1. cl. VIII Dan Monica (101); Ș. g. 4 cl. VII Cheța Alina (80); Ș. g. 13 cl. VI Dosoftei Carmen (40); Lic. „Ioan Slavici" cl. VII Neamțu Alin (30); Lic. ind. 4 cl. X Sandru Călin (110); Lic. ind. 13 cl. VI Bendek Tiberiu (69). **AZUGA** (PRAHOVA) Ș. g. cu cl. I—X cl. V Comărniceanu Iulia (51), Neagoe Răzvan (33), Scharwert Adriana (39), cl. VII Bădilă Cornelia (95), Diaconu Marilena (85), Dumitrescu Cristina (92), Glesnea Monica (98), Sasu Florin (76), Ureche Ioana (61).

BACĂU (BACĂU) Ș. g. 4 cl. V Butcaru Ana (68); Ș. g. 15 cl. VI Asaftei Laura (172); Ș.g. 18 cl. V Bernevig Aniela (90), Cristea Ionuț (40), Dospinescu Adelina (90), Lezeriuc Anca (75), Macoviciuc Oana (105), Niță Cătălina (153), Potoroagă Eglapie (117), Radu Cristina (77), Radu Silvia (87), Sebe Teona (81), cl. VI Dobâca Corina (53), Gădioi Ionel (65), Lazăr Haruna (155), Lezeriuc Vasile Adrian (126), Manase Oana Claudia (122), Munteanu Radu (76), cl. VII Bârzan Cătălina (90), Ungureanu Vasilica (65), cl. VIII Munteanu Roxana (35); Ș.g. 19 cl. V Isăcescu Raluca Anca (50), Moldovan Marius (80); Ș.g. 27 cl. V Balaban Elena (51); Ș.g. 28 Brebu Mădălina (104). **BAIA MARE** (MARAMUREȘ) Ș.g. 17 cl. V Bone Adrian (57), Chira Anca (59), Cristea Claudia (39), Cuha Daniela (70), Pop Lucian (50), Pop Sorina (70), Vanci Călin (58), Weisz Adrian (54), cl. VI Cimpean Elisabeta (125); Ș.g. 20 cl. V Tiplea Camelia (78). **BĂILEȘTI** (DOLJ) Ș.g. 5 cl. V Drăghia Carmen (65). **BICAZ** (NEAMȚ) Ș.g. 1 cl. V Ciorbea Florentina (71). **BISTRIȚA** (BISTRIȚA-NĂSĂUD) Ș.g. 3 cl. VII Anghel Ciprian Adrian (107); Lic. „Liviu Rebreanu" cl. VI Tise Dinu Marian (67). **BÎRLAD** (VASLUI) Ș. g. 3 cl. IV Tocan Franco (38), cl. VIII Fecioru Diana Ionela (120); Ș.g. 11 cl. VI Iordan Mădălina Gabriela (167). **BOTENI** (ARGEȘ) Ș.g. cl. VI Constantinescu Bogdan (130). **BOTOȘANI** (BOTOȘANI) Ș.g. 4 cl. VII Corduneanu Mariana (120); Ș.g. 7 cl. V Cărăușu Eugen (56), Cojocaru Anamaria (68), Georgescu Oana (66), Huzicoschi Mihai (65), Isăilă Bogdan (79), cl. VI Canciuc Roxana (99), Palaneanu Carmen (49), cl. VII Teodorov Livia (177); Ș.g. 12 cl. V Larco Ciprian (78); Ș.g. 13 cl. V Hoancă Ioan (75), cl. VII Aniței Ioan (80), Avasilicăi Lăcrămioara (133), Gherghel Mihăiță Cristian (119), Lăzurcă Vasilica (39), Mintici Isabela (109), Munteanu Irina (77), Paraschiv Dorel (70). **BRAȘOV** (BRAȘOV) Ș.g 5 cl. II Radu Stoenescu (77), cl. VI Leonida Gabriela (59), Păcurar Paula (69); Ș.g. 6 cl. V Croitoru Septimiu-Liviu (27), Popovici Simona (53); Ș.g. 15 cl. VI Voicu Nicoleta (87); Ș.g. 27 cl. VI Bolat Camelia Simona (62), Chițea Ruxandra (89), Cîrlan Andra-Sorina (65), Culai Ana-Maria (61), Deak Eva (41), Marin Violeta (125), Neagu Elena Oana (151), Ștefan Petru Iulian (123), Ștefan Veronica (93), Toma Amalia (20); Ș.g. 30 cl. VI Aldea Ciprian (45); Ș.g. 31 cl. VII Neagu Valentina (29); Lic. pedagogic cl. V Marian Andreea (64), cl. VI Toporaș Carmen (80), Țigănuș Diana (53). **BRĂILA** (BRĂILA) Ș.g. 7 cl. III Stănciulescu Dragoș (65), cl. VI Bunea Gabriel Stelian (65), Bejan Violeta (80); Ș.g. 23 cl. V Dermengiu Daniela (62), cl. VII Goga Camelia (103); Lic. ind. 4 „Gh. Munteanu Murgoci" cl. IX Teodorescu Mădălina (178). **BREAZA** (PRAHOVA) Ș.g. centru cl. V Antohi Alin (80), Bogdan Amalia Georgiana (80). **BUCUREȘTI** Ș.g. 3 cl. VI Ganea Tudor (108), cl. VII Grădinaru Ionuț (250), Manolescu Ioana (60); Ș.g. 5 cl. VII Facsinay Andreea (100); Ș.g. 11 cl. III Albu Andrei Tudor (160); Ș.g. 17 cl. VII Racu Ana Maria (117); Ș.g. 45 cl. VII Munteanu Dragoș (300); Ș.g. 49 cl. VI Candiani Ruxandra (58), cl. VIII Patron Maria Cristina (147); Ș.g. 57 cl. IV Răpeău George Bogdan (75); Ș.g. 59 cl. VI Ganea Liana (51); Ș.g. 70 cl. VI Tudorică Adrian (80); Ș.g. 109 cl. VII Nistor Loredana (90); Ș.g 118 cl. VIII Toma Irina (200); Ș.g. 121 c. VI Tințâ Monica (130); Ș.g. 150 cl. V Dragomir Cătălina (125), Moldovan Oana (67), Ș.g. 121 cl. VI Dumitrescu Andreea (102), Isaila Mariana (85), Parnia Andreea (90), cl. VII Munteanu Anca (154); Ș.g. 164 cl. VI Păun Andrei (200); Ș.g. 172 cl. V Dumitru Bogdan Dinu (75), Pungă Andreea (61), cl. VI Andrei Cosmin (100), cl. VII Gheorghiu Adina (95), Saudi Ciprian (85); Ș.g. 174 cl. VII Dumitrescu Roxana (80); Ș.g. 201 cl. III Apostol Oana (100), cl. VI Deaconu Mihaela (172), cl. VIII Dumitrescu Sorin (75); Ș.g. 206 cl. V Dimulescu Luminița (68); Lic. ind. 35 cl. VI Ion Anne-Marie Denisse (45); Lic. „Spiru Haret" cl. X Botescu Adriana (70); Lic. nr. 1 cl. IX Moroianu Sergiu (200), cl. XI Moroianu Andrei (200). **BUHUȘI** (BACĂU) Ș.g. 4 cl. VI Butdoresecu Mariana (200); Lic. „Zola Kosmodemianskaia" cl. X Potescu Adriana (70); Lic.

Scanned with OKEN Scanner

naru Ana-Camelia (200), **BURILA MARE** (MEHEDINȚI) Ș.g. Crivina cl. V Sinca Dragoș Cătălin (91). **BUZĂU** (BUZĂU) Ș.g. 11 cl. VI Selaru Florin (79); Ș.g. 16 cl. V Ungureanu Cristina (85); Lic. pedagogic „Spiru Haret" cl. III Aurelian Anca (90), Heșchea Adrian (90).

CARACAL (OLT) Ș.g. 6 cl. V Sindile Claudiu (47), Ștefan Emil (45); Ș.g. 7 cl. V Benescu Mariana Aura (61), Căpățînă Gabriela (58), Truică Cioacă Loredana (52); **CĂLĂRAȘI** (CĂLĂRAȘI) Ș.g. 1 cl VII Naum Lenuța (75). **CĂLIMĂNEȘTI** (VÎLCEA) Ș.g. cl. VI Cîncă Anca Liana (141). **CĂSOIU** (CLUJ) Ș.g. cl. VI Liceo Ioan Ovidiu (142). **CĂZĂNEȘTI** (IALOMIȚA) Ș.g 2 cl. VI Neagu Irena (164). **CERNAVODA** (CONSTANȚA) Ș.g. 3 cl. VI Hânsă Ana (78). **CÎMPIA TURZII** (CLUJ) Lic. ind. cl. XI Onișor Ovidiu (93). **CÎMPINA** (PRAHOVA). Ș.g. 4 cl. V Anghel Florian (117), Beldianu Andreț (80), Ciupilă Raluca-Dana (80), Dinc Corina (80), Georgescu Marian (77), Horjea Eliza (58), Mărășescu Dan (72), Radu Ionuț (58), Stănescu Florin (67), Vlaicu Amelia (80), Vlaicu Răzvan (80), cl. VI Barbu Anca (74), Sîrbu Andreea (77), cl. VII Chițu Mihaela (151); Lic. „Nicolae Grigorescu" cl. IX Nicolae Răzvan (86). **CÎMPULUNG MUSCEL** (ARGEȘ) Ș.g. 4 cl. V Tudoran Andreea (80); Ș.g. 5 cl. V Dragomir Gianina (29). **CLUJ-NAPOCA** (CLUJ) Ș.g. 2 cl. V Rodilă Raiana (56); Ș.g. 6 cl. VII Netea Ioan-Anton (83), cl. VIII Netea Maria (67); Ș.g. 17 cl. VII Groza Claudia (93); Lic. de Artă Plastică cl. VII Vlad Toca (51); Lic. ind. „G. Barițiu" cl. XI Frențiu Alin-Milton (59); Lic. „Emil Racoviță" cl. V Boian Rareș (77), cl. VII Frențiu Cosmin (185); Lic. de științe naturale cl. V Zdroba Tonela (120). **CONSTANȚA** (CONSTANȚA) Ș.g. 4 cl. V Marin Gheorghe Cosmin (72); Ș.g. 6 cl. V Bilal Chenan (67); Ș.g. 34 cl. VII Bălan Radu (75); Lic. „Mircea cel Bătrîn" cl. IX Palângă Claudia (84), Lic. ind. 10 cl. IX Stoian Loredana (48). **CORBIȚA** (VRANCEA) Ș.g. Buda cl. VII Ionașcu Lidia (224). **COSTEȘTI** (VÎLCEA) Ș.g. cu cl I–IV cl. IV Predescu Ștefan (78). **COTEANA** (OLT) Ș.g. cl. VI Bold Mariana (73). **CRAIOVA** (DOLJ) Ș.g. 2 cl. V Dumitrescu Diana (60), Gingioveanu Oana-Maria (50), Radovici Ionuț (50), Ștefan Silvia (80); Ș.g. 9 cl. VII Guță Mădălin (136); cl. VIII Cividjian Andrei (68); Ș.g. 11 cl. VIII Geru Dana (90); Ș.g. 21 cl. VI Vladimirescu Cristian (97), cl. VIII Panes Cristian (94); Ș.g. 31 cl. VI Niță Elisabeta (40); Lic. fil.-ist. cl. VI Mitea Monica (53); Lic. mat.-fiz. „N. Bălcescu" cl. IX Savin Diana (81). **CUDALBI** (GALAȚI) Ș.g. 2. cl. V Drugan Alexandrina (61). **CURTEA** (TIMIȘ) Ș.g. cl. VI Avramescu Dorina (80). **CURTEA DE ARGEȘ** (ARGEȘ) Ș.g. 6 cl. V Chiriță Monica (35), Danielescu Călin (80), Gavrilă Cristina (95), Itulescu Corina (56), Stan Cătălin (49), Șerban Cosmin (28), Tinică Mihaela (42).

DARABANI (BOTOȘANI) Ș. g. 1 cl. VI Aionesc Otilia-Alina (88), Arșoaie Mihaela (107), Atodiresei Mihaela (98), Barbacariu Silviu (88), Bivoleanu Diana (95), Ciobotaru Lăcrămioara (77), Cîrneală Ștefan (86), Crețu Marcela-Letiția (75), Dumitru Daniela (89), Gabor Mariana (75), Hrib Cristian (72), Ilaș Adina (104), Iordache Liviu (79), Lupașcu Costel (90), Maxim Otilia (103), Mihai Lucian (100), Onciu Gabriela (83), Plămadă Mihaela (90), Strahotin Mihaela (55). **DAVIDENI** (NEAMȚ) Ș.g. cl. VII Grigore Elena (83). **DEJ** (CLUJ) Ș.g. 3 cl. V Diaconescu Șerban (86), cl. VII Samoilă Gilda (103), cl. VIII Harangus Adriana (134), Topan Liana (142); Ș.g. 1 cl. VI Dragoș Nadia Andreea (98), Pintea Anca (48), Tallian Adriana (63). **DÎRMĂNEȘTI** (ARGEȘ) Ș.g. cl. VI Marin Camelia-Georgeta (57). **DRĂGOEȘTI** (VÎLCEA) Ș.g. cl. VI Buzatu Laura (100). **DROBETA -TURNU SEVERIN** (MEHEDINȚI) Ș.g. 1 cl. V Vișan Mihai (44), Ilie Florin (49), cl. VII Ilie Monica (66); Ș.g. 14 cl. III Pîrlea-Claudiu (104); Lic. „Traian" cl. IX Cnobloch Ștefania (100). **DUDEȘTI** (BRĂILA) Ș.g. cl. V Pîrpiliu Honoriu Bebi (64).

FĂLTICENI (SUCEAVA) Ș.g. 2 cl. V Pavel Cezar (43), Văcaru Constantin Claudiu (63). **FOCȘANI** (VRANCEA) Ș.g. 2 cl. V Harabagiu Oana (61), Istrate Dorina-Geta (90), cl. VI Bacătuș Bogdan Cristian (80).

GALAȚI (GALAȚI) Ș.g. 1 cl. V Negoiță Mirela (52); Ș.g. 6 cl. V Burluc Claudia (49), Michi Bianca Beatrice (66), Sprinceană Mariana (58), cl. VI Radu Cristinel (58), cl. VII Andrei Andreea (98), Drăghici Marius (162), Florescu Petrișor (120), Ivan Florin (124), Spanache Mirela Cosmina (55), Tufă Simona (124), Zotoiu Aida (108); Ș.g. 8 cl. VI Prodan Iulia (89); Ș.g. 10 cl. V Arteni Dana (82), Buhăescu Romulus (47), Lazăr Laurențiu (62), Nichifor Daniel (36), Olaru Florentina (54), Toma Violeta (108), cl. VI Ionescu Sorin (96), Stamate Mihaela (57), Vlăsceanu Georgiana (57); Ș.g. 18 cl. V David Nelu (35), cl. VI Bulancea Gabriel (85), Pavel Daniela (88); Ș.g. 24 cl. VI Emanoil Adina (77), Hristache Marian (71), Ionescu Iuliana (92), Pușcaș Paul (82); Ș.g. 25 cl. V Gaiu Mariana (122), Talmazaru Mariana (111), cl. VI Călina Oana (228), Gheller Adrian (155), Gheller Daniel (164), Iuriea Corina (124), Muscă Manuela (156), Neculа Daniela (164), Palade Ana Maria (184), Scurlcet Gianina (137), Silveanu Elena-Daniela (169), Simion Claudiu (90); Ș.g. 28 cl. VI Bocăneală Marius Iulian (83), Bordeanu Mihai (99), Budur Monica (191), Burghelea Teodor (145), Călugăreanu Doru Mihai (130), Ceapelă Cornel (103), Costeanu Viorel (46), Cristofor Adriana Oliviа (129), Feteçău Roxana (93), Gheorghe Liliana (102), Nechita Nicoleta (98), Niculescu Mona (110), Plesu Gabriela (61), Popoiu Radu Adrian (120), Popoyici Elena (96), Tănase Raluca (116); Ș.g. 33 cl. VI Dediu Costel (84), Dima Paul Aurelian (57), Iordache Bogdan (103), Pricop Viorel (100), Tașu George (77); Ș.g. 42 cl. VI Boroș Nelu (119). **GĂEȘTI** (DÎMBOVIȚA) Lic. ind. 2 cl. XI Brănoveț Florin (124). **GUGEȘTI** (VRANCEA) Ș.g. 1 cl. VII Deneanu Aurel (140).

Scanned with OKEN Scanner

HAȚEG (HUNEDOARA) Ș.g. 2 cl. VII Nădășan Marius (89). **HOREZU** (VÎLCEA) Lic. ind. cl. VI Nicu Valentina (17). **HUNEDOARA** (HUNEDOARA) Ș.g. „Unirea" cl. VII Ștefan Dana (127). **HUȘI** (VASLUI) Ș.g. 3. cl. V Ovac Oana (76), cl. VI Bolea Oana (80), Iancu Rodica (80), Măzilu Cornelia (80), Murgu Cătălina Elena (80).

IAȘI (IAȘI) Ș.g. 10 cl. V Dumitrescu Sebastian (86), cl. VI Chiratcu Gabriel (89), Diaconu Alina Diana (102), Grigoriță Petronela (79), Hadîmleu Marius (77), Herman Laura Georgiana (50), Miron Cristina (82), Tărzioru Mihaela Alina (121); Ș.g. 11 cl. V Arsintescu Dorin (263); Ș.g. 13. cl. VI Andrei Petru (149); Ș.g. 22 cl. II Caba Mihaela (64); Lic. „Emil Racoviță" cl. V Blăndu Amelia (96), Palaghiu Radu (88); Lic. „Garabet Ibrăileanu" cl. VII Crăciunescu Raluca (71); Lic. informatică cl. X Mocanu Cristina-Amalia (92); Lic. „Național" cl. VI Muntianu Cristina Mircea (75), Panaite Everaldo (47), cl. VIII Albrecht Irvin (63), Drăgan Valentin (96); Lic. mat.-fiz. „C. Negruzzi" cl. V Vârlolomei Mihail (82), cl. VI Bortă Bogdan (124), cl. VII Nica Dana (123), Răducanu Răzvan (170), cl. VIII Turnici George (90). **INEU** (ARAD) Ș.g. cl. VIII Todincă Ioan-Cornelin (250). **ISACCEA** (TULCEA) Lic. ind. cl. V Arsenie Marilena (76). **IZBICENI** (OLT) Ș.g. cu cl. I—X cl. IV Giulea Cosmin (217). **ÎNSURĂȚEI** (BRĂILA) Ș.g. 3 cl. VII Alexe Daniela (149).

LUPENI (HUNEDOARA) Ș.g. 2 cl. V Anghel Valentin (120), Bumbi Gerald (129), Cetean Simona Magdalena (125), Chisner Daniela (120), Ciara Radu Daniel (65), Faur Ioan (124), Glovicska Melinda (130), Kelemen Alexandru (130), Mătăsărean Eliza (130), Micu Liana (130), Nebunu Camelia (127), Pavel Adina Iuliana (130), Tudora Mihaela (130).

MĂURENI (CARAȘ-SEVERIN) Ș.g. cl. IV Nap Gabriela (117), cl. VII Stepan Dănuț (107). **MEDGIDIA** (CONSTANȚA) Ș.g. 1 cl. VI Osman Onel (28). **MEHADIA** (CARAȘ-SEVERIN) Ș.g. cu cl. I—X cl. VI Dumbravă Ionuț (80), Lalescu Maria (56). **METEȘ** (ALBA) Ș.g. cl. VI Ampoițan Silvia (87), Opruța Lidia (99). **MORENI** (DÎMBOVIȚA) Ș.g. 3 cl. V Ciobanu Adina (50); Ș.g. 4 cl. VI Răduță Gabriela (129), Stoicescu Ileana (115). **MOTRU** (GORJ) Ș.g. 1 cl. VI Todea Delia (34). **MOVILENI** (GALAȚI) Ș.g. 1 cl. V Spînu Gabriela (133), cl. VI Artimon Mihaela (103).

NEGREȘTI-OAȘ (SATU MARE) Ș.g. 3 cl. VI Feier Constantin Gabriel (63). **NICULIȚEL** (TULCEA) Ș.g. cl. V Uțu Valentina (79).

PAȘCANI (SUCEAVA) Ș.g. 5 cl. VI Timofte Bogdan (78). **PĂLTINOASA** (SUCEAVA), Ș.g. cl. VI Carpiuc Adriana (80), Carpiuc Cristian (80), Chiruț Florin (80), Nuțu Seniorica (80), Petroschi Lăcrămioara (80). **PĂUNEȘTI** (VRANCEA) Ș.g. cl. V Bostan Mihaela (80). **PIATRA NEAMȚ** (NEAMȚ) Ș.g. 3 cl. V Costeniuc Florin (56), Onofru Ioana (23), Popescu Andrei (53): Ș.g. 12 cl. V Solomia Cătălin Claudiu (238); Ș.g. 27 cl. V Onel Simona (40), cl. VI Ichim Simona (27), Leonte Carmen (46), Poiteba Marius (52). **PITEȘTI** (ARGEȘ) Ș.g. 2 cl. VI Ilie Marius (136); Ș.g. 4 cl. V Pravă Remus Bogdan (37); Ș.g. 11 cl. V Catană Florin (120), cl. VI Catană Alina (194); Ș.g. 15 cl. VI Popescu Adrian Liviu (110); Lic. „N. Bălcescu" cl. X Udrea Calin (55). **PLOIEȘTI** (PRAHOVA) Ș.g. 3 cl. IV Demina Liviu (170); Ș.g. 10 cl. VI Cîrtoaje Cristian (93), cl. VIII Băncilă Ariadna (107); Ș.g. 17 cl. V Avramescu Raluca (114); Ș.g. 21 cl. I Iacob-Liviu (57); Ș.g. 28 cl. VI Stanciu Gabriela (17); Lic. pedagogic cl. VI Stăniculică Lavinia (70), cl. VII Anghel Costin (72), Dinu Amalia (60), Dragon Cristian (143), Marcu Andreea (58), Tomescu Robert Ștefan (95). **PLOPENI** (PRAHOVA) Ș.g. cl. V Andrei Florina Luiza (68). **POIANA** (DÎMBOVIȚA) Ș.g. 1 cl. V Gheorghe Irina Arabella (28). **PUCIOASA** (DÎMBOVIȚA) Ș.g. 1 cl. V Voicu Cosmin (66), cl. VII Dinu Cristina (126).

OCNA MUREȘ (ALBA) Ș.g. 1 cl. V Cristea Oana (48). **ORADEA** (BIHOR) Ș.g. 4 cl. V Florea Octavian (105); Ș.g. 11 cl. VII Costea Monica Adriana (79), Lața Ramona (70), Lugojan Laura (80); Ș.g. 14 cl. VI Negru Anca (110), Orboi Lavinia (110), Schițcu Ruxandra (110). **ORĂȘTIE** (HUNEDOARA) Ș.g. 1 cl. VIII Duniu Cătălin (72). **ORȘOVA** (MEHEDINȚI) Ș.g. cu cl. I—VIII cl. V Doncea Adriana (70), cl. VI Balogh Cristina (93), Bunea Mihaela (110), Filipescu Ștefan Ovidiu (66), Galla Violeta (95), Ghinea Daniel (69), Kring Elko Ingrid (95), Nedvet Francisc (88), Paraioc Remi (28), Pîrvu Adrian (121).

REȚEAG (BISTRIȚA-NĂSĂUD) Ș.g. cl. VI Mureșan Gențiana (97), cl. VII Trif Gabriela Ana (96). **RÎMNICU-SĂRAT** (BUZĂU) Ș.g. 1 cl. VII Berindea Aurora (104), Dumitru-Oana (110), Georgescu Florin (112); Ș.g. 5 cl. III Balaban Iuliana (40), Carpen Mihaela (55), Cauc Florentina (52), cl. V Badea Daniel (26), Istudor Dana (32), Manea Cristian (33), Moise Florin (25), Petrovici Valentina (65), Șerban Klauss Dan (32), cl. VI David Ion (93), cl. VII Vrînceanu Tatiana (82); Ș.g. 9 cl. IV Vergu Victor Bogdan (545). **RÎMNICU VÎLCEA** (VÎLCEA) Lic. „N. Bălcescu" cl. V Bănuț Elena Daniela (17), Rambela Adina (57). **ROMAN** (NEAMȚ) Ș.g. 1 cl. V Radu Petronela (60), cl. VI Abăhnencei Gianii (70), Badacă Nadia (73), Bălău Dragoș (92), Cojocaru Viorel (70), Constantin Cătălin (101), Ionescu Corneliu (100), Neacșu Monica (91), cl. VII Barbu Dana Sonia (138). **SATU MARE** (MEHEDINȚI) Ș.g. 20 cl. III David Alina (91), cl. VII Barbu Dana Sonia (138). **SATU MARE** (MEHEDINȚI) Ș.g. 20 cl. III David Ciprian (118); Lic. fil.-ist. cl. VII Hontău Adriana (78); Lic. ind. 8 cl. VI Kurtinecz Milena (110).

Scanned with OKEN Scanner

SĂRMAȘU MARE (MUREȘ) Ș.g. cl. VIII Burianu Sergiu (82). **SCORȚENI** (PRAHOVA) S.g. cl. IV Circiumaru Dana (106), Surcelea Codruț (88). **SEACA** (OLT) Ș.g. cu cl. I—X cl. VII Dendea Florian (73), Dumitrescu Rareș (87), Petrescu Eliza (87). **SIBIU** (SIBIU) Ș.g. 12 cl. VIII Berghea Laurențiu (80); Ș.g. 19 cl. VII Constantinescu Florin (192), Tăranu Bianca (127); Lic. „Gh. Lazăr" cl. IX Dragoie Mihaela (106). **SIGHETU MARMAȚIEI** (MARAMUREȘ) Ș.g. 2 cl. V Dobeș Andreea (54). **SIGHIȘOARA** (MUREȘ) Ș.g. 1 cl. V Palade Nicolae Sorin (149). **SIMERIA** (HUNEDOARA) Ș.g. 2 cl. VI Dimulescu Ovidiu (107). **SINAIA** (PRAHOVA) Ș.g. 2 cl. VII Dordea Mădița (65). **SLATINA** (OLT) Ș.g. 4 cl. V Badea Ion (60), Căruntu Doina (31), Ilie Gabriela (54), cl. VI Tirțopan Marius (102); Ș.g. 5 cl. VI Burea Sabin (97), Ciobanu Cosmin (38), Ilie Lucica (27), Mirea Elena (99), Zamfir Ramona (73); Ș.g. 8 cl. VI Bucura Irina (59), Cătănescu Augustin (55), Cucu Marcela (57), Marinescu Ana-Maria (94), Nicola Roxana (70), Rață Marius (66), Stoian Aurelia (57); Ș.g. 9 cl. V Nicolescu Cristina (60), Stingă Claudia (70); Lic. „Ion Minulescu" cl. VI Ciungu Camelia Irina (136); Lic. de științe ale naturii „Radu Greceanu" cl. IX Giurescu Romulus (222). **SLOBOZIA** (IALOMIȚA) Lic. mat.-fiz. cl. IX Gongea Valentin (94). Vasile Daniel (140). **STOINA** (GORJ) Ș.g. cl. V Ionescu Ilarie Gheorghe (56). **STREMȚ** (ALBA) Ș.g. cl. VII Puia Elena Simona (69). **SUCEAVA** (SUCEAVA) Ș.g. 1 cl. V Grămadă Marius (60); Ș.g. 2 cl. V Baghiu Geanina (90), Beilia Ciprian (94), Mărgineanu Bogdan (101), Pintilie Marius (99); Ș.g. 4 cl. V Mihăilă Iris Mihaela (53). **ȘIMLEUL SILVANIEI** (SĂLAJ) Ș.g. 1 cl. V Chis Marioara (87), Pădurean Loredana (87). **ȘOMCUȚA MARE** (MARAMUREȘ) Ș.g. cu cl. I—VIII cl. V Costin Bogdan (199), Luca Florina (199), Naghi Rodica (205), cl. VI Ardelean Corina-Petrina (67), Dod Vivian (116), Gherman Ligia Gabriela (126), cl. VII Asofiei Adina (73), Cosmuța Cristina (81), Prună Ioan-Dorin (218), Muntean Sanda (95).

TECUCI (GALAȚI) Ș.g. 2 cl. V Popescu Cezarina (62), Voinea Daniela (48), cl. VI Bădulescu Anca (59), Buzatu Mariana (55), Lupu Lonelia (56), Pohrib Florica (62), Stănculescu Lenica (60); Ș.g. 5 cl. V Munteanu Sergiu (62); Ș.g. 10 cl. V Stratone Irinel (49). **TIMIȘOARA** (TIMIȘ) Ș.g. 7 cl. VI Demjan Tunde (75); Ș.g. 28 cl. VIII Nedelcu Nicoleta (49); Lic. mat.-fiz. 1 cl. IX Foral Iosif Cristian (86); Lic. „Nikolaus Lenau" cl. V Decean Flaviu (92), Dragomir Larisa (90); Lic. pedagogic cl. III Aloni Valentin Mihai (73). **TITU** (DÎMBOVIȚA) Ș.g. cl. VI Constantin Cristian (96). **TÎRGOVIȘTE** (DÎMBOVIȚA) Ș.g. 8 cl. V Postelnicu Daniel Florian (78), cl. VI Postelnicu Livia Nicoleta (78); Lic. „Ienăchiță Văcărescu" cl. IX Nicolae Mihai Eugen (102). **TÎRGU JIU** (GORJ) Ș.g. 2 cl. VII Bîendea Mirela (80), Cernăianu Marinela (80), Faitar Felicia (100), Macovei Theodor Valentin (80), Mărgărint Paul (80), Sfiderschi Ramona (90), Virjan Bogdan (100), Virjan Corina (100); Ș.g. 5 cl. VI Bistreanu Ion-Romeo (170), cl. VII Stroie Cătălin (121); Ș.g. 12 cl. IV Cojan Laura (130), Colțescu Camelia (133). **TÎRGU NEAMȚ** (NEAMȚ) Ș.g. 3 cl. VI Humulescu Ana-Laura (101), cl. VII Maftei Cristian (200), Maftei Lucian (167), Murariu Constantin Ciprian (163), Popa Iulia (100). **TOMȘANI** (VÎLCEA) Ș.g. cu cl. I—VIII cl. VI Diaconescu Dănuț (128). **TOPLIȚA** (HARGHITA) Ș.g. 4 cl. VII Kiss Adorjan (75); Lic. ind. 2 cl. IX Butyka Mugurel (63). **TULCEA** (TULCEA Ș.g. 10 cl. VI Ochea Rodinel Corneliu (69), Roibu Adriana (90), cl. VII Boldea Arina (100); Ș.g. 12 cl. VI Constanache Alin (143); Lic. „Spiru Haret" cl. VI Sulugiuc Gelu (80), cl. VIII Largu Mihaela (109). **TURNU MĂGURELE** (CARAȘ-SEVERIN) Ș.g. 5 cl. VI Ichim Ana-Maria (81).

VĂDURI (NEAMȚ) Ș.g. cl. V Albu Daniel (30), Scacir Violeta (26). **VALEA LUPULUI** (IAȘI) Ș.g. cl. V Bălăuță Mihai (30), Clopotăriței Marcela (80), cl. VII Ababei Daniel (122), Axinte Sorin (99), Boandă Elena (86), Cordun Ionel (73), Dumitriu Mihaela (68). **VASLUI** (VASLUI) Ș.g. 1 cl. V Bejenaru Livia Daniela (61). **VĂLENII DE MUNTE** (PRAHOVA) Ș.g. 1 cl. VIII Bulacu Ion Daniel (161); Ș.g. 3 cl. V Florescu Răzvan (61). **VIȘEU DE SUS** (MARAMUREȘ) Ș.g. 7 cl. VIII Masniță Mihaela (157). **VIȘINEȘTI** (DÎMBOVIȚA) Ș.g. cl. III Codreanu Diana Elena (105). **VÎNĂTORI** (NEAMȚ) Ș.g. 1 cl. V Ursachi Geanina (83). **VULCAN** (HUNEDOARA) Ș.g. 4 cl. V Mitucă Izabela (46).

ZALĂU (SĂLAJ) Ș.g. 4 cl. VII Chisvasi Anamaria (113).

BACĂU (BACĂU) Ș.g. 5 cl. VI Tamaș Mihaela (105); Ș.g. 10 cl. VI Jalbă Dan-Constantin (90), Păuleț Oana (50), cl. VII Lăcătușu Petrică (80); Ș.g. 16 cl. V Cota Dragoș (100), Pletosu Cătălin (90); Ș.g. 18 cl. V Potoroacă Eglapie (110), cl. VII Dumitrache Lăcrămioara (100); Ș.g. 19 cl. VI Cristea Irina Mihaela (71), Farcaș Ionuț (90), Petrilă Ovidiu (70), Ungureanu Ana Raluca (78); Ș.g. 27 cl. V Zaharia Violeta (90); Ș.g. 28 cl. III Brebu Mădălina (100). **BAIA MARE** (MARAMUREȘ) Ș.g. 24 cl. VI Vasiliu Cornelia Elisabeta (100); Lic. ind. 8 cl. V Roman Călin (70), Zaharia Ovidiu (80), cl. VII Niculiță Mihai (70). **BĂILE HERCULANE** (CARAȘ-SEVERIN) Ș.g. cl. VIII Darac Diana (108). **BĂILEȘTI** (DOLJ) Ș.g. 5 cl. VI Donea Claudiu (70). **BECLEAN** (BISTRIȚA-NĂSĂUD) Ș.g. cl. VI Măireanu Carmen (130), Pop Florin (130). **BEIUȘ** (BIHOR) Lic. „Samuil Vulcan" cl. V Dan Daniela (80), Sarca Adrian (100), cl VI Bolha Ioan (80), Hoza Alina Maria (130), Mateaș Ana-Maria (110), cl. VIII Mașcaș Angela (92), Voicu Cristian (75). **BISTRIȚA** (BISTRIȚA-NĂSĂUD) Ș.g. 3 cl. VII Anghel Ciprian Adrian (110). **BRAȘOV** (BRAȘOV) Ș.g. 5 cl. V Benga Rareș (58), Răulea Claudia (60); Ș.g. 27 cl. VII Dragomir Mariana (80), cl. VI Saua Alina (80), Dan Cristina (75); Lic. mat.-fiz. cl. IX Lazăr Alina (30);

Scanned with OKEN Scanner

Lic. pedagogie cl. VI Ioan Bianca (80), Voinea Liana (60). **BRĂILA** (BRĂILA) Ş.g. 7 cl. V Boldureanu Adela (89), cl. VI Bondei Alina (130); Ş.g. 18 cl. VI Cauteş Cătălin (190); Ş.g. 22 cl. V Duduţă Daniel (130), Ianeu Sorin Claudiu (130), Ioniţă Aida (109), Mihăilă Silvioara Paula (130), Tănase Adrian (125); Ş.g. 31 cl. V Niţă Laura (110). **BREAZA** (PRAHOVA) Ş.g. 1 cl. V Pavel Mihaela (70). **BOTOŞANI** (BOTOŞANI) Ş.g. 7 cl. V Cojocaru Ana-Maria (50), cl. VI Leontieş Cristina (50), cl. VII Atudosie Cristina Ioana (80); Ş.g. 12 cl. VII Corduneanu Isabela cl. VII Baciu Silvia (130), Istrate Ramona (120). **BOZOVICI** (CARAŞ-SEVERIN) Ş.g. cl. V Bolohoi Marius (100). **BUCUREŞTI** Ş.g. 5 cl. VIII Stanciu Nicolae (170); Ş.g. 19 cl. VI Geleriu Bogdan (100); Ş.g. 24 cl. V Sfilon Mihaela (110); Ş.g. 49 cl. VI Candiani Ruxandra (70); Ş.g. 56 cl. VIII Moţânescu Victor Florin (150); Ş.g. 71 cl. VI Ungureanu Olivia (50); Ş.g. 96 cl. IV Macarie Bogdan (100); Ş.g. 117 cl. VI Anton Radu (75); Ş.g. 118 cl. V Dancău Andreea (40); Ş.g. 139 cl. V Chirolu Călin (38); Ş.g. 155 cl. VI Georgescu Irina (180); Ş.g. 204 cl. V Rusu Dana Gabriela (80); Ş.g. 278 cl. IV Cornea Gabi (90); Lic. „I. L. Caragiale" cl. XI Bogdan Suceavă (228); Lic. „N. Bălcescu" cl. X Iliescu Traian (200); Lic ind. 34 cl. VII Bătătorescu Cosmin (100).

CÎMPULUNG MUSCEL (ARGEŞ) Ş.g. 3 cl. VI Coman Anca Mihaela (230); Ş.g. 5 cl. VII Aloru Alina (120); Ş.g. 7 cl. VI Popa Mihaela (95); Lic. ind. 3 cl. X Stănică Daniel Constantin (30), cl. XI Stănică Daniel (80). **CLUJ-NAPOCA** (CLUJ) Ş.g. 6 cl. VI Crăciun Cora (91), Listeş Ovidiu (80), cl. VIII Netea Maria (90); Ş.g. 21 cl. II Duşa Bogdan (32), cl. IV Duşa Adrian (80), cl. V Olteanu Sorin (110), cl. VIII Prodan Mihai-Gheorghe (80). **CONSTANŢA** (CONSTANŢA) Ş.g. 30 cl. VI Moroianu Cosmin (80), Nenciu Adina (40); Ş.g. 31 cl. IV Fronovici Bogdan (100); Ş.g. 32 cl. V Cosmoiu Sorin (170), Costoru Ionuţ (70), Nuţu Cătălin (70). **CORBU** (HARGHITA) Ş.g. 1 cl. VI Ciucan Lucreţia-Tuţa (100). **COSTEŞTI** (VÎLCEA) Ş.g. cl. V Cochirlă Constantin Cătălin (110). **CRAIOVA** (DOLJ) Ş.g. 19 cl. VI Belega Carmen (120); Ş.g. 21 cl. V Dragomir Silviu (100), Dumitrescu Gabriel (75), Opresçu Andreea (100), Popa Cosmin (100), cl. VI Căpitanu Florin (100), Coandă Simona (110), Florea Andra (125), Lăpădat Janina (118), Lică Lavinia (95), Pană Laura (100), Prica Costinel (100), Răceanu Ruxandra (108), Ţopirdea Marius (110), cl. VII Cucu Liliana (97), Gligore Daniela (110), Tudoran Octavian (119), Vasilescu Oana (109), cl. VIII Dafina Gabriel (98), Florescu Mihai (82); Ş.g. 30 cl. VI Popescu-Ilioniu Adriana (70); Ş.g. 31 cl. IV Milicov Magdalena (83); Ş.g. 32 cl. VI Dogaru Florinel Cristian (90); Lic. ind. 1 cl. IX Pavel Mădălina (107); Lic. „N. Bălcescu" cl. VIII Savin Diana (100); Lic. „Fraţii Buzeşti" cl. VI Ionescu Claudiu (60), Popa Cătălin Florin (100), cl. VII Brînzan Ion (90). **CRÎNG** (BUZĂU) Ş.g.1 cl. VI Ivancea Alina (10). **CUGIR** (ALBA) Ş.g. 2 cl. VII Maşca Maria (78), cl. VIII Maşca Monica (20). **CURTEA DE ARGEŞ** (ARGEŞ) Ş.g. 4 cl. IV Savu Mircea Radu (80), cl. VI Neamţu Elena-Graţiela (180), Radu Iulia (146), Ţiţei Elena (160), cl. VII Ilea Irina (155), Nicolescu Lidia (85).

GALAŢI (GALAŢI) Ş.g. 1 cl. VI Bulancea Gabriel (60), Gudană Tincuţa (107), Hiltanu Mihaela (190), Maravula Nicoleta (80); Ş.g. 2 cl. V Grigorescu Teodora (50), Rusu Geta (100), cl. VI Enache Mihaela (105), Prodan Adrian (106), Simion Dobriţa (109); Ş.g. 3 cl. V Vintilă Diana (100), cl. VI Angheluţă Roxana (100), Silbu Irina (95); Ş.g. 9 cl. V Vlăduţu Oana (100); Ş.g. 10 cl. VI Fanete Olivia (100), Mitroi Mihaela (100), cl. VII Tămăşanu Aelita (100); Ş.g. 11 cl. V Asariotache Nicoleta (108), cl. VI Maftei Anca (130); Ş.g. 17 cl. V Cornea Mariana (30); Ş.g. 18 cl. V Dulă Elena (126); Ş.g. 24 cl. V Buşilă Cristina (60), Jalbă Dan (100), Ungureanu (106), cl. VI Hendoreanu Cristian (150), Hristache Marian (50), Munteanu Dănuţ (50), Puşcaş Paul (66); Ş.g. 25 cl. V Andrei Alina (110), Necula Daniela (70), Trifan Paula (100), cl. VI Gheler Adrian (120), Gheler Daniel (120), Marin Florin (150), Mască Manuela (150), Mihai Mircea (110), Negoiţă Dorin (130), Niculescu Mana (139), Talabă Mădălina (122), Trifan Paula (130), Sabău Daniela (147); Ş.g. 28 cl. V Burghelea Teodor (60), Ciubotaru Adrian (90), cl. VI Bănceseu Ionuţ (120), Gheorghe Liliana (110), Hopenciuc Ileana (140), Iordache Virgil (116), Ivănescu Bogdan (150), Negu Rodica (109), cl. VII Ponanciuc Ina (108), cl. VIII Soldan Florin (140); Ş.g. 33 cl. VI Berbecel Daniela (80), Ticu Ciprian (110); Ş.g. 42 cl. V Bogdan Daniela (60), Dinescu Daniela (60), Zamfir Florin (50), cl. VI Răileanu Sima (100); Lic. „V. Alecsandri" cl, X Istrate Gabriel (185). **GALICEA** (VÎLCEA) Ş.g. cl. VI Ploaie Mădălina (65). **GĂTAIA** (TIMIŞ) Ş.g. cl. VII Vutaşi Ludovic (100). **GH. GHEORGHIU-DEJ** (BACĂU) Ş.g. 8 cl. V Puşcalău Mihai (60), cl. VI Colbatăi Bogdan (80), cl. VII Piriltescu Elena (100). **GIURGIU** (GIURGIU) Lic. „Ion Maiorescu" cl. XI Măgan Laura (151), Lepădatu Claudiu (150).

PAŞCANI (IAŞI) Ş.g. 6 cl. V Virtosu Daniela (110). **PĂTÎRLAGELE** (BUZĂU) Lic. ind. cl. VII Ciurece Ioana (100). **PĂUNEŞTI** (VRANCEA) Ş.g. cl. V Cautiş Maricica (80), Cheiaru Luminiţa (80), cl. VI Andrei Veronica (90). **PETROŞANI** (HUNEDOARA) Lic. mat.-fiz. Isac Alin Cristian (80). **PIATRA NEAMŢ** (NEAMŢ) Ş.g. 2 cl. VI Alcaziu Vasile (90), Gorgos Delia (90), Iacob Irina (70); Ş.g. 4 cl. VII Chiriţă Mihaela (80); Ş.g. 27 cl. V Miron Mirabela (100) Nenu Robert-Lucian (90), Vitu Manuela Viorica (90); Ş.g. 28 cl. V Micu Florentina (30), Paşcu Carmen Nicoleta (45), Silvaş Ana Lorela (93), Sopînceanu Paula (188), cl. VI Bălţătescu

Iulian (90), Miron Irina (170), Muraru Antoaneta (89), Vasilca Mihaela (80). **PIETROȘANI** (ARGEȘ) Ș.g. cl. VII Taolo Dragoș-Gheorghe (150). **PITEȘTI** (ARGEȘ) Ș.g. 3 cl. VI Bărută Sorin (80), cl. VII Bănuță Sorin (100); Ș.g. 9 cl. VI Manolescu Anca (90), Nicola Claudia (110), Stan Ionel (110), Vucu Dana (97); Ș.g. 11 cl. VI Catana Alina (145), Stanciu Mirela (100); Ș.g. 13 cl. V Luță Robert (49), Stupu Teodora (80). **PLOIEȘTI** (PRAHOVA) Ș.g. 10 cl. V Bucătaru Mădălina (80), Zecheru Cornia (86), cl. VI Mindrilă Dumitru (100), Sovărel Cristina (90), cl. VII Băncilă Ariadna (96); Ș.g. 21 cl. V Mihăilescu Oana (80); Ș.g. 25 cl. VI Melinte Adina (110); Ș.g. 26 cl. VI Radu Arina Georgiana (150), cl. VII Jurcan Andrei (80); Ș.g. 28 cl. V Cătălin Eugen Florin (80), Moldoveanu Cornel Felix (80); Lic. pedagogic cl. VI Budulacu Georgiana (115), Marinache Mircea (90), cl. VII Marinache Mihai (90), cl. VIII Alexandrescu Răzvan (138), Anghel Costin (96), Calotă Nicoleta (105), Dobre Gabriel (80), Dumitrescu Oana (91), Grigorescu Lucian (170), Popa Răzvan (110). **PODENI** (MEHEDINȚI) Ș.g. cl. VI Țîrlui Nela (120). **POIANA** (DÎMBOVIȚA) Ș.g. 1 cl. V Croitoru Virginia (70), Vîlcu Bogdan (110); Ș.g. 7 cl. V Zamfir Daniela (86). **PRIGOR** (CARAȘ-SEVERIN) Ș.g. cl. VI Glimboșă Romanița (100). **PUCIOASA** (DÎMBOVIȚA) Ș.g. 1 cl. VI Butcă Maria-Cristina (119).

BAIA MARE (MARAMUREȘ) Ș.g. 8 cl. VI Zaharia Sorin (92); Ș.g. 11 cl. VI Cîrț Ciprian (75); Ș.g. 14 cl. VI Chira Luminița (76). **BĂLAN** (SĂLAJ) Ș.g. cl. VI Ianculș Gabriel (140). **BÎRLAD** (VASLUI) Ș.g. 1 cl. V Cânepă Adrian (135); Ș.g. 8 cl. VII Fecioru Diana Ionela (140). **BISTRIȚA** (BISTRIȚA-NĂSĂUD) Lic. „Liviu Rebreanu" cl. IX Acu Liana (141). **BECLEAN** (BISTRIȚA-NĂSĂUD) Ș.g. cl. VI Jula Alin (110). **BUGHEA DE JOS** (ARGEȘ) Ș.g. cl. VI Sanda Alina (100). **BLAJ** (ALBA) Lic. pedagogic „Gh. Șincai" cl. VI Dulău Dan (78). **BOTOȘANI** (BOTOȘANI) Lic. mat.-fiz. 1 Vîlceanu Florin (140); Ș.g. 7 cl. V Slavic Dan (80), cl. VII Husac Ilona (100); Ș.g. 8 cl. V Boca Ionela (58), Livanu Emanuela (80), Maxim Marcela (60), cl. VI Burac Irina (60), Lăcătușu Marius (70); Ș.g. 12 cl. V Buliga Luciana (80), Dărea Daniela (80), Moga Monica (80), cl. VII Tătăringă Gabriela (190), cl. VIII Poplaușel Cosmin (120); Ș.g. 13 cl. V Baș Marius (98), Bobonțanu Doina (96), Cavaleru Mihaela (90), Chelariu Ionela (95), Cutaș Liliana (82), Ganea Mihaela (70), Isar Gabriela (80), Jijie Alina (100), Onofrei Brîndușa (90), Pintilie Claudia (69), Șlogan Gabriela (100), cl. VI Buliga Loredana (210), Munteanu Eliza (200), cl. VII Rapaport Felicia (200). **BOTENI** (ARGEȘ) Ș.g. cl. VI Constantinescu Bogdan (128). **BUZĂU** (BUZĂU) Ș.g. 15 cl. VI Petrescu Edward (130); Lic. „B. P. Hașdeu" cl. VIII Gîdea Cerasela (227) (va urma)

ÎN ATENȚIA AUTORILOR ȘI CITITORILOR REVISTEI!

Începînd cu acest număr prioritățile în publicarea articolelor, notelor și problemelor propuse în Gazeta Matematică va fi următoarea:

1. Membrii S.S.M. activiști cu cotizația achitată la zi pentru articole și note.

2. Elevii abonați, cu activitate deosebită în cadrul Gazetei Matematice, pentru articole, note și probleme propuse.

3. Pentru a se putea satisface solicitările numeroase din întreaga țară și a evita stocarea de materiale nepublicate cu începere din acest număr un autor poate propune în cursul unui an calendaristic un număr de maximum 6 probleme propuse, cu excepția problemelor de tip O.I.M., Concursul rezolvitorilor și rubrica de informatică unde acest maxim este 9.

4. Articolele și problemele propuse trebuie dactilografiate în 3 exemplare, la 2 rînduri, figurile fiind executate pe foi separate.

c. 2090 I. P. Informația

Index 41 001

Lei 3,50

Scanned with OKEN Scanner

ISSN 0016-5441

SOCIETATEA DE ȘTIINȚE MATEMATICE
DIN REPUBLICA SOCIALISTĂ ROMÂNIA

GAZETA MATEMATICĂ

PUBLICAȚIE LUNARĂ PENTRU TINERET

5-6

DIN CUPRINS:

- CONFIGURAȚII GEOMETRICE SIMPLE IN PLAN (I)
- NEGALITĂȚI IN PATRULATER
- SOLUȚIILE PROBLEMELOR DATE LA CONCURSUL DE MATEMATICĂ CLASELE IV-VIII, ETAPA PE SECTOR BUCUREȘTI ȘI ETAPA LOCALĂ, LICEE, JUD. GIURGIU
- CONCURSUL INTERJUDEȚEAN „GH. ȚIȚEICA", SLATINA 1987
- PROBLEME PROPUSE PENTRU CICLUL PRIMAR. GIMNAZIU, PRELIMINARE DE TIP O.I.M. PENTRU GIMNAZIU, LICEU, O.I.M. ȘI O.B.M., CONCURS ANUAL ȘI INFORMATICĂ
- RUBRICA REZOLVITORILOR DE PROBLEME

Acest număr dublu a fost realizat în colaborare cu Filiala S.S.M. Satu Mare

ANUL XCIII nr. 5-6/1988

Scanned with OKEN Scanner

GAZETA MATEMATICĂ

SUMARUL

		Pag.
1.	Configuraţii geometrice simple în plan (I). Poligoane convexe înscrise şi circumscrise, de Acad. *N. Teodorescu*	193
2.	În sprijinul candidaţilor la examenul de admitere. Asupra unei familii de locuri geometrice, de *Virgil Bîşcă*	198
3.	Inegalităţi în patrulater, de *Ovidiu Pop*	203
4.	O demonstraţie simplă a unei inegalităţi relative la numărul „e", de *Andrei Vernescu*	206
5.	Soluţiile problemelor date la Concursul de matematică clasele IV—VIII, etapa pe sector, Bucureşti, 1988, de *Alexandru Setelecan*	208
6.	Soluţiile problemelor date la Concursul de matematică, etapa locală, 27 februarie 1988, jud. Giurgiu, de *Şerban Olteanu* şi *Mircea Trifu*	215
7.	Concursul interjudeţean „Gh. Ţiţeica", faza finală, Slatina, 15—16 mai 1987, de *C. P. Niculescu* şi *G. Vraciu*	223
8.	Concursul de matematică, etapa judeţeană, 12 martie 1988, licee	227
9.	Probleme pentru ciclul primar (33 — 48)	228
10.	Probleme rezolvate pentru gimnaziu (E: 9131, E: 9133, E: 9155, E: 9137, E: 9140, E: 9142, E: 9162, E: 9166, E: 9144, E: 9146, E: 9148, E: 9168, E: 9172, E: 9154, E: 9175)	230
11.	Probleme pentru gimnaziu (E: 9410 — E: 9466)	238
12.	Probleme preliminare de tip O.I.M. pentru elevii din gimnaziu (O.G.: 71 — O.G.: 74)	245
13.	Probleme rezolvate pentru liceu (21099, 21121, 21132, 21136, 21109, 21120)	246
14.	Probleme pentru liceu (21429 — 21484)	252
15.	Probleme pregătitoare pentru O.I.M. şi O.B.M. (O: 548 — O: 553)	259
16.	Probleme pentru Concursul anual al rezolvitorilor (C: 785 — C: 800)	260
17.	Probleme de informatică (I: 333 — I: 336)	263
18.	Rubrica rezolvitorilor de probleme	264

ANUL XCIII **5-6** 1988

COMITETUL DE REDACŢIE

Lector univ. Dumitru Acu, Sibiu; lector univ. Toma Albu; lector univ. Horea Banea, Braşov; lector univ. Octavian Băsică; conf. univ. Dan Brânzei, Iaşi; prof. Constantin Cărbunaru; prof. Marcel Chiriţă; prof. Pal Dalyay, Tg. Mureş; lector univ. Inocenţiu Drăghicescu; prof. Ioana Drăghici; înv. Alexandrina Dumitru; prof. Ilie Gheorghiţă; prof. Adrian Ghioca, Sinaia; cercet. princip. Gheorghe Gussi; lector univ. Stere Ianuş; prof. Ştefan Kadar, Baia Mare; lector univ. Constantin Niţă; prof. univ. Arpad Pal, Cluj-Napoca; lector univ. Laurenţiu Panaitopol; prof. Olimpia Popescu, Ploieşti; matem. Paul Radovici-Mărculescu; lector univ. Gheorghe Sireţchi; lector univ. Ioan Tomescu; prof. Florin Vulpescu-Jalea.

REDACŢIA GAZETEI MATEMATICE

Redactor şef (delegat): Acad. N. Teodorescu; redactori principali: prof. Ilie Ilieşeu, prof. Liviu Pîrşan, prof. Marcel Ţena; redactori principali onorifici: C. Ionescu-Ţiu, asist. univ. Elflerie Rogai; redactori: prof. Liliana Balaci, prof. Alexandru Constantinescu.

Responsabili de număr: prof. Ilie Ilieşeu şi prof. Liviu Pîrşan

ADRESA REDACŢIEI GAZETEI MATEMATICE

Str. Academiei nr. 14, tel. 14.46.53 — Bucureşti, 1, cod. 79543. Cititorii din străinătate se pot abona prin ROMPRESFILATELIA, Sectorul Export-Import-Presă Calea Griviţei nr. 64—66, P.O.Box 12-201, Telex 10376 Prefir, Bucureşti, ROMÂNIA

Scanned with OKEN Scanner

GAZETA MATEMATICĂ
PUBLICAȚIE LUNARĂ PENTRU TINERET
Anul XCIII nr. 5–6 mai–iunie 1988

CONFIGURAȚII GEOMETRICE SIMPLE IN PLAN (I)

Poligoane convexe înscrise și circumscrise

de Acad. Nicolae Teodorescu

§.1. Observații asupra geometriei triunghiului

Proprietățile de bază ale figurilor fundamentale ale geometriei sintetice plane și în spațiu sînt deosebit de atractive în special pentru tineretul studios care descoperă în configurațiile geometrice de triunghiuri, cercuri, pătrate și alte poligoane regulate surse de inspirație pentru primele aventuri creative de probleme, note și articole, care înseamnă tot attea descoperiri și succese de începuturi ale unor cariere de matematicieni.

Geometria triunghiului și a tetraedrului, inițiată încă în secolul al XVII-lea de savanți ale căror nume s-au transmis pînă la noi, ca cele ale lui *Desargues, Torricelli, Pascal, Newton* sau *Ceva*, a cîștigat secolul următor predilecțiile unor personalități ca *Simson, Euler, Carnot* sau *Lagrange*, iar în secolul al XIX-lea abundența rezultatelor atrăgătoare a condus la constituirea unui întreg sector al geometriei plane, care a căpătat numele atît de cunoscut astăzi *Geometria triunghiului*. Aici se înscriu nume ca cele ale lui *Crelle, Brocard, Brianchon, Poncelet, Steiner, Iacobi, Sylvester*, cărora li se alătură cele ale lui *Bobillier, Feuerbach, Lemoine, Gergonne, Salmon, Neuberg, Morley, Longchamps, Soon, Thebault, Miguel, Terguem, Nagel, Mathat* pentru a nu cita decît pe cele mai cunoscute iubitorilor geometriei triunghiului și tetraedrului.

În țara noastră, geometria triunghiului a pasionat pe mulți matematicieni, ingineri și ofițeri. Dintre înaintașii școlii românești de matematică *Gh. Țițeica* și mai cu seamă *Tr. Lalescu* au adus contribuții remarcabile, ultimul fiind autorul unui volum intitulat *Geometria triunghiului*, care a fost editat și în limba franceză de Editura Vaibert din Paris. Alături de aceștia se cuvine să citățm pe *Gh. Buicliu, I. Gh. Popescu* și, în special, pe *C. Mihalescu*, autorul unui amplu volum intitulat *„Geometria elementelor remarcabile"*, în care sînt sintetizate cele mai semnificative teoreme și probleme din această geometrie și în care vom găsi citați cu conștiinciozitate toate numele autorilor străini și români, precum și contribuția sa personală care este bogată și importantă.

Avînd această impresionantă contribuție a attor personalități, precum și o dezvoltare prestigioasă, începută în secolul al XVII-lea și ajunsă la cea mai mare înflorire în a doua jumătate a secolului trecut și în prima jumătate a secolului nostru, pare greu de înțeles brusca ieșire din actualitate a geometriei triunghiului. Totuși, o analiză mai adîncită poate aduce această explicație tocmai prin abundența rezultatelor monografice remarcabile dar valoroase numai în sine, fără urmări sugestive. Prea multe figuri, puncte, drepte, cercuri remarcabile au condus la slăbirea interesului pentru fertilizarea rezultatelor. Dar, geometria triunghiului rămîne o ramură a geometriei plină de cuceriri frumoase și atractive. Ar merita să fie examinate configurațiile acestela și din punct de vedere mai generale, înainte de a fi complicate prin attea drepte și puncte remarcabile, dîndu-se proprietăților de colinearitate, concurență, concicliclitate semnificații mai legate de natura configurațiilor respective, căutîndu-se extensiuni și relații între elementele remarcabile.

În cele ce urmează, ne propunem să exemplificăm aceste considerații studiind unele configurații de triunghiuri, poligoane, cercuri din puncte de vedere mai generale decît cele monografice, de exemplu, privitoare la relațiile între poligoane convexe înscrise și circumscrise altor poligoane convexe. De asemenea, vom căuta să dăm condiții necesare și suficiente de existență a unor proprietăți controlînd intuiția, care poate aduce unele erori, dacă nu este verificată cu suficientă exigență.

Prin aceasta atragem atenția și asupra unor posibilități de a se privi cu ochi noi unele rezultate vechi care la vremea lor au fost considerate ca importante.

Scanned with OKEN Scanner

§.2 Poligoane convexe înscrise în poligoane convexe

În geometria elementară plană este folosită curent noțiunea de *triunghi* (mai general, *poligon*) *înscris într-un cerc*, în care caz cercul este numit *circumscris* triunghiului, respectiv poligonului. Există, de asemenea, noțiunea de *cerc înscris* într-un triunghi, respectiv poligon, în care caz cercul este tangent laturilor acestuia.

Se folosește uneori și noțiunea de *poligon înscris* într-un alt poligon, de exemplu, un dreptunghi înscris într-un triunghi dar condițiile sînt mai puțin precizate, dreptunghiul putînd avea două vîrfuri pe o latură a triunghiului celelalte fiind pe celelalte două laturi ale triunghiului.

Să observăm că, în cazul poligoanelor circumscrise cercurilor, punctele de tangență sînt puncte de contact, deci două puncte confundate printr-o poziție limită a unei laturi secante cercului. În cazul poligoanelor înscrise cercurilor, punctele comune sînt *vîrfuri*, care aparțin deci la două laturi concurente și astfel sînt tot două puncte de secantă confundate. De aceea putem extinde definițiile relative la poligoane înscrise sau circumscrise cercurilor, la poligoane înscrise sau circumscrise altor poligoane, păstrînd analogia și, ca urmare, caracterul unitar al definițiilor prin

Definiția 1. *Vom spune că într-un plan dat A un poligon convex P este înscris într-un alt poligon convex Q, dacă primul, P, are vîrfurile pe laturile celui de al doilea, Q. În acest caz, Q va fi numit circumscris lui P.*

Observația 1. Facem observația că această definiție nu exclude nici cazul cînd două vîrfuri consecutive se află pe aceeași latură a poligonului circumscris, ca în exemplul dreptunghiului înscris într-un triunghi, caz care apare cînd poligonul înscris are mai multe laturi decît cel circumscris lui și în care unele laturi se suprapun parțial.

Configurația formată într-un plan dat A din două poligoane convexe P și Q, dintre care primul este înscris în cel de al doilea, se caracterizează prin următoarea lemă.

Lema 1. Dacă poligonul convex P este înscris în poligonul convex Q, au loc următoarele proprietăți:

1) Dacă pe fiecare din laturile lui Q există cel mult cîte un vîrf al lui P, poligonul P este cuprins în interiorul lui Q, excepînd vîrfurile sale, care se găsesc pe laturile lui Q.

2) Dacă pe unele laturi ale lui Q există cîte două vîrfuri ale lui P, iar pe celelalte cel mult cîte un vîrf al acestuia, poligonul P este cuprins în interiorul lui Q, excepînd vîrfurile și laturile sale, care se găsesc pe laturile lui Q.

Demonstrație: 1) Fie Q_iQ_{i+1} o latură a lui Q, pe care se găsește un vîrf P_j al lui P. Deoarece Q este convex toate vîrfurile sale diferite de Q_i și Q_{i+1} sînt de aceeași parte a dreptei determinată de Q_iQ_{i+1} și, ca atare, și toate laturile lui Q, excepînd Q_iQ_{i+1} pe care se găsește cel mult cîte un vîr al lui P, excepînd P_j. Pe de altă parte, cum P este de asemenea convex, toate vîrfurile sale vor fi de aceeași parte a dreptei determinate de latura sa P_jP_{j+1}. Prin faptul că există vîrfuri ale lui P în semiplanul determinat de Q_iQ_{i+1} și vîrfurile lui Q_i vîrfurile lui P vor fi în intersecția semiplanelor determinate de Q_iQ_{i+1} și P_jP_{j+1}, care nu este vidă. În consecință, toate vîrfurile lui P vor fi pe laturi ale lui Q, iar laturile sale, cu excepția vîrfurilor, vor fi în interiorul lui Q, avînd în vedere convexitatea acestuia

2) Fie P_k unul din cele două vîrfuri ale lui P, care se găsesc pe o latură Q_iQ_{i+1} a lui Q. Cum P este convex, toate segmentele P_kP_m care unesc pe P_k cu vîrfurile neconsecutive cu acesta, (deci $m \neq k+1$ și $m \neq k-1$) sînt diagonale și se găsesc în semiplanul determinat de P_kP_{k+1} sau P_kP_{k-1}, care este latură. Dacă pe latura Q_iQ_{i+1} a lui Q mai există încă un vîrf P_m al lui P, acesta nu poate fi decît P_{k+1} sau P_{k-1}. Prin urmare, cele două vîrfuri situate pe latura Q_iQ_{i+1} sînt consecutive și determină o latură a lui P. Luînd laturile Q_iQ_{i+1} și P_kP_{k+1} (sau P_kP_{k-1}) situate pe aceeași dreaptă ca baze, ambele poligoane fiind convexe, vor avea celelalte vîrfuri de aceeași parte a acestei drepte; deci în același semiplan și, cum vîrfurile lui P sînt toate pe laturi ale lui Q, laturile lui P vor fi în interiorul lui Q, excepînd vîrfurile și laturile sale care se găsesc pe laturi ale lui Q.

Observația 2. Dacă poligonul înscris P are p laturi iar cel circumscris Q are q laturi, în cazul cînd $q < p \leqslant 2q$ are loc proprietatea 2, iar dacă $p \leqslant q$, pot avea loc ambele proprietăți. De exemplu, un pătrat înscris într-un triunghi are cel puțin o latură pe una din laturile acestuia, un exagon înscris într-un triunghi are trei laturi neconsecutive pe laturile triunghiului, iar un triunghi înscris într-un pătrat poate avea vîrfurile pe trei laturi ale acestuia sau o latură pe una din laturile pătratului, cel de al treilea vîrf fiind pe o altă latură a acestuia.

Un alt exemplu este cel al unui patrulater înscris într-un triunghi oarecare, avînd trei dintre vîrfuri în mijloacele laturilor acestuia, iar al patrulea în piciorul uneia dintre înălțimi. Un astfel de patrulater are o latură pe latura triunghiului pe care s-a ales piciorul înălțimii și este un trapez isoscel. Există deci trei soluții, cu bazele mici pe cele trei laturi ale triunghiului, dacă acesta este ascuțitunghic, bazele mari și laturile neparalele fiind congruente cu laturile triunghiului median.

Scanned with OKEN Scanner

Observația 3. Cazul particular al triunghiurilor înscrise sau circumscrise unui alt triunghi este frecvent și pune adesea în evidență configurații remarcabile. De exemplu, cel al unui triunghi oarecare și triunghiul său median, sau cel al unui triunghi ascuțitunghic și triunghiul său ortic.

În ce privește noțiunile de poligon convex înscris sau circumscris unui alt poligon convex, deși nu sînt semnalate în manuale sau broșuri de specialitate, apar prin cazuri remarcabile adesea în geometria elementară, fapt pentru care am introdus definiția 1 și am stabilit lema 1.

Înscrierea unui poligon convex în alt poligon convex poate pune probleme destul de dificile de existență și unicitate a soluțiilor. Un caz remarcabil este cuprins în următoarea:

Definiția 1'. *Vom numi triunghi exînscris unui triunghi oarecare ABC (nedegenerat sau chiar degenerat, triunghiul $I_AI_BI_C$ având ca vîrfuri centrele cercurile exînscrise triunghiului ABC.*

Convenția 1: Pentru a evita repetarea calificativelor „nedegenerat" sau „degenerat" vom omite aceste calificative, *înțelegînd prin triunghi un triunghi nedegenerat*, dacă nu facem mențiune expresă de degenerescență, aceasta constînd în existența unui unghi de măsură nulă sau π (triunghi cu vîrfurile coliniare sau cu laturi paralele)

Cu privire la relațiile dintre un triunghi ABC și triunghiul său exînscris $I_AI_BI_C$, are loc următoarea lemă:

Lema 2. *Orice triunghi $I_AI_BI_C$ exînscris unui triunghi ABC este circumscris acestuia. ABC este triunghiul ortic al lui $I_AI_BI_C$ și rămîne interior acestuia cu excepția vîrfurilor sale, care sînt cîte unul pe fiecare latură a lui $I_AI_BI_C$.*

Demonstrație. Conform definiției 1', vîrfurile lui $I_AI_BI_C$ sînt centrele cercurilor exînscrise lui ABC, iar laturile sale, bisectoarele exterioare ale lui ABC, deci conțin vîrfurile A, B, C. Cum bisectoarele I_AC și I_BC sînt ambele perpendiculare pe bisectoarea interioară CC', ele vor fi în prelungire și punctele I_A, C, I_B coliniare. În mod analog se arată că I_BI_C și I_CI_A conțin respectiv vîrfurile A și B ale lui ABC.

Cum triunghiurile sînt poligoane convexe, în baza lemei 1, are loc proprietatea 1, deci ABC este interior lui $I_AI_BI_C$, cu excepția vîrfurilor sale. În același timp bisectoarele interioare AI_A, BI_B, CI_C fiind perpendiculare pe laturile I_BI_C, I_CI_A, I_AI_B vor fi înălțimi în $I_AI_BI_C$, iar ABC va fi triunghiul ortic al acestuia.

§.3. Aplicații

Înscrierea poligoanelor convexe în alte poligoane convexe conduce la numeroase probleme de tipuri diferite de cele obișnuite cu privire la configurații poligonale. Ca aplicație a lemei 1, vom pune următoarea problemă:

Problema 1: *Să se construiască toate pătratele care pot fi înscrise într-un triunghi oarecare ABC, cu rigla și compasul, punîndu-se în evidență toate cazurile posibile.*

Soluție. Întrucît atît pătratul cît și triunghiul sînt poligoane convexe, aplicînd lema 1, care arată că dacă înscrierea pătratului în triunghi este posibilă, pătratul va fi în interiorul triunghiului exceptînd vîrfurile sale în număr de patru, din care două vor fi pe o latură a triunghiului iar celelalte două fiecare pe cîte una din laturile triunghiului, conform cu observația 2. Nu se poate ca și acestea să fie pe o latură a triunghiului deoarece aceasta ar trebui să fie paralelă cu cea care conține primele două vîrfuri și triunghiul ar fi degenerat.

Vom nota cu $\hat{A}$, $\hat{B}$, $\hat{C}$ unghiurile triunghiului ABC opuse respectiv laturilor BC, CA și AB și cu A', D' vîrfurile pătratului $A'D'B'C'$ situate pe BC, vîrfurile B' și C' fiind pe CA și respectiv AB. Ca pătratul să fie înscris în triunghiul ABC, este necesar, în baza lemei 1 ca laturile lui ABC să fie toate *exterioare* pătratului, cu excepția punctelor B' și C' precum și a porțiunii $A'D' \subset BC$, comună cu latura $A'D'$ a pătratului. În consecință, vom încerca înscrierea pătratului în triunghi luînd pe latura AB un punct arbitrar ales C_0'; perpendiculara din C_0' pe BC o întîlnește într-un punct A_0', ceea ce ne permite să luăm segmentul $C_0'A_0'$ ca latură a unui pătrat-test. Vîrful D_0' va fi pe BC, cu condiția $A_0'D_0' \equiv C_0'A_0'$, iar vîrful B_0' la intersecția paralelei $C_0'B_0'$ la BC cu perpendiculara $D_0'B_0'$ în D_0' pe BC. Am obținut pătratul $A_0'D_0'B_0'C_0'$ care are cel puțin 3 vîrfuri pe laturile lui ABC. Dacă B_0' este pe CA, am obținut o soluție a problemei, cu condiția ca CA să rămînă exterioară pătratului, exceptînd punctul B_0' dar cu condiția ca unghiul C să fie ascuțit sau, ca poziție limită, drept, caz în care $D_0'B_0' \subset CA$. (Vezi fig. 1).

Dacă B_0' nu este pe CA, paralela dusă prin B_0' la CA, care întîlnește pe BC într-un punct C_0 și pe AB într-un punct A_0, determină un triunghi A_0BC_0 omotetic cu ABC, centrul de omotetie fiind B. Punctul B_0' poate fi interior sau exterior triunghiului dat ABC. În ambele cazuri pătratul căutat $A'D'B'C'$ va fi omotetic cu $A_0'D_0'B_0'C_0'$ înscris în triunghiul A_0BC_0.

Scanned with OKEN Scanner

În consecință, B_0' va fi omologul lui B', deci ducînd raza BB_0' aceasta va intersecta pe AC într-un punct B', vîrful pe CA al pătratului căutat $A'D'B'C'$. Este suficient să deducem că $B'C'$ paralelă la BC pînă întîlnește pe AB în C' și să lăsăm din B' și C' perpendiculare pe BC avînd picioarele în D' respectiv A'.

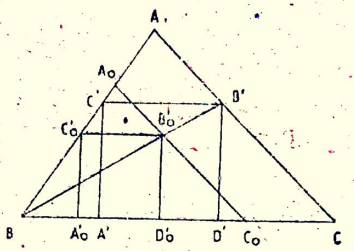


Fig. 1

Avînd în vedere omotetia pătratului-test $A_0'D_0'B_0'C_0'$ cu cel căutat $A'D'B'C'$, oricare ar fi acest pătrat-test vom obține aceeași soluție, care este deci *unică*.

Raționamentele făcute pentru a realiza construcția pătratului $A'D'B'C'$ înscris în triunghiul ABC pun în evidență în primul rînd condiția necesară și suficientă de *existență* a acestui pătrat, care poate fi formulată astfel:

Condiția necesară și suficientă de existență a unui pătrat înscris într-un triunghi ABC este ca unghiurile alăturate laturii triunghiului pe care se găsesc cele două vîrfuri ale pătratului căutat, să fie ambele ascuțite sau unul ascuțit și celălalt drept.

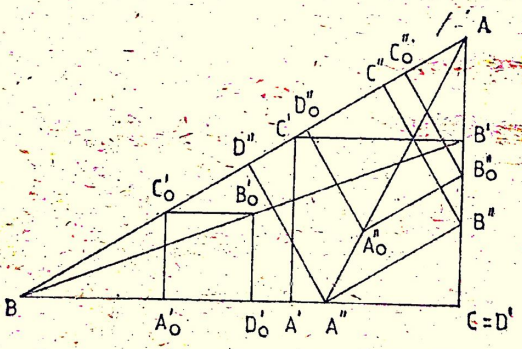


Fig. 2

Fig. 2

În ceea ce privește unicitatea și construcția soluției cu rigla și compasul, avem următoarea concluzie:

Soluția astfel obținută este realizată grafic numai cu rigla și compasul și este unică relativ la latura pe care se găsesc două vîrfuri ale pătratului.

Numărul de cazuri posibile cu soluțiile respective este următorul:

1) *Triunghiul ABC fiind ascuțitunghic*, trei soluții, cîte una pentru fiecare latură;

2) *Triunghiul ABC fiind dreptunghic*, două soluții, una pentru cele două catete și una pentru ipotenuză: (Vezi fig. 2).

3) *Triunghiul ABC fiind obtuzunghic*, o singură soluție relativă la latura opusă unghiului obtuz;

4) *Triunghiul ABC fiind echilateral*, o singură soluție, rezultată din suprapunerea celor 3 posibile.

Scanned with OKEN Scanner

Comentarii: Raționamentele făcute în rezolvarea problemei 1 sînt utile și în cazul mai general al înscrierii unui patrulater convex într-un triunghi, putînd fi adaptabile circumstanțele geometrice prezentate de figurile respective. Este important de comparat soluțiile obținute relative la cele trei laturi ale triunghiului ABC circumscris, ceea ce formează obiectul următoarei probleme:

Problema 2. *Înscriindu-se un pătrat într-un triunghi ABC, se cere:*

1) Să se exprime lungimea laturii sale în funcție de elementele triunghiului pentru fiecare soluție posibilă.

2) *Să se ordoneze lungimile laturilor pătratelor obținute în funcție de lungimile laturilor triunghiului, în cazul cînd există mai mult de o soluție.*

Soluție. 1) Vom nota prin a, b, c lungimile laturilor BC, CA, AB ale triunghiului ABC și prin l_a, l_b, l_c lungimile laturilor pătratelor care au o latură respectiv pe BC, CA, AB. Vom folosi figura relativă la pătratul $A'D'B'C'$ care are latura $A'D'$ pe BC. Din triunghiurile dreptunghice $BA'C'$ și $CD'B'$ avem:

$$BA' = l_a \cdot \operatorname{ctg}\hat{B};\quad D'C = l_a \cdot \operatorname{ctg}\hat{C};\quad A'D' = l_a \tag{1}$$

Punctele A' și D' fiind pe latura BC, vom evalua:

$$a = BC = BA' + A'D' + D'C = l_a(1 + \operatorname{ctg}\hat{B} + \operatorname{ctg}\hat{C}), \tag{1'}$$

în ipoteza că B și C sînt ascuțite sau unul ascuțit și celălalt drept. În consecință vom avea

$$l_a = \frac{a}{1 + \operatorname{ctg}\hat{B} + \operatorname{ctg}\hat{C}}; \tag{2}$$

Dacă și $\hat{A}$ este ascuțit, vom deduce imediat pentru pătratele relative la CA și AB

$$l_b = \frac{b}{1 + \operatorname{ctg}\hat{C} + \operatorname{ctg}\hat{A}};\quad l_c = \frac{c}{1 + \operatorname{ctg}\hat{A} + \operatorname{ctg}\hat{B}}, \tag{2'}$$

Dacă $\hat{C}$ este drept, vom avea

$$l_a = \frac{a}{1 + \operatorname{tg}\hat{A}},\quad l_b = \frac{b}{1 + \operatorname{ctg}\hat{A}},\quad l_c = \frac{c}{1 + \operatorname{ctg}\hat{A} + \operatorname{tg}\hat{A}}, \tag{3}$$

dar cum $a = b\operatorname{tg}\hat{A}$, triunghiul ABC fiind dreptunghic în C, deducem ușor $l_a = l_b$, deci două soluții confundate, dacă ținem seama și de (1) permutînd convenabil vîrfurile respective. Dacă triunghiul ABC este isoscel cu $\hat{B} \equiv \hat{C}$, deci și $b = c$, iar $\hat{A}$ este ascuțit, vom avea din (2') $l_b = l_c$, ceea ce face ca pătratele corespunzătoare laturilor congruente să fie congruente.
Dacă $\hat{A}$ este obtuz, triunghiul este obtuzunghic și avem numai soluția (2) corespunzînd lui BC. Formal există și soluțiile (2'), dar cum $\operatorname{ctg}\hat{A} < 0$, pătratele construite pe CA și AB au cîte un vîrf pe prelungirile acestor laturi, deci nu mai sînt înscrise în ABC și nu mai rămîn interioare lui ABC, cu excepția vîrfurilor care sînt pe laturile acestuia.

2) În cazul triunghiurilor ascuțitunghice, vom compara l_a cu l_b, calculînd raportul:

$$\frac{l_a}{l_b} = \frac{a}{b} \cdot \frac{1 + \operatorname{ctg}\hat{C} + \operatorname{ctg}\hat{A}}{1 + \operatorname{ctg}\hat{B} + \operatorname{ctg}\hat{C}}.$$

Ținînd seama de $\frac{a}{\sin\hat{A}} = \frac{b}{\sin\hat{B}} = \frac{c}{\sin\hat{C}}$, vom avea succesiv:

$$\frac{l_a}{l_b} = \frac{\sin\hat{A}}{\sin\hat{B}} \cdot \frac{1 + \operatorname{ctg}\hat{C} + \operatorname{ctg}\hat{A}}{1 + \operatorname{ctg}\hat{B} + \operatorname{ctg}\hat{C}} = \frac{\sin\hat{A}}{\sin\hat{B}} \cdot \frac{\sin\hat{C}\sin\hat{A} + \sin(\hat{C} + \hat{A})}{\sin\hat{B}\sin\hat{C} + \sin(\hat{A} + \hat{B})} \cdot \frac{\sin\hat{B}\sin\hat{C}}{\sin\hat{C}\sin\hat{A}} =$$

$$= \frac{\sin\hat{A}\sin\hat{C} + \sin\hat{B}}{\sin\hat{B}\sin\hat{C} + \sin\hat{A}}.$$

Inegalitatea $\frac{l_a}{l_b} \leqslant 1$, deci $\frac{\sin\hat{A}\sin\hat{C} + \sin\hat{B}}{\sin\hat{B}\sin\hat{C} + \sin\hat{A}} \leqslant 1$, revine la

$$(\sin\hat{C} - 1)(\sin\hat{A} - \sin\hat{B}) \leqslant 0, \tag{4}$$

Scanned with OKEN Scanner

Dacă $\hat{C}$ este ascuțit, $\sin\hat{C} - 1 < 0$ și deci $\sin\hat{A} - \sin\hat{B} \geqslant 0$ implică $l_a \leqslant l_b$ din care deducem măs $\hat{A} \geqslant$ măs $\hat{B}$ implică $l_a \leqslant l_b$. Dacă $\hat{C}$ este drept, vom avea $l_a = l_b$ și din (3) deducem $l_c < l_a = l_b$.

În cazul triunghiului ABC isoscel, cu $\hat{B} \equiv \hat{C}$, avem $l_b = l_c$, iar dacă măs $\hat{A} <$ măs $\hat{B}$, din (2) și (2') deducem $l_a > l_b = l_c$.

Dacă ABC este echilateral avem $l_a = l_b = l_c$ și o soluție unică din cauza simetriei figurii.

În concluzie, ordonarea laturilor pătratelor înscrise este următoarea:

Dacă ABC este ascuțitunghic și $a > b > c$, vom avea $l_a < l_b < l_c$, deci ordonare inversă celei a laturilor triunghiului.

Dacă ABC este dreptunghic în $\hat{C}$, vom avea $c > b$ și $c > a$, c fiind ipotenuză și, ca urmare, $l_c < l_a = l_b$, ca și în cazul triunghiului ascuțitunghic.

Dacă ABC este isoscel cu $\hat{B} \equiv \hat{C}$, $l_b = l_c$ și l_a este mai mică sau mai mare decît $l_b = l_c$, după cum $a > b = c$ sau $a < b = c$, ca și în cazul triunghiului ascuțitunghic.

§.4. Comentarii metodologice

Proprietatea de convexitate, ca și operațiile de înscriere și circumscriere a figurilor unele în altele sînt fundamentale și ele au fost transpuse în geometrie din viața societății unde apar intuite și folosite în variate sectoare ale practicii și artelor plastice.

De aceea, avînd în vedere suportul lor intuitiv, este important și util să capete definiții riguroase și să fie tratate cu grija de a controla aspectele lor intuitive care ar putea induce unele erori.

Lema 1 urmărește aceste obiective, ca și lema 2, care pare evidentă cînd se cunoaște a priori configurația formată de un triunghi, bisectoarele sale interioare și exterioare acestuia cu scopul de a pune în evidență un exemplu remarcabil de triunghiuri circumscrise.

Tot pentru a ilustra definiția 1 și lema 1 sînt propuse cele două probleme. Prima pune în evidență faptul că analiza condițiilor în care se rezolvă unele probleme poate conduce la stabilirea unor teoreme de existență și unicitate. Aceasta demonstrează calitatea unor probleme de a conduce la rezultate teoretice calitative, deci de a fi o sursă de astfel de rezultate care depășesc cadrul inițial al problemelor respective. Tot ca sursă a unor rezultate calitative se prezintă și problema 2 care arată că, împotriva unei intuiții grăbite, ordonarea laturilor pătratelor înscrise într-un triunghi ascuțitunghic este inversă celei a mărimilor laturilor acestuia.

Prin aceasta apar mai reliefate aspectele metodologice ale acestui articol.

ÎN SPRIJINUL CANDIDAȚILOR LA EXAMENELE DE ADMITERE

ASUPRA UNEI FAMILII DE LOCURI GEOMETRICE

de Virgil Brișcă, analist C.C.L.A., București

În lucrare se prezintă detaliat o familie de locuri geometrice generată de o relație cu mai mulți parametri, se rezolvă o aplicație și se propune o generalizare.

Cu excepția tratării analitice, lucrarea nu necesită decît cunoștințe elementare de algebră, geometrie și trigonometrie.

Punerea problemei. Fie date B și C două puncte în plan fixe și distincte. Locul geometric al punctelor A din plan satisfăcînd relația

$$p \cdot AB^2 + q \cdot AC^2 = k^2, \qquad (1)$$

unde k, p și q sînt numere reale date se va nota $L(k, p, q)$.

Dacă la o anumită alegere a numerelor k, p și q, de exemplu (k_0, p_0, q_0), nu există nici un punct A care să satisfacă relația (1), atunci $L(k_0, p_0, q_0)$ este mulțimea vidă, notată ca de obicei $\emptyset$.

Obiectul lucrării de față îl constituie familia locurilor geometrice $L(k, p, q)$ care se obține considerînd toate tripletele de numere reale (k, p, q).

Notații și relații ajutătoare. Vom nota cu a lungimea segmentului BC. Întrucît B și C sînt fixe și distincte, a reprezintă o constantă strict pozitivă.

Spre ușurința scrierii vom nota prin b și c lungimile segmentelor AC și AB, iar prin $C(O, r)$ cercul de centru O și rază r.

De asemenea, în măsura în care nu se pot ivi confuzii, în loc de $L(k, p, q)$ vom scrie simplu L.

Scanned with OKEN Scanner

Pentru ca $L \neq \emptyset$ trebuie ca triunghiul ABC să existe (eventual degenerat într-un segment cînd A se află pe dreapta BC) şi să satisfacă relaţia (1).

Teorema cosinusului dă egalitatea

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C, \text{ (aici } C = \sphericalangle BCA),$$

care combinată cu (1) conduce la

$$(p+q)b^2 - 2abp\cos C + pa^2 - k^2 = 0, \tag{2}$$

Pentru $p + q \neq 0$, relaţia (2) este o ecuaţie de gradul doi în b, care nu are soluţii reale în cazul discriminantului negativ, deci cînd $(p+q)(pa^2 - k^2) > a^2p^2\cos^2 C$ şi, cu atît mai mult, cînd $(p+q)(pa^2 - k^2) > a^2p^2$, inegalitate care se scrie $(p+q)k^2 < pqa^2$, (3).

Pentru $p + q = 0$, relaţia (2) se reduce la o ecuaţie de gradul întîi în b care nu are soluţii cînd

$$p = 0 \text{ şi } k \neq 0, \tag{4}$$

Am pus astfel în evidenţă condiţia (3) pentru $p + q \neq 0$ şi condiţiile (4) pentru $p + q = 0$ care conduc în mod necesar la situaţia $L = \emptyset$.

Menţionăm, tot aici, că simetria relaţiei (1) în raport cu cuplurile (p, B) şi (q, C) ne va permite să dăm direct, prin analogie, anumite rezultate.

Descrierea locurilor geometrice. Vom distinge mai multe cazuri pentru studiu după relaţiile semnificative în care se pot găsi parametrii k, p şi q.

1. $k = 0$, avînd trei subcazuri, astfel:

1.1. $pq = 0$, la rîndul său cu trei situaţii:

1.1.1. $p = 0$ şi $q = 0$. Rezultă (1) identic satisfăcută pentru orice A din plan, deci $L(0, 0, 0) = R^2$.

1.1.2. $p = 0$ şi $q \neq 0$. Rezultă din (1) că $b = 0$, deci $A = C$. Locul este format din punctul C; scriem $L = C$.

1.1.3. $p \neq 0$ şi $q = 0$ este situaţia simetrică precedentei, deci $L = B$.

1.2. $pq > 0$. Împreună cu $k = 0$ se verifică (3), deci $L = \emptyset$.

1.3. $pq < 0$, deci $\frac{q}{p} < 0$. Notăm $\frac{q}{p} = -m^2$, cu $m > 0$. Relaţia (1) devine $c^2 - m^2b^2 = 0$ deci $(c - mb)(c + mb) = 0$. Cum $c + mb$ nu poate fi zero ($c + mb = 0$, $b \geqslant 0$ şi $c \geqslant 0$ conduc la $b = 0$ şi $c = 0$, care contrazic $b + c \geqslant a$), rămîne $c - mb = 0$. Împărţind această ultimă relaţie cu b (nu putem avea $b = 0$, căci din $c - mb = 0$ ar rezulta $c = 0$, contrazicînd $b + c \geqslant a$), obţinem $\frac{c}{b} = m$, (5), de unde apar trei situaţii:

1.3.1. $0 < m < 1$. Fie punctele M şi N coliniare cu B şi C în ordinea $M - B - N - C$ astfel încît $MB = \frac{m}{1-m}a$ şi $BN = \frac{m}{1+m}a$. Deducem

$$MC = \frac{1}{1-m}a, \; NC = \frac{1}{1+m}a, \; \frac{BN}{NC} = m \text{ şi } \frac{MB}{MC} = m.$$

Comparînd ultimile două egalităţi cu (5) avem $\frac{BN}{NC} = \frac{c}{b} = \frac{MB}{MC}$, deci AN şi AM sînt respectiv bisectoarele interioară şi exterioară pentru $\sphericalangle BAC$. Cum cele două bisectoare sînt perpendiculare una pe cealaltă, deducem că $\sphericalangle MAN$ este drept.

În concluzie, din A, segmentul fix MN se vede sub un unghi drept, deci $L = C(O, r)$, unde O este mijlocul segmentului MN iar r este jumătate din lungimea acestuia,

$$r = \frac{1}{2}(MB + BN) = \frac{m}{1-m^2}a.$$

Observăm că MB, MC şi r sînt cantităţi strict pozitive şi faptul că B este punct interior iar C punct exterior pentru orice $C(O, r)$.

1.3.2. $m > 1$. Caz simetric cu 1.3.1. Luăm punctele P şi Q coliniare cu B şi C în ordinea $B - P - C - Q$ astfel încît $BP = \frac{m}{m+1}a$ şi $CQ = \frac{1}{m-1}a$. Avem $L = C(O, r)$ în care O este mijlocul segmentului PQ iar $r = \frac{m}{m^2-1}a$.

Aici C va fi interior iar B exterior lui $C(O, r)$.

Scanned with OKEN Scanner

1.3.3. $m = 1$, deci $b = c$. Înseamnă că L este mediatoarea segmentului BC.

2. $k > 0$, cu subcazurile de mai jos:

2.1. $pq = 0$, existînd patru situații:

2.1.1. $p = 0$ și $q = 0$. Împreună cu $k > 0$ satisface (4), deci $L = \emptyset$.

2.1.2. $p = 0$ și $q > 0$. Din (1) rezultă $b = \frac{1}{\sqrt{q}}k$, deci

$L = C\left(C, \frac{1}{\sqrt{q}}k\right)$. Se evidențiază aici o primă subfamilie de cercuri concentrice.

2.1.3. $p > 0$ și $q = 0$. Situație simetrică precedentei, deci $L = C\left(B, \frac{1}{\sqrt{q}}k\right)$. Avem o altă subfamilie de cercuri concentrice.

2.1.4. $p + q < 0$. Împreună cu $pq = 0$ se verifică (3) deci $L = \emptyset$.

2.2. $pq > 0$, cu două posibilități:

2.2.1. $p < 0$ și $q < 0$, verificînd (3), dă $L = \emptyset$.

2.2.2. $p > 0$ și $q > 0$. Fie H proiecția lui A pe BC. Se va determina între B și C un punct T în mod convenabil, după cum urmează:

— aplicînd teorema lui *Pitagora* generalizată, avem:

$$AB^2 = AT^2 + BT^2 - 2BT \cdot HT \text{ și } AC^2 = AT^2 + TC^2 + 2TC \cdot HT.$$

— se adună membru cu membru prima relație înmulțită cu p cu a doua înmulțită cu q și ținînd cont de (1) se obține:

$$k^2 = (p + q)AT^2 + p \cdot BT^2 + q \cdot TC^2 - 2(p \cdot BT - q \cdot TC)HT, \tag{6}$$

— anulăm paranteza care înmulțește pe HT și ajungem la sistemul de două ecuații

$$p \cdot BT - q \cdot TC = 0 \text{ și } BT + TC = BC$$

cu soluțiile $BT = \frac{q}{p+q}a$ și $TC = \frac{p}{p+q}a$.

— acestea determină punctul T și înlocuite în (6) dau

$$AT^2 = \frac{1}{(p+q)^2}((p+q)k^2 - pqa^2).$$

Deci A se află la distanță constantă de T dată de relația

$$r = \frac{1}{p+q}\sqrt{(p+q)k^2 - pqa^2}, \tag{7}$$

Observînd cantitatea de sub radical deducem că dacă se verifică (3) ea este negativă, deci $L = \emptyset$.

Dacă $(p + q)k^2 = pqa^2$, locul se reduce la un punct, $L = T$, iar dacă $(p + q)k^2 > pqa^2$, avem $L = C(T, r)$.

Aici avem cazul particular în care $q = p$, cînd (1) devine $b^2 + c^2 = \frac{1}{p}k^2$ și locul este, după cum se știe, un cerc cu centrul la mijlocul lui BC, chiar acest mijloc, sau $\emptyset$, după cum $2k^2$ este mai mare, egal sau mai mic decît pa^2.

2.3. $pq < 0$, cu cinci posibilități:

2.3.1. $p < 0$, $q > 0$ și $p + q > 0$. Fie punctul V pe dreapta BC în ordinea $B-C-V$ astfel încît

$$CV = \frac{-p}{p+q}a \text{ și } BV = \frac{q}{p+q}a, \tag{8}$$

Aplicăm teorema lui *Stewart* în triunghiul ABV cu ceviana AC:

$$AB^2 \cdot CV + AV^2 \cdot BC = AC^2 \cdot BV + BC \cdot CV \cdot BV.$$

Înlocuind aici $BV = BC + CV$ și relațiile (8), ajungem la

$$AV^2 = \frac{1}{p+q}k^2 - \frac{pq}{(p+q)^2}a^2.$$

Scanned with OKEN Scanner

Concluzie: cînd (3) se verifică avem $L = \emptyset$; dacă $(p+q)k^2 = pqa^2$, avem $L = V$; iar dacă $(p+q)k^2 > pqa^2$, atunci $L = C(V, r)$ cu V fixat prin (8) și r dat de (7).

2.3.2. $p > 0$, $q < 0$ și $p + q > 0$. Situația este simetrică cu precedenta. Fie S un punct pe BC în ordinea $S - B - C$ astfel încît $SB = \dfrac{-q}{p+q}\, a$. Dacă (3) se verifică, atunci $L = \emptyset$, iar pentru $(p+q)k^2 = pqa^2$, avem $L = S$; pentru $(p+q)k^2 > pqa^2$, atunci $L = C(S, r)$ cu S dat mai sus iar r dat de (7).

2.3.3. $p < 0$, $q > 0$ și $p + q < 0$. Procedăm identic ca în situația precedentă și avem formal același rezultat numai că

$$r = \frac{1}{-p-q}\sqrt{(p+q)k^2 - pqa^2}, \tag{9}$$

2.3.4. $p > 0$, $q < 0$ și $p + q < 0$. Fie Q pe BC în ordinea $B - C - Q$ astfel ca $CQ = \dfrac{-p}{p+q}\, a$.

Dacă se verifică (3), atunci $L = \emptyset$; dacă $(p+q)k^2 = pqa^2$, avem $L = Q$; iar dacă $(p+q)k^2 > pqa^2$, atunci $L = C(Q, r)$, unde r e dat de (9).

2.3.5. $p + q = 0$, deci $q = -p$. Relația (1) devine $c^2 - b^2 = \dfrac{1}{p}k^2$, deci după un rezultat cunoscut, L este o dreaptă perpendiculară pe BC într-un punct H. Ne propunem să aflăm acest punct H.

Avem $BH + HC = BC$ și $BH^2 - HC^2 = \dfrac{1}{p}k^2$. De aici rezultă

$$BH = \frac{1}{2}\left(a + \frac{k^2}{pa}\right) \text{ și } HC = \frac{1}{2}\left(a - \frac{k^2}{pa}\right).$$

3. $k < 0$. Întrucît k intervine în (1) prin pătratul său pentru $k = s$ și pentru $k = -s$ se obține același loc geometric. Deci pentru $k < 0$ vom avea toate situațiile de la cazul $k > 0$.

Tratare analitică. Fie xOy un sistem de axe rectangulare astfel încît coordonatele punctelor A, B și C din enunțul problemei să fie respectiv (x, y), $\left(-\dfrac{a}{2}, 0\right)$ și $\left(\dfrac{a}{2}, 0\right)$.

Din (1) deducem

$$p\left(\left(x + \frac{a}{2}\right)^2 + y^2\right) + q\left(\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + y^2\right) = k^2, \tag{10}$$

care pentru $p + q = 0$, deci pentru $q = -p$ devine $2apx = k^2$. Avem cazurile:

1'. $p = 0$ și $k = 0$. Deducem $L = R^2$.

1''. $p = 0$ și $k \neq 0$. Deducem $L = \emptyset$.

1'''. $p \neq 0$. Deducem că L este $x = \dfrac{k^2}{2pa} \Rightarrow$ familie de drepte.

Pentru $p + q \neq 0$, din (10) obținem

$$\left(x - \frac{q-p}{2(p+q)}\, a\right)^2 + y^2 = \frac{1}{(p+q)^2}\left((p+q)\, k^2 - pqa^2\right).$$

Această ecuație, după cum expresia $(p+q)k^2 - pqa^2$ este mai mică, egală sau mai mare cu zero, conduce respectiv la cazurile:

2'. $L = \emptyset$

2''. $L = W$, unde W este punctul de coordonate $\left(\dfrac{q-p}{2(p+q)}\, a,\ 0\right)$.

2'''. $L = C(W, r)$ unde W este punctul definit anterior, iar

$$r = \frac{1}{|p+q|}\sqrt{(p+q)k^2 - pqa^2}.$$

E ușor de observat că atît tratarea sintetică cît și cea analitică a problemei noastre generează aceeași familie de locuri geometrice. Vom rezuma totul printr-o interpretare grafică.

Scanned with OKEN Scanner

Fie un sistem de axe rectangulare pOq.

Pentru $k = 0$, trasăm dreapta (d) de ecuație $p + q = 0$, cunoscută sub numele de bisectoarea a doua. Planul pOq este împărțit în mai multe regiuni distincte în care vom considera punctul Z de coordonate p și q, obținînd următoarele:

1°. Z în origine $\Rightarrow L = R^2$.

2°. Z pe întreaga axă Oq fără origine $\Rightarrow L = C$,

3°. Z pe întreaga axă Op fără origine $\Rightarrow L = B$.

4°. Z strict în cadranele I și III $\Rightarrow L = 0$.

5°. Z în cadranul II sub (d) și în cadranul IV deasupra lui $(d) \Rightarrow L$ se constituie într-o familie de cercuri cu B în interior și cu C în exterior.

6°. Z în cadranul II deasupra dreptei (d) și în cadranul IV sub $(d) \Rightarrow L$ se constituie într-o familie de cercuri cu C în interior și B în exterior.

7°. Z pe (d) mai puțin originea $\Rightarrow L$ este mediatoarea segmentului BC.

Pentru $k \neq 0$ trasăm în plus hiperbola de ecuație $q = \dfrac{pk^2}{pa^2 - k^2}$, care are dreptele $p = \dfrac{k^2}{a^2}$ și $q = \dfrac{k^2}{a^2}$ respectiv asimptotă verticală și asimptotă orizontală. În plus are $p+q=0$ tangentă în origine. Fie R_1 ramura hiperbolei care conține originea și R_2 cealaltă. Între ele avem regiunea din plan notată P_0 iar celelalte regiuni din plan adiacente lui R_1 și lui R_2 vor fi notate respectiv P_1 și P_2.

Reamintind că de acum considerăm $k \neq 0$, vom numerota în continuare situațiile:

8°. Z în origine $\Rightarrow L = 0$.

9°. Z pe semiaxa strict pozitivă $Oq \Rightarrow L$ se reunesc într-o familie de cercuri cu centrul în C.

10°. Z pe semiaxa strict pozitivă $Op \Rightarrow$ Rezultat analog, centrul în B.

11°. Z pe (d) fără origine $\Rightarrow L$ se constituie într-o familie de drepte perpendiculare pe dreapta BC.

12°. Z în reuniunea mulțimilor P_1 și $P_2 \Rightarrow L = 0$, deoarece în P_1 și P_2 avem $(p + q)k^2 < pqa^2$.

13°. Z pe $R_2 \Rightarrow L$ este de fiecare dată un punct între B și C.

14°. Z pe R_1, strict în cadranul II $\Rightarrow L$ generează o mulțime de puncte la dreapta lui C pe direcția BC.

15° Z pe R_1, strict în cadranul IV $\Rightarrow$ Rezultat analog precedentei, puncte la stînga lui B.

16°. Z în P_0 sub (d) în cadranul II și Z în P_0 deasupra lui (d) în cadranul IV $\Rightarrow L$ se constituie într-o familie de cercuri cu centrele la stînga lui B pe direcția BC.

17°. Z în P_0 sub (d) în cadranul IV și Z în P_0 deasupra lui (d) în cadranul II $\Rightarrow$ Rezultat analog precedentei, centrele sînt la dreapta lui C.

18°. Z în P_0 dar în primul cadran $\Rightarrow$ Rezultat analog, centrele cercurilor sînt între B și C.

Aplicație. Fie date cercurile $C_1(O_1, r_1)$ și $C_2(O_2, r_2)$ care se intersectează în punctele A și B, distincte. O secantă variabilă (s) care trece prin A întîlnește încă o dată pe C_1 în E și pe C_2 în F. Dîndu-se în continuare linia centrelor $O_1O_2 = a$ și două numere reale strict pozitive p și q, se cere:

1) poziția lui (s) astfel încît coardele EA și AF determinate de ea respectiv în C_1 și C_2 să satisfacă relația:

$$p \cdot EA = q \cdot AF; \tag{i}$$

2) locul geometric al punctelor M aflate pe segmentul EF astfel încît să fie îndeplinită relația:

$$p \cdot EM = q \cdot MF, \tag{ii}$$

pentru orice poziție a lui (s) trecînd prin A.

Soluție: Fie O un punct situat între O_1 și O_2 astfel încît $O_1O = \dfrac{q}{p+q}\, a$ și deci $OO_2 = \dfrac{p}{p+q}\, a$. Perpendiculara pe OA în punctul A intersectează pe C_1 în E și pe C_2 în F, obținîndu-se astfel secanta (s) căutată. Într-adevăr, perpendicularele din O_1 și O_2 pe EF au picioarele U și V chiar mijloacele coardelor EA și AF. Teorema lui *Thales* dă proporționalitatea $\dfrac{UA}{AV} = \dfrac{O_1O}{OO_2}$, deci $\dfrac{UA}{AV} = \dfrac{q}{p}$. De aici $p \cdot UA = q \cdot AV$ și înmulțind cu 2 aflăm relația (i).

Rezolvînd în această manieră primul punct al aplicației, constatăm că A face parte din locul geometric căutat.

Scanned with OKEN Scanner

Fie M un punct diferit de A îndeplinind (ii). Cum $MA \neq 0$, (ii) poate fi înlocuită cu relația echivalentă obținută prin înmulțirea cu MA:

$$p \cdot \overrightarrow{EM} \cdot MA = q \cdot \overrightarrow{MF} \cdot MA, \qquad \text{(iii)}$$

Excepțind $M = B$, care verifică evident această relație, există o situație în care M este interior lui C_1 și exterior lui C_2 și alta în care M este interior lui C_2 și exterior lui C_1. În ambele situații, înlocuind în (iii) puterea punctului M față de cele două cercuri se obține în final aceeași relație:

$$p(r_1^2 - MO_1^2) = q\,(MO_2^2 - r_2^2), \text{ deci } p \cdot MO_1^2 + q \cdot MO_2^2 = pr_1^2 + qr_2^2.$$

Observăm că este situația 2.2.2. din prima parte a lucrării unde $k^2 = pr_1^2 + qr_2^2$. Avem succesiv

$$(p+q)\,k^2 = (p+q)(pr_1^2 + qr_2^2) = (pr_1 - qr_2)^2 + pq(r_1 + r_2)^2 \geq pq(r_1 + r_2)^2 > pqa^2,$$

ultima inegalitate datorită faptului că în triunghiul AO_1O_2 avem $r_1 + r_2 > a$.

Deci locul este un cerc cu centrul în O și rază dată de (7). El trece prin punctele A și B.

Remarcăm că pentru $p = 1$ $q = 2$ regăsim în aplicație o problemă dată în acest an la examenul de admitere în Institutul Politehnic.

Adăugăm în fine, că pentru a reduce spațiul lucrării, am renunțat la trasarea figurilor, lăsînd aceasta ca exercițiu cititorului.

Dezvoltare. Propunem cititorului să facă un studiu asemănător următoarei generalizări pentru problema noastră în spațiul cu trei dimensiuni:

Fie date A_1, A_2 și A_3 puncte fixe și distincte în spațiu și numerele reale p_1, p_2, p_3 și k.

Notînd cu $L(k, p_1, p_2, p_3)$ locul geometric al punctelor M din spațiu care satisfac relația $p_1 \cdot MA_1^2 + p_2 \cdot MA_2^2 + p_3 \cdot MA_3^2 = k^2$, se cere să se studieze familia acestor locuri cînd se consideră toate sistemele de numere reale (k, p_1, p_2, p_3).

INEGALITĂȚI ÎN PATRULATER

de Ovidiu Pop, profesor, Satu Mare

Fie $ABCD$ un patrulater înscriptibil și circumscriptibil. Vom folosi următoarele notații: $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$, $DA = d$, $AC = f$, $BD = e$, $p = \dfrac{a+b+c+d}{2}$, O centrul cercului circumscris, I centrul cercului înscris, R raza cercului circumscris, r raza cercului înscris patrulaterului, $\sphericalangle BAD = A$, $\sphericalangle CBA = B$, $\sphericalangle DCB = C$, $\sphericalangle ADC = D$ și $OI = d$.

În acest articol vom demonstra următoarea inegalitate:

$$2\sqrt{2r(\sqrt{4R^2 + r^2} - r)} \leqslant p \leqslant \sqrt{4R^2 + r^2} + r. \qquad \text{(1)}$$

Fie $P \in AB$, $IP \perp AB$, $R \in DC$, $IR \perp DC$. Notăm $AI = x$. Deoarece patrulaterul $ABCD$ este circumscriptibil avem că $a + c = b + d$, de unde $p = a + c$, (2).

În triunghiul API avem

$$AP = \sqrt{x^2 - r^2}, \text{ (3) și } \operatorname{tg}\frac{A}{2} = \frac{r}{\sqrt{x^2 - r^2}}, \qquad \text{(4)},$$

și calculînd $\sin\dfrac{A}{2}$ și $\cos\dfrac{A}{2}$, obținem că

$$\sin A = \frac{2r\sqrt{x^2 - r^2}}{x^2}, \qquad \text{(5)}$$

Scanned with OKEN Scanner

Deoarece patrulaterul $ABCD$ este inscriptibil avem $C = \pi - A$. În triunghiul CIR avem $CR = r \operatorname{ctg}\frac{C}{2} = r \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{A}{2}\right)$ și ținînd seama de (4), obținem $CR = \frac{r^2}{\sqrt{x^2 - r^2}}$, (6).

Din triunghiul BIP avem $BP = r \operatorname{ctg}\frac{B}{2}$, (7).

Patrulaterul $ABCD$ fiind inscriptibil avem $D = \pi - B$. În triunghiul DIR avem

$$DR = r \operatorname{ctg}\frac{D}{2} = r \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{B}{2}\right), \text{ deci } DR = r \operatorname{tg}\frac{B}{2}, \quad (8).$$

Într-un patrulater inscriptibil și circumscriptibil ([2], pag. 253), avem identitatea

$$ef = 2r(r + \sqrt{4R^2 + r^2}), \quad (9)$$

Din teorema sinusurilor avem $\frac{e}{\sin A} = 2R$ și $\frac{f}{\sin B} = 2R$. Înmulțind cele două relații și ținînd seama de (5) și (9), obținem

$$\frac{2r}{\sin B} = \frac{8rR^2}{r + \sqrt{4R^2 + r^2}} \cdot \frac{\sqrt{x^2 - r^2}}{x^2}, \quad (10)$$

Din (2), (3), (6), (7) și (8) avem $p = a + c = AP + BP + CR + DR = \sqrt{x^2 - r^2} + \frac{r^2}{\sqrt{x^2 - r^2}} + r\left(\operatorname{tg}\frac{B}{2} + \operatorname{ctg}\frac{B}{2}\right) = \frac{x^2}{\sqrt{x^2 - r^2}} + \frac{2r}{\sin B}$ și ținînd seama de (10) unde am raționalizat, obținem

$$p = \frac{x^2}{\sqrt{x^2 - r^2}} + 2r\left(\sqrt{4R^2 + r^2} - r\right)\frac{\sqrt{x^2 - r^2}}{x^2}, \quad (11).$$

Folosind relația lui *J. Durrande* ([1], pag. 684), $d^2 = R^2 + r^2 - r\sqrt{4R^2 + r^2}$, avem $R^2 - d^2 = r(\sqrt{4R^2 + r^2} - r) = \frac{4rR^2}{\sqrt{4R^2 + r^2} + r}$, de unde $R > d$, (12).

În triunghiul AOI, ținînd seama de (12), avem

$$R - d \leqslant x \leqslant R + d, \quad (13).$$

Ținînd seama de (13), considerăm semiperimetrul p ca o funcție de x, $p : [R - d, R + d] \to \mathbf{R}$ dată de (11) și vom afla extremele acestei funcții. Avem $(\forall)\ x \in [R - d, R + d]$

$$p'(x) = \frac{x^2 - 2r^2}{x^3\sqrt{(x^2 - r^2)^3}} \cdot [x^4 - 2r\left(\sqrt{4R^2 + r^2} - r\right)x^2 + 2r^3(\sqrt{4R^2 + r^2} - r)]. \quad (14).$$

Se verifică imediat că

$$\sqrt{4R^2 + r^2} - r > 2d, \quad (15).$$

Calculînd discriminantul ecuației bipătrate din $p'(x) = 0$, avem $\Delta' = 4r^2d^2$ și ținînd seama de (15), rezultă că această ecuație are două rădăcini reale pozitive x_1, x_2:

$$x_1 = \sqrt{r\left(\sqrt{4R^2 + r^2} - r - 2d\right)}, \quad (16) \text{ și } x_2 = \sqrt{r\left(\sqrt{4R^2 + r^2} - r + 2d\right)}, \quad (17).$$

De asemenea p' mai are o rădăcină reală pozitivă $x_3 = r\sqrt{2}$, (18).

Arătăm că

$$R - d < x_1 \leqslant x_2 < R + d, \quad (19).$$

Vom folosi inegalitatea lui *L. Fejes Toth* ([3], pag. 148), $R \geqslant r\sqrt{2}$, (20), și o inegalitate care rezultă imediat din aceasta, $R > r$, (21).

Scanned with OKEN Scanner

Verificăm că $R - d < x_1$; Ținînd seama de (12), avem $2R^2 + r^2 - r\sqrt{4R^2 + r^2} - 2Rd < r\sqrt{4R^2 + r^2} - r^2 - 2rd$, echivalent cu $2d^2 < 2d(R - r)$. Ținînd seama de (21), avem echivalent cu $R^2 + r^2 - r\sqrt{4R^2 + r^2} < R^2 + r^2 - 2Rr$, echivalent cu $2R < \sqrt{4R^2 + r^2}$, care este o inegalitate adevărată.

Verificăm că $x_1 \leqslant x_3$: Avem $r(\sqrt{4R^2 + r^2} - r - 2d) \leqslant 2r^2$, echivalent cu $\sqrt{4R^2 + r^2} - 3r \leqslant 2d$. Ținînd seama de (20), rezultă că $\sqrt{4R^2 + r^2} \geqslant 3r$, deci avem $4R^2 + 10r^2 - 6r\sqrt{4R^2 + r^2} \leqslant 4R^2 + 4r^2 - 4r\sqrt{4R^2 + r^2}$, echivalent cu $3r \leqslant \sqrt{4R^2 + r^2}$, care este o inegalitate adevărată.

Arătăm că $x_3 \leqslant x_2$: Avem $2r^2 \leqslant r(\sqrt{4R^2 + r^2} - r + 2d)$, echivalent cu $0 \leqslant r(\sqrt{4R^2 + r^2} - 3r + 2d)$. Ținînd seama că $\sqrt{4R^2 + r^2} \geqslant 3r$, rezultă că inegalitatea este adevărată.

Verificăm că $x_2 < R + d$. Avem $r\sqrt{4R^2 + r^2} - r^2 + 2rd < 2R^2 + r^2 - r\sqrt{4R^2 + r^2} + 2Rd$, echivalent cu $0 < 2d^2 + 2d(R - r)$, care este o inegalitate adevărată ținînd seama de (21). Deci (19) are loc.

Ținînd seama că $(2R^2 - r\sqrt{4R^2 + r^2} - 2Rd)(2R^2 - r\sqrt{4R^2 + r^2} + 2Rd) = r^4$, avem

$$\frac{(R-d)^2}{\sqrt{(R-d)^2 - r^2}} = \frac{2R^2 + r^2 - r\sqrt{4R^2 + r^2} - 2Rd}{\sqrt{2R^2 - r\sqrt{4R^2 + r^2} - 2Rd}} =$$

$$= \frac{\sqrt{(2R^2 + r^2 - r\sqrt{4R^2 + r^2} - 2Rd)^2 (2R^2 - r\sqrt{4R^2 + r^2} + 2Rd)}}{r^2} =$$

$$= \frac{\sqrt{r^2(2R^2 + r^2 - r\sqrt{4R^2 + r^2} - 2Rd)(2R^2 + r^2 - r\sqrt{4R^2 + r^2} + 2Rd)}}{r^2} =$$

$$= \sqrt{4R^2 + 2r^2 - 2r\sqrt{4R^2 + r^2}} = \sqrt{(\sqrt{4R^2 + r^2} - r)^2} = \sqrt{4R^2 + r^2} - r.$$

Ținînd seama de acest calcul, înlocuind pe x cu $R - d$ în (11), avem

$$p(R-d) = \sqrt{4R^2 + r^2} - r + 2r(\sqrt{4R^2 + r^2} - r) \cdot \frac{1}{\sqrt{4R^2 + r^2} - r},$$

de unde

$$p(R-d) = \sqrt{4R^2 + r^2} + r, \quad (22).$$

Analog

$$p(R+d) = \sqrt{4R^2 + r^2} + r, \quad (23).$$

Ținînd seama că $(\sqrt{4R^2 + r^2} - 2r - 2d)(\sqrt{4R^2 + r^2} - 2r + 2d) = r^2$, avem

$$\frac{x_1^2}{\sqrt{x_1^2 - r^2}} = \frac{r(\sqrt{4R^2 + r^2} - r - 2d)}{\sqrt{r(\sqrt{4R^2 + r^2} - 2r - 2d)}} = \frac{r\sqrt{(\sqrt{4R^2 + r^2} - r - 2d)^2 (\sqrt{4R^2 + r^2} - 2r + 2d)}}{r\sqrt{r}} =$$

$$= \frac{\sqrt{r(\sqrt{4R^2 + r^2} - r - 2d)(\sqrt{4R^2 + r^2} - r + 2d)}}{\sqrt{r}} = \sqrt{2r(\sqrt{4R^2 + r^2} - r)}.$$

Folosind acest calcul, înlocuind în (11) pe x cu x_1, avem

$$p(x_1) = \sqrt{2r(\sqrt{4R^2 + r^2} - r)} + 2r(\sqrt{4R^2 + r^2} - r) \cdot \frac{1}{\sqrt{2r(\sqrt{4R^2 + r^2} - r)}},$$

de unde

$$p(x_1) = 2\sqrt{2r(\sqrt{4R^2 + r^2} - r)}, \quad (24).$$

Analog

$$p(x_2) = 2\sqrt{2r(\sqrt{4R^2 + r^2} - r)}, \quad (25).$$

Scanned with OKEN Scanner

Avem, înlocuind în (11), $p(x_3) = p(r\sqrt{2}) = 2r + 2r(\sqrt{4R^2 + r^2} - r) \cdot \frac{1}{2r}$, de unde

$$p(x_3) = \sqrt{4R^2 + r^2} + r, \quad (26).$$

Din (14) și (19)—(26), avem următorul tabel de variație pentru funcția p:

x	$R - d$	x_1	x_3	x_2	$R + d$
p'	—	0	+	0	—	0	+
p	$\sqrt{4R^2+r^2}+r$	$\searrow 2\sqrt{2r(\sqrt{4R^2+r^2}+r)}$	$\nearrow \sqrt{4R^2+r^2}+r$	$\searrow 2\sqrt{2r(\sqrt{4R^2+r^2}-r)}$	$\nearrow \sqrt{4R^2+r^2}+r$

de unde rezultă (1). Egalitatea în (1) nu are loc numai pentru cazul cînd patrulaterul este pătrat, ci are loc și pentru alte patrulatere inscriptibile și circumscriptibile.

BIBLIOGRAFIE

[1] *Mihăileanu N.*, Istoria matematicii, vol. 2, Editura științifică și enciclopedică, București, 1981
[2] *Sima, P. D.* și *Alanasiu, Gh. I.*, Culegere de probleme de trigonometrie, Editura tehnică, București
[3] *Vodă, V. Gh.*, Vraja geometriei demodate, Editura Albatros, București, 1983

O DEMONSTRAȚIE SIMPLĂ A UNEI INEGALITĂȚI RELATVIE LA NUMĂRUL e

de Andrei Vernescu, profesor, București

Pentru stabilirea dublei inegalități

$$\frac{e}{2n+2} < e - \left(1+\frac{1}{n}\right)^n < \frac{e}{2n+1}, \quad (1)$$

ce precizează ordinul de convergență al șirului $(e_n)_n$, $e_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ către limita sa, numărul e, în [1], pag. 38 și 216 se utilizează o metodă destul de complicată și indirectă.

Ne propunem ca, utilizînd tot elemente de calcul diferențial (dar numai la nivelul clasei a XI-a) să prezentăm pentru (1) o demonstrație directă și unitară în raport cu cele două părți ale inegalității.

După descompunerea dublei inegalități (ca și în [1]) în două inegalități simple și separarea în fiecare din acestea a termenilor ce nu conțin numărul e, se obțin inegalitățile echivalente cu (1):

$$\begin{cases} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \left(1+\frac{1}{2n+1}\right) < e, & (2'), \text{ (pentru prima parte)} \\ \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \left(1+\frac{1}{2n}\right) > e, & (2''), \text{ (pentru a doua parte)} \end{cases} \quad (2)$$

pe care le vom demonstra.

Considerăm funcțiile derivabile $u, v: (0, \infty) \to \mathbf{R}$,

$$u(x) = \left(1+\frac{1}{x}\right)^x \left(1+\frac{1}{2x+1}\right) \text{ și } v(x) = \left(1+\frac{1}{x}\right)^x \left(1+\frac{1}{2x}\right), \ (\forall)\ x \in (0, \infty).$$

ce extind expresiile din (2) la valorile reale, pozitive, oarecari ale argumentului. Ideea demonstrației este de a dovedi și utiliza monotonia strictă a acestor funcții. În acest scop, vom lucra și cu funcția strict pozitivă și derivabilă $\varphi\colon (0,\infty)\to(0,\infty)$, $\varphi(x)=\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$, $(\forall)\, x\in(0,\infty)$, pentru care $\varphi'(x)=\varphi(x)\cdot\left[\ln(x+1)-\ln x-\frac{1}{x+1}\right]$, $(\forall)\, x\in(0,\infty)$. Totodată, vom mai utiliza inegalitatea cunoscută:

$$\frac{2}{2x+1}<\ln(x+1)-\ln x<\frac{1}{\sqrt{x(x+1)}},\quad (\forall)\, x>0, \tag{3}$$

demonstrabilă ușor cu ajutorul derivatelor (de ex. [2], pag. 273). Avem:

$$u'(x)=\varphi'(x)\frac{2x+2}{2x+1}-\varphi(x)\frac{2}{(2x+1)^2}=\varphi(x)\cdot u_1(x),\quad (\forall)\, x\in(0,\infty)$$

unde am notat:

$$u_1(x)=\left[\ln(x+1)-\ln x-\frac{1}{x+1}\right]\cdot\frac{2x+2}{2x+1}-\frac{2}{(2x+1)^2},\quad (\forall)\, x\in 0,\infty).$$

Aplicînd prima parte a inegalității (3) minorăm funcția u_1:

$$u_1(x)>\left(\frac{2}{2x+1}-\frac{1}{x+1}\right)\cdot\frac{2x+2}{2x+1}-\frac{2}{(2x+1)^2}=0,\quad (\forall)\, x\in(0,\infty),$$

deci $u'(x)>0$, $(\forall)\, x\in(0,\infty)$. Prin urmare, u este strict crescătoare, deci $u(n)<\lim_{x\to\infty}u(x)$, $(\forall)\, n\in\mathbf{N}^*$, adică (2').

Analog, pentru v avem:

$$v'(x)=\varphi'(x)\frac{2x+1}{2x}-\varphi(x)\frac{1}{2x^2}=\varphi(x)\cdot v_1(x),\quad (\forall)\, x\in(0,\infty),$$

unde am notat:

$$v_1(x)=\left[\ln(x+1)-\ln x-\frac{1}{x+1}\right]\frac{2x+1}{2x}-\frac{1}{2x^2},\quad (\forall)\, x\in(0,\infty).$$

Aplicînd partea a doua a inegalității (3), iar apoi inegalitatea dintre media geometrică și media aritmetică a numerelor $\frac{1}{x+1}$ și $\frac{1}{x}$, $(x>0)$, majorăm funcția v_1 astfel:

$$v_1(x)<\left(\frac{1}{\sqrt{x(x+1)}}-\frac{1}{x+1}\right)\cdot\frac{2x+1}{2x}-\frac{1}{2x^2}\left(\frac{2x+1}{2x(x+1)}-\frac{1}{x+1}\right)\frac{2x+1}{2x}=$$

$$=-\frac{1}{2x^2}=-\frac{1}{4x^2(x+1)}<0,\quad (\forall)\, x\in(0,\infty),$$

deci $v'(x)<0$, $(\forall)\, x\in(0,\infty)$. Prin urmare, v este strict descrescătoare, deci $v(n)>\lim_{x\to\infty}v(x)$, $(\forall)\, n\in\mathbf{N}^*$, adică (2'').

Bibliografie

[1] POLYA, G., SZEGÖ, G.: Theorems and problems in Analysis, Springer Verlag, Berlin — Heidelberg — New York, 1978.

[2] MITRINOVIC, D. S., VASIC, P. M.: Analytic Inequalities, Springer Verlag, Berlin — Heidelberg — New York, 1972.

Scanned with OKEN Scanner

SOLUȚIILE PROBLEMELOR DATE LA CONCURSUL DE MATEMATICA

CLASELE IV—VIII

ETAPA PE SECTOR, BUCUREȘTI, 1988

Prezentare de Alexandru Sotelecan, profesor, București

Clasa a IV-a

I. Calculați: a) $2 + 2 \times 2 + 2 : 2$;
b) $(100 : 10 - 10 : 10) : (10 - 1)$;
c) $2 - (12 + 1988) : 1000$.

Soluție: a) $2 + 2 \times 2 + 2 : 2 = 2 + 4 + 1 = 7$.
b) $(100 : 10 - 10 : 10) : (10 - 1) = (10 - 1) : 9 = 9 : 9 = 1$.
c) $2 - (12 + 1988) : 1000 = 2 - 2000 : 1000 = 2 - 2 = 0$.

II. O uzină a avut de executat, în anul 1987, o comandă de 3888 piese de același fel (același număr în fiecare lună). La începutul lunii iunie, muncitorii au hotărît să mărească producția astfel încît să predea comanda cu trei luni mai devreme. Cu cîte piese au trebuit să mărească producția lunară?

Soluție. Cîte piese aveau de executat în fiecare lună?

$$3888 : 12 = 324.$$

Cîte luni au lucrat cu această producție lunară?
5 luni (ianuarie, februarie, martie, aprilie, mai).
Cîte piese au executat în această perioadă?

$$324 \times 5 = 1620.$$

Cîte piese mai au de executat?

$$3888 - 1620 = 2268.$$

În cîte luni trebuie să le execute?

$$12 - 5 - 3 = 4.$$

Care trebuie să fie producția lunară în aceste luni?

$$2268 : 4 = 567.$$

Cu cît trebuie să mărească producția lunară?

$$567 - 324 = 243.$$

Răspuns: Producția lunară trebuie mărită cu 243 de piese.

III. La un concurs se acordă pentru premiul I 5 puncte, pentru al II-lea 3 puncte, iar pentru al III-lea 2 puncte. Aflați numărul de premii primite de elevii unei școli, știind că au obținut 25 puncte și cel puțin două premii din fiecare. Justificați.

Scanned with OKEN Scanner

Soluție. Dacă ar primi 2 premii I, două premii II și două premii III atunci ar avea $2 \times 5 + 2 \times 3 + 2 \times 2 = 20$ puncte. Diferența de 5 puncte, pînă la 25 arată că, sau au mai primit un premiu I, sau au mai primit un premiu II și un premiu III. Deci sînt 2 soluții:

3 premii I, 2 premii II și 2 premii III,

sau

2 premii I, 3 premii II și 3 premii III.

Clasa a V-a

I. Calculați: a) $(0 \cdot 1 + 2 \cdot 3 + 4 \cdot 5 + 6 \cdot 7 + 8 \cdot 9) : 10$;

b) $0^1 : 1^0 + 2^4 : 4^2 + 3^9 : 9^3 : 3^3 + 4^{16} : 16^4 : 4^4 : 2^2$;

Soluție: a) $(0 \cdot 1 + 2 \cdot 3 + 4 \cdot 5 + 6 \cdot 7 + 8 \cdot 9) : 10 = (0 + 6 + 20 + 42 + 72) : 10 = 14$.

b) $0^1 : 1^0 + 2^4 : 4^2 + 3^9 : 9^3 : 3^3 + 4^{16} : 16^4 : 4^4 : 2^2 = 0 + 1 + 3^9 : 3^6 : 3^3 + 4^{16} : 16^4 : 4^4 : 2^2 = 1 + 1 + 4^4 : 4 = 1 + 1 + 4^3 = 1 + 1 + 64 = 66$.

II. Aflați numerele x și y știind că y este jumătate din x și că $3x + 6y = 1164$.

Soluție: Rezolvăm prin metoda figurativă. Reprezentăm printr-un segment numărul y (fig. 1).

Fig. 1

Se vede că $12y$ este 1164, deci $y = 1164 : 12 = 97$. Cum x este de două ori mai mare rezultă $x = 194$. Numerele sînt 194 și 97.

III. Suma a trei numere naturale este 100. Se împarte primul număr la al doilea și se obține cîtul 1 și un rest egal cu numărul al treilea. Aflați numerele știind că al doilea este cu 10 mai mare decît al treilea.

Soluție. Dacă notăm numerele cu x, y, z avem $x + y + z = 100$ și, conform teoremei împărțirii cu rest, $x = y \cdot 1 + z = y + z$. Înlocuind în prima relație suma $y + z$ cu x obținem $x + x = 100$, adică $x = 50$. Rămîne să determinăm numerele y și z știind că suma lor $x = y + z$ este 50 și că y este cu 10 mai mare decît z (fig. 2).

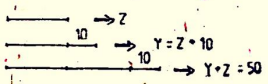


Fig. 2

Deci $2z = 50 - 10 = 40$ și $z = 20$, iar $y = 20 + 10 = 30$. Numerele sînt 20, 30, 50.

IV. Se dau numerele naturale consecutive a și b $(a > b)$.

a) Care este restul împărțirii lui a la b?

b) Dar restul împărțirii lui b la a?

(Încercați, eventual, pe un exemplu). Justificați toate răspunsurile.

Scanned with OKEN Scanner

Soluție. a) Dacă a și b sînt numere consecutive, $a > b$, atunci $a = b + 1$. Scriind $a = b \cdot 1 + 1$ din teorema împărțirii cu rest rezultă că restul împărțirii lui a la b este 1.

b) Pentru a găsi restul împărțirii lui b la a scriem $b = a \cdot 0 + b$, deci restul este b.

Clasa a VI-a

I. a) Împărțiți numărul 1988 în părți direct proporționale cu numerele 0,1 ; 0,2 și 0,4.

b) Aflați cel mai mare număr natural care dacă îl împărțim la un număr de două cifre să obținem un cît egal cu împărțitorul.

Soluție. a) Notăm cele trei părți cu x, y și z. Din șirul de rapoarte

$$\frac{x}{0,1} = \frac{y}{0,2} = \frac{z}{0,4} = \frac{x+y+z}{0,7} = \frac{1988}{0,7}$$

obținem $x = 284$, $y = 568$, $z = 1136$.

b) Cel mai mare număr natural din două cifre este 99, deci împărțitorul și cîtul vor fi 99. Deoarece restul este mai mic decît împărțitorul, cel mai mare rest care se poate obține la împărțirea cu 99 este 98. Conform teoremei împărțirii cu rest numărul căutat este $99 \cdot 99 + 98 = 9899$.

II. Un număr se mărește cu 25% din el. Cu cît la sută din numărul astfel obținut trebuie micșorat acesta (numărul obținut) pentru a obține numărul inițial?

Soluție. Notăm numărul cu x. Mărindu-l cu 25% din el obținem numărul $x + \frac{25}{100}x$. Din acest număr trebuie să scădem $\frac{p}{100}\left(x + \frac{25}{100}x\right)$ și să obținem x. Scriind $x + \frac{25}{100}x = \frac{125}{100}x$, putem găsi p din egalitatea $\frac{125}{100}x - \frac{p}{100}\left(\frac{125}{100}x\right) = x$. Numărul trebuie micșorat cu 20%.

III. Se dă segmentul (AB) de 80 cm și d mediatoarea lui.

a) Aflați distanța de la B la d;

b) Fie $C \in d$, $c \notin (AB)$. Considerăm o dreaptă prin C care intersectează segmentul (AB) în M astfel încît $AM = 60$ cm. Calculați distanța de la punctul M la dreapta d.

Soluție. a) Dreapta d este perpendiculară pe AB în mijlocul lui pe care îl notăm O. Distanța de la B la d este $BO = \frac{1}{2}AB = 40$ (cm).

b) Dreapta g ce trece prin C va intersecta segmentul (AB) între O și B. Cum $AM = 60$ și $AO = 40$ rezultă că $MO = 20$ (cm).

IV. Pe latura (BC) a triunghiului ABC avem punctele D și E în așa fel încît $(AD$ este bisectoarea unghiului $\widehat{BAE}$, iar $(AE$ este bisectoarea unghiului $\widehat{DAC}$. O dreaptă d este perpendiculară pe dreapta AD în punctul A. Calculați măsura unghiului $\widehat{BAC}$ în fiecare din următoarele cazuri:

a) măsura unghiului dintre d și dreata AB este de 70°;

b) măsura unghiului dintre d și dreapta AC este de 30°.

Scanned with OKEN Scanner

Soluție. a) Dacă a și b sînt numere consecutive, $a > b$, atunci $a = b + 1$. Scriind $a = b \cdot 1 + 1$ din teorema împărțirii cu rest rezultă că restul împărțirii lui a la b este 1.

b) Pentru a găsi restul împărțirii lui b la a scriem $b = a \cdot 0 + b$, deci restul este b.

Clasa a VI-a

I. a) Împărțiți numărul 1988 în părți direct proporționale cu numerele 0,1 ; 0,2 și 0,4.

b) Aflați cel mai mare număr natural care dacă îl împărțim la un număr de două cifre să obținem un cît egal cu împărțitorul.

Soluție. a) Notăm cele trei părți cu x, y și z. Din șirul de rapoarte

$$\frac{x}{0,1} = \frac{y}{0,2} = \frac{z}{0,4} = \frac{x+y+z}{0,7} = \frac{1988}{0,7}$$

obținem $x = 284$, $y = 568$, $z = 1136$.

b) Cel mai mare număr natural din două cifre este 99, deci împărțitorul și cîtul vor fi 99. Deoarece restul este mai mic decît împărțitorul, cel mai mare rest care se poate obține la împărțirea cu 99 este 98. Conform teoremei împărțirii cu rest numărul căutat este $99 \cdot 99 + 98 = 9899$.

II. Un număr se mărește cu 25% din el. Cu cît la sută din numărul astfel obținut trebuie micșorat acesta (numărul obținut) pentru a obține numărul inițial?

Soluție. Notăm numărul cu x. Mărindu-l cu 25% din el obținem numărul $x + \frac{25}{100}x$. Din acest număr trebuie să scădem $\frac{p}{100}\left(x + \frac{25}{100}x\right)$ și să obținem x. Scriind $x + \frac{25}{100}x = \frac{125}{100}x$, putem găsi p din egalitatea $\frac{125}{100}x - \frac{p}{100}\left(\frac{125}{100}x\right) = x$. Numărul trebuie micșorat cu 20%.

III. Se dă segmentul (AB) de 80 cm și d mediatoarea lui.

a) Aflați distanța de la B la d;

b) Fie $C \in d$, $c \notin (AB)$. Considerăm o dreaptă prin C care intersectează segmentul (AB) în M astfel încît $AM = 60$ cm. Calculați distanța de la punctul M la dreapta d.

Soluție. a) Dreapta d este perpendiculară pe AB în mijlocul lui pe care îl notăm O. Distanța de la B la d este $BO = \frac{1}{2}AB = 40$ (cm).

b) Dreapta g ce trece prin C va intersecta segmentul (AB) între O și B. Cum $AM = 60$ și $AO = 40$ rezultă că $MO = 20$ (cm).

IV. Pe latura (BC) a triunghiului ABC avem punctele D și E în așa fel încît $(AD$ este bisectoarea unghiului $\widehat{BAE}$, iar $(AE$ este bisectoarea unghiului $\widehat{DAC}$. O dreaptă d este perpendiculară pe dreapta AD în punctul A. Calculați măsura unghiului $\widehat{BAC}$ în fiecare din următoarele cazuri:

a) măsura unghiului dintre d și dreata AB este de 70°;

b) măsura unghiului dintre d și dreapta AC este de 30°.

Scanned with OKEN Scanner

Soluție. (AD este bisectoarea unghiului $\widehat{BAE}$, deci unghiurile $\widehat{BAD}$ și $\widehat{DAE}$ sînt congruente. Dar unghiul $\widehat{DAE}$ este congruent și cu unghiul $\widehat{EAC}$, deoarece (AE este bisectoarea unghiului $\widehat{DAC}$, deci unghiurile $\widehat{BAD}$, $\widehat{DAE}$ și $\widehat{EAC}$ sînt congruente. Notăm X și respectiv Y două puncte pe cele două semidrepte determinate de A pe dreapta d. Dreptele d și AD sînt perpendiculare și deci unghiurile $\widehat{XAD}$ și $\widehat{YAD}$ au măsurile de 90°.

a) Unghiul $\widehat{XAB}$ are 70°, unghiul $\widehat{BAD}$ are 20° și fiind congruent cu $\widehat{DAE}$ și $\widehat{EAC}$ măsura unghiului $\widehat{BAC}$ va fi 60°.

b) Unghiul $\widehat{YAC}$ are măsura de 30°, unghiul $\widehat{CAD}$ este complementul său și are 60°. Fiecare din unghiurile $\widehat{BAD}$, $\widehat{DAE}$ și $\widehat{EAC}$ vor avea cîte 30° și măsura unghiului $\widehat{BAC}$ va fi 90°.

Clasa a VII-a

I. Calculați: a) $(\sqrt{5}+2)(\sqrt{5}-2)+(\sqrt{6}+2)(\sqrt{6}-2)$;

b) $\sqrt{3}+\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\sqrt{6}-\left(\frac{1}{\sqrt{8}}-\frac{1}{\sqrt{12}}\right)4\sqrt{6}-3\sqrt{2}$.

Soluție. a) $(\sqrt{5}+2)(\sqrt{5}-2)+(\sqrt{6}+2)(\sqrt{6}-2)=5+2\sqrt{5}-2\sqrt{5}-4+6+2\sqrt{6}-2\sqrt{6}-4=3$.

b) $\sqrt{3}+\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{6}}\cdot\sqrt{6}-\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{24}}\cdot 4\sqrt{6}-3\sqrt{2}=\sqrt{3}+\sqrt{3}+\sqrt{2}-\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{2\sqrt{6}}\cdot 4\sqrt{6}-3\sqrt{2}=2\sqrt{3}-2\sqrt{2}-2\sqrt{3}+2\sqrt{2}=0$.

II. a) Găsiți cifra x astfel încît numărul $\frac{1}{0,(x)}+\frac{1}{0,0(0x)}$ să fie natural.

b) Aflați numărul natural $\overline{abcd}$, cu cifre distincte, pătrat perfect știind că numărul $\overline{cd}$ este un pătrat perfect și că $a=b+c+d$.

Soluție. a) Scriind fracțiile zecimale de la numitor sub forma $0,(x)=\frac{x}{9}$ și respectiv $0,0(0x)=\frac{x}{990}$ numărul dat devine $\frac{9}{x}+\frac{990}{x}$, adică $\frac{999}{x}$. Acest număr este natural dacă x este divizor al numărului 999. Cum x este cifră, $x\in\{1, 3, 9\}$.

b) Numărul $\overline{cd}$ este pătrat perfect deci este unul din numerele 16, 25, 36, 49, 64, 81. În primul caz $c=1$, $d=6$, iar cum cifra a este dată de relația $a=b+c+d$ rezultă că b poate fi 0, 1, 2. Dacă $b=0$ atunci $a=7$ dar numărul 7016 nu este pătrat perfect; dacă $b=1$ atunci a va fi egal cu c și cifrele trebuie să fie distincte; dacă $b=2$ atunci $a=9$ și numărul $9216=96^2$ este o soluție. În al doilea caz $c=2$, $d=5$, deci b poate fi 0, 1

Scanned with OKEN Scanner

sau 2. Dacă $b = 0$ atunci $a = 7$ dar numărul 7025 nu este pătrat perfect; dacă $b = 1$ atunci $a = 8$ dar numărul 8125 nu este pătrat perfect; dacă $b = 2$ atunci $a = 9$ dar numărul 9036 nu este pătrat perfect. Cazurile $\overline{cd} = 49$ și $\overline{cd} = 64$ se exclud deoarece a este cifră. În ultimul caz $c = 8$, $d = 1$, b trebuie să fie 0 și $a = 9$, dar 9081 nu este pătrat perfect. Singura soluție este 9216.

III. Pe cercul de centru O punctele A și B sînt diametral opuse. Una din tangentele din B la cercul de centru O_1 tangent în interior cercului de centru O în A, are punctul de tangență cu acesta în C și intersectează cercul de centru O în D.

a) Este (AC bisectoarea unghiului $\widehat{DAO}$?

b) Dreapta AC mai intersectează cercul de centru O în E. Stabiliți dacă dreptele BD și OE sînt perpendiculare.

Soluție. a) În triunghiul isoscel AO_1C ($AO_1 \equiv O_1C$ raze) unghiurile $\widehat{O_1AC}$ și $\widehat{ACO_1}$ sînt congruente (fig. 3). Secanta AC determină pe paralelele AD și O_1C (ambele perpendiculare pe BC) unghiurile alterne interne congruente $\widehat{ACO_1}$ și $\widehat{CAD}$. Rezultă că unghiurile $\widehat{DAC}$ și $\widehat{CAO_1}$ sînt congruente, deci (AC este bisectoarea unghiului $\widehat{DAO}$.

b) Cum unghiurile $\widehat{DAE}$ și $\widehat{EAB}$ sînt congruente (punctul a)) rezultă că arcele $\overset{\frown}{DE}$ și $\overset{\frown}{EB}$ sînt congruente și deci că diametrul OE este perpendicular pe coarda BD.

IV. Pe catetele AB și AC ale triunghiului dreptunghic ABC se consideră, în exterior, pătratele $ABDE$ și $ACMN$.

a) Sînt punctele D, A, M coliniare?

b) Stabiliți dacă cercul de diametru (BC) intersectează dreapta DM într-un punct la egală distanță de dreptele DE și MN.

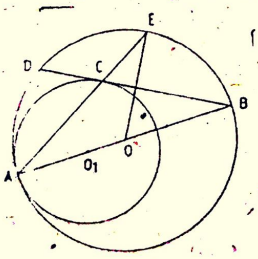


Fig. 3

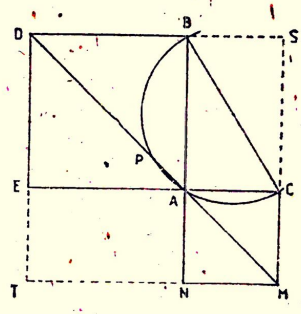


Fig. 4

Soluție. a) (AD) este diagonală în pătratul $ABDE$ și deci unghiul $\widehat{DAB}$ are măsura de 45° (fig. 4). (AM) este diagonală în pătratul $ACMN$ și deci unghiul $\widehat{MAC}$ are măsura de 45°. Măsura unghiului $\widehat{DAM}$ este

Scanned with OKEN Scanner

suma măsurilor unghiurilor $\widehat{DAB}$, $\widehat{BAC}$ și $\widehat{CAM}$. Unghiul $\widehat{DAM}$ are $45° + 90° + 45° = 180°$, deci punctele D, A, M sînt coliniare.

b) Cercul de diametru (BC) mai intersectează o dată dreapta DM în P. Fie $DB \cap OM = \{S\}$ și $DE \cap MN = \{T\}$. De la punctul a) rezultă măsura unghiului $\widehat{PAB}$ de 45°, măsura arcului $\widehat{PB}$ de 90° și deci măsura unghiului $\widehat{BSP}$ de 45°. Prin urmare (SP este bisectoarea unghiului $\widehat{DSM}$ dar $SDTM$ este pătrat, deci (PT este bisectoarea unghiului $\widehat{DTM}$ și P este egal depărtat de DE și MN.

Clasa a VIII-a

I. Se dă funcția $f:(-\infty; 0] \cup \{2\} \to \mathbf{R}$, $f(x) = x + 1$.

a) Reprezentați grafic funcția;

b) Rezolvați inecuația $\dfrac{f(x)}{x+2} \geqslant 0$.

Soluție. a) Tabelul de valori este:

x	$-\infty$	-1	0	1	2	$+\infty$
$f(x)$		0	1	///////	3	//////////

și graficul este dat în fig. 5.

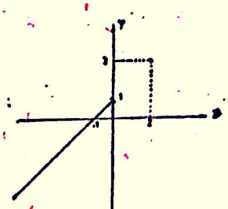


Fig. 5

b) Inecuația este $\dfrac{x+1}{x+2} \geqslant 0$, unde $x \in ((-\infty; 0] \cup \{2\}) \setminus \{-2\}$. Rezolvînd inecuația pentru x real se obține tabelul:

x	$-\infty$		-2		-1		$+\infty$
$x+1$		$-$		$-$	0	$+$	
$x+2$		$-$	0	$+$		$+$	
$\dfrac{x+1}{x+2}$		$+$	‖	$-$	0	$+$	

de unde $x \in (-\infty, -2) \cup [-1, +\infty)$. Intersectînd cu condiția inițială a inecuației rezultă soluția $x \in (-\infty, -2) \cup [-1, 0] \cup \{2\}$.

II. a) Stabiliți dacă polinomul $P(X) = X^3 + X^2 + X + 1$ este divizibil cu $Q(X) = X^3 - X^2 + X - 1$.

Scanned with OKEN Scanner

b) Un polinom $B(X)$ are gradul 100 și coeficienții numere întregi, toți diferiți între ei și cu modulele mai mici sau egale cu 50. Este $B(X)$ divizibil cu $X-1$?

Soluție. a) Polinomul $Q(X)$ este $X-1$. Polinomul $P(X)$ este divizibil cu $X-1$ dacă $P(1)=0$, dar $P(1)=1+1+1+1=4$, deci $P(X)$ nu este divizibil cu $Q(X)$.

b) Polinomul $B(X)$ având gradul 100 are 101 coeficienți. Numerele întregi cu modulul mai mic sau egal cu 50 sînt elementele mulțimii $\{-50; -49; -48; \ldots -1; 0; 1; 2; \ldots 49; 50\}$, mulțime care are exact 101 elemente. Cum toți coeficienții sînt diferiți între ei rezultă că acești coeficienți sînt exact elementele mulțimii de mai sus. Un polinom este divizibil cu $X-1$ dacă suma coeficienților săi este 0. Se vede că adunînd toate elementele mulțimii de mai sus suma este 0, deci polinomul $B(X)$ este divizibil cu $X-1$.

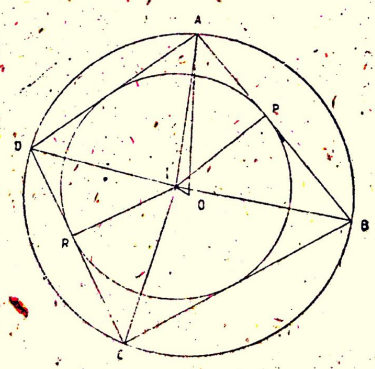
III. Trapezele $ABEF$ și $EFCD$ sînt în plane perpendiculare, au $AB=6$, $DC=2$, înălțimile egale cu 2 și $AB \parallel EF \parallel DC$. Calculați aria triunghiului ABC.

Soluție. Se observă că EF poate avea lungimea mai mică decît 2, între 2 și 6, sau mai mare ca 6. De asemenea, ipoteza $DC=2$ ajută doar la desen. Dreptele AB și CD sînt paralele, deci orice punct de pe CD este la aceeași distanță față de AB ca și C. Perpendiculara din C pe EF cade în M, iar perpendiculara din M pe AB în N. Avem $CM=MN=2$ și CN, distanța de la C la AB, egală cu $2\sqrt{2}$ (din triunghiul dreptunghic isoscel CMN). Aria triunghiului ABC este $\frac{1}{2} AB \cdot CN = 6\sqrt{2}$.

IV. Dreptele OA, OB, OC sînt perpendiculare două cîte două, iar G_1, G_2, G_3 sînt centrele de greutate ale triunghiurilor OBC, OAC și respectiv OAB.

a) Sînt planele $(G_1G_2G_3)$ și (ABC) paralele?

b) Calculați perimetrul triunghiului $G_1G_2G_3$ știind $OA=9$, $OB=12$ și $OC=16$.



Soluție. a) Notăm C_1 și respectiv C_2 mijloacele segmentelor OA și respectiv OB. Atunci CC_1 și CC_2 sînt mediane în triunghiurile AOC și BOC. Punctele G_1 și G_2 sînt pe CC_2 și respectiv CC_1 astfel încît $CG_2/G_2C_1 = CG_1/G_1C_2 = 2$. Din teorema lui *Thales* rezultă că G_1G_2 și C_1C_2 sînt pa-

Scanned with OKEN Scanner

ralele, dar C_1C_2 este linie mijlocie în triunghiul AOB, deci C_1C_2 și AB sînt paralele; prin urmare G_1G_2 și AB sînt paralele și rezultă că G_1G_2 este paralelă cu planul (ABC). Analog se arată că G_1G_3 (sau G_2G_3) este paralelă cu AC (respectiv BC) și deci G_1G_3 (sau G_2G_3) este paralelă cu planul (ABC). Rezultă că planele (ABC) și $(G_1G_2G_3)$ sînt paralele.

b) Aplicînd teorema lui *Pitagora* în triunghiurile AOB, BOC și COA obținem $AB = 15$, $BC = 20$ respectiv $AC = \sqrt{337}$. În triunghiul AOB, C_1C_2 este linie mijlocie și deci $C_1C_2 = \frac{1}{2} AB$. Aplicînd teorema fundamentală a asemănării în triunghiul C_1CC_2 obținem $G_1G_2 = \frac{2}{3} C_1C_2 = \frac{1}{3} AB$. Din relațiile analoage rezultă că perimetrul triunghiului $G_1G_2G_3$ este $G_1G_2 + G_2G_3 + G_3G_1 = \frac{1}{3}(AB + BC + CA)$, deci este $\frac{1}{3}(35 + \sqrt{337})$.

SOLUȚIILE PROBLEMELOR DATE LA CONCURSUL DE MATEMATICĂ, ETAPA LOCALĂ, 27 FEBRUARIE 1988, JUDEȚUL GIURGIU

prezentate de
Șerban Olteanu, profesor, Giurgiu și Mircea Trifu, inspector școlar, jud. Giurgiu

I. ENUNȚURI

Clasa a IX-a

1. Fie $a, b \in \mathbf{R}$ și $c \in \mathbf{R}_+$. Să se determine mulțimea $\{(x, y) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R} \mid |x - a| + |y - b| = c \Delta y = b + |x - a|\}$.

Liviu Pîrșan

2. Fie A o mulțime nevidă și funcțiile $f, g : A \to A$ astfel încît $f_3 = g_3$ și $f_{1988} = g_{1988}$ unde pentru orice $k \in \mathbf{N}^*$ am notat $f_k = \underbrace{f \circ f \circ \ldots \circ f}_{k \text{ ori}}$. Să se arate că dacă f este injectivă sau surjectivă atunci $f = g$.

D. M. Bătinețu-Giurgiu și *I. Savu*

3. În triunghiul ABC se consideră bisectoarele $[AD$, $[BE$, $[CF$ unde $D \in (BC)$, $E \in (CA)$ și $F \in (AB)$. Să se demonstreze că dacă pentru orice punct M din planul triunghiului (M diferit de D, E, F), paralelele din A, B, C respectiv la MD, ME și MF sînt concurente, atunci triunghiul este echilateral.

I. Cicu și *Mircea Trifu*

4. Fie A o mulțime cu 1988 elemente și funcția $f : A \to A$ astfel încît $f \circ f \circ f = 1_A$. Să se arate că mulțimea $\{x \in A \mid f(x) = x\}$ are cel puțin două elemente.

Șerban Olteanu

5. Pe laturile $[AB]$ și $[AC]$ ale triunghiului ABC se construiesc în exterior triunghiurile echilaterale ABD și ACE. Fie F un punct în plan astfel încît dreapta DE separă punctele B și F. Să se arate că următoarele afirmații sînt echivalente:

a) patrulaterul $BDFE$ este paralelogram;

b) triunghiul DCF este echilateral.

Florin Vulpescu-Jalea

Scanned with OKEN Scanner

Clasa a X-a

1. Dacă $a, b, c \in \mathbf{R}$ și $abc \in \mathbf{R}_+$, atunci:

$$2^{a+b+c} + 2^a + 2^b + 2^c \geq 2^{a+b} + 2^{b+c} + 2^{c+a} + 1.$$

Liviu Pîrșan

2. Să se determine $n \in \mathbf{N}$ astfel încît dacă x_1, x_2 sînt rădăcinile ecuației $x^2 + mx + m^2 = 0$, $m \in \mathbf{R}^*$ să avem egalitatea $(x_1 + x_2)^n = x_1^n + x_2^n$.

Ionel Tudor

3. În patrulaterul convex $ABCD$ se dă $AB + CD = a$, $BC + DA = b$ și $\sigma[ABCD] = \frac{1}{4} \cdot ab$. Să se calculeze lungimile diagonalelor patrulaterului.

Marcel Chirifă

4. Dacă $z_1, z_2, z_3 \in \mathbf{C}$ și $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$, atunci are loc egalitatea $(z_1z_2 + z_2z_3 + z_3z_1 + z_1 + z_2 + z_3)^2 = z_1z_2z_3(\bar{z}_1\bar{z}_2 + \bar{z}_2\bar{z}_3 + \bar{z}_3\bar{z}_1 + \bar{z}_1 + \bar{z}_2 + \bar{z}_3)^2$.

Mircea Trifu și Florin Vulpescu-Jalea

5. În triunghiul ABC se consideră $M \in \text{Int } ABC$ și se notează $s_1 = \sigma[MBC]$, $s_2 = \sigma[MCA]$ și $s_3 = \sigma[MAB]$. Să se arate că următoarele afirmații sînt echivalente:

a) $\frac{s_1}{a} = \frac{s_2}{b} = \frac{s_3}{c}$;

b) M este centrul cercului înscris în triunghiul ABC.

Cu a, b, c, am notat lungimile laturilor triunghiului ABC.

Marcel Țena

Clasa a XI-a

1. Să se calculeze:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\sqrt{C_n^2} + \sqrt{C_{n+1}^2} + \ldots + \sqrt{C_{2n}^2}}{n^3}.$$

Liviu Pîrșan

2. Dacă $n \in \mathbf{N}^* \setminus \{1\}$, să se determine matricea $X \in \mathcal{M}_2(\mathbf{C})$ astfel încît $X^n = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$.

I. Savu

3. Să se arate că șirul de numere reale $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$ care verifică relațiile $x_n \leq 2x_{n+1}$, $5x_{n+2} + 2x_n \leq 3x_{n+1}$, $(\forall) n \in \mathbf{N}$, este convergent și să se calculeze $\lim_{n \to \infty} x_n$.

D. M. Bătinețu-Giurgiu și Marcel Chirifă

4. Fie $A \in \mathcal{M}_2(\mathbf{C})$, $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ astfel încît $a \neq d$. Să se arate că $A^2B = BA^2$, $(\forall) B \in \mathcal{M}_2(\mathbf{C})$, dacă și numai dacă $a + d = 0$.

Mircea Trifu și Florin Vulpescu-Jalea

5. Fie triunghiul ABC și $D \in (BC)$, $E \in (CA)$, $F \in (AB)$. Să se demonstreze că dacă oricare ar fi punctul M din plan (M diferit de D, E, F), paralelele din A, B, C respectiv la MD, ME, MF sînt concurente, atunci punctele D, E, F sînt mijloacele laturilor triunghiului ABC.

D. M. Bătinețu-Giurgiu

Scanned with OKEN Scanner

Clasa a XII-a

1. Să se arate că pe orice mulțime finită se poate defini o structură de grup comutativ.

Silviu Slössel

2. Fie $(G, \cdot)$ un grup comutativ și $a \in G$. Dacă funcția $f: G \to G$ are proprietatea că $f(x) \cdot (f \circ f)(x) = a$, $(\forall) x \in G$, să se arate că f este injectivă dacă și numai dacă este surjectivă.

D. M. Bătinețu-Giurgiu

3. Să se calculeze: $\int \frac{x + \sin x - \cos x - 1}{x + e^x + \sin x}\, dx$.

N. Sîrbu și Silviu Slössel

4. Fie $(G, \cdot)$ un grup abelian, H un subgrup al său și $n \in \mathbf{N}^* \setminus \{1\}$.

Notăm $\sqrt[n]{H} = \{x \in G \mid x^n \in H\}$.

a) Să se demonstreze că $\sqrt[n]{H}$ este subgrup al lui G, care include subgrupul H.

b) Dacă $(G, \cdot) = (\mathbf{C}^*, \cdot)$ și $H = \mathbf{R}^*$, $n = 2$, să se determine subgrupul $\sqrt{\mathbf{R}^*}$.

Marcel Țena

5. Fie $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ o funcție care admite o primitivă $F: \mathbf{R} \to \mathbf{R}_+^*$. Să se arate că $(\forall) \varepsilon \in \mathbf{R}_+^*$, $\exists) x \in \mathbf{R}$ astfel încît $|f(x)| < \varepsilon$.

Șerban Olteanu

II. SOLUȚII

Clasa a IX-a

1. Deoarece $y = b + |x - a|$ rezultă $y - b = |x - a| \geqslant 0 \Rightarrow y - b = |y - b|$ și atunci din relația $|x - a| + |y - b| = c$ deducem $2|x - a| = c$ de unde $|x - a| = \frac{c}{2} \Rightarrow$ $\Rightarrow x - a = \pm \frac{c}{2} \Leftrightarrow x = a \pm \frac{c}{2}$. Rezultă că mulțimea cerută în enunț este $\left\{\left(a + \frac{c}{2}, b + \frac{c}{2}\right), \left(a - \frac{c}{2}, b + \frac{c}{2}\right)\right\}$.

2. $f_3 = g_3 \Rightarrow f_{3k} = g_{3k}$, $(\forall) k \in \mathbf{N}^*$. Avem de analizat cazurile:

i) f injectivă $\Rightarrow f = g$. Deoarece f este injectivă rezultă că f_k este injectivă oricare ar fi $k \in \mathbf{N}^*$ și în particular f_{3p} este injectivă oricare ar fi $p \in \mathbf{N}^*$. Mai departe avem: $f_{1988} = g_{1988} \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow f_{3 \cdot 662 + 2} = g_{3 \cdot 662 + 2} = f_{3 \cdot 662} \circ g_2 \Rightarrow f_{3 \cdot 662} \circ f_2 = f_{3 \cdot 662} \circ g_2$ de unde dacă ținem seama de injectivitatea funcției $f_{3 \cdot 662}$ deducem $f_2 = g_2$. Prin urmare avem f injectivă și $f_3 = g_3$, $f_2 = g_2$. Deci $f_3 = g_3 \Leftrightarrow f_2 \circ f = g_2 \circ g = f_2 \circ g$ de unde dacă ținem seama de injectivitatea funcției f_2 rezultă $f = g$.

ii) f surjectivă $\Rightarrow f = g$. Avem, $f_{1988} = g_{1988} \Leftrightarrow f_2 \circ f_{3 \cdot 662} = g_2 \circ g_{3 \cdot 662}$ de unde dacă ținem seama că $f_{2k} = g_{2k}$, $(\forall) k \in \mathbf{N}^*$, deducem că $f_2 \circ f_{3 \cdot 662} = g_2 \circ f_{3 \cdot 662} \Rightarrow f_2 = g_2$. Deci $f_3 = g_3$ și $f_2 = g_2$ de unde rezultă că $f_3 = f \circ f_2 = g_3 = g \circ g_2 = g \circ f_2 \Rightarrow f = g$.

3. Să considerăm în rolul punctului M, punctul A. În acest caz paralela din A la AD este chiar DA. Paralela din B la AE este paralela din B la AC, iar paralela din C la AF este paralela din C la AB. Conform enunțului aceste paralele sînt concurente în punctul A' de unde, dacă ținem seama de modul de construcție rezultă că patrulaterul $ABA'C$ este paralelogram și atunci diagonalele $[BC]$ și $[AA']$ se înjumătățesc. Deoarece $(BC) \cap (AA') = \{D\}$ deducem că D este mijlocul laturii $[BC]$ adică AD este mediană și bisectoare de unde rezultă că triunghiul ABC este isoscel cu $AB \equiv AC$. Analog considerînd punctul B în rolul punctului M deducem că $BA \equiv BC$. Deci $AB \equiv BC \equiv CA$ adică triunghiul ABC este echilateral.

4. Pentru orice $x \in A$ cu $f(x) \neq x$ vom nota $B_x = \{x, f(x), f_2(x) = (f \circ f)(x)\}$. Arătăm mai întîi că B_x are exact trei elemente. Într-adevăr, dacă $f_2(x) = x$ rezultă $f_3(x) = x \Rightarrow f(x)$ ceea ce este absurd. Dacă $f_2(x) = f(x)$ atunci $f_3(x) = f_4(x) = x$ de unde, dacă ținem seama de cele

Scanned with OKEN Scanner

de mai sus, rezultă că am ajuns la o contradicție. Mai departe arătăm că dacă $x, y \in A$ atunci $B_x \cap B_y \neq \emptyset \Rightarrow B_x = B_y$, adică pentru $(\forall)\ x, y \in A$ mulțimile B_x, B_y sau sînt disjuncte sau coincid. Într-adevăr, să presupunem că $B_x \cap B_y \neq \emptyset$. Este evident că dacă $x = y$ atunci $B_x = B_y$ de aceea vom considera $x \neq y$. Deoarece $B_x \cap B_y \neq \emptyset$, datorită simetriei vom avea de analizat situațiile:

i) $y = f(x) \Rightarrow f(y) = f_2(x) \Rightarrow f_2(y) = x$ și deci $B_x = B_y$.

ii) $y = f_2(x) \Rightarrow f(y) = f_3(x) = x \Rightarrow f_2(y) = f(x)$ adică $B_x = B_y$.

Cu aceasta am arătat că dacă $B_x \cap B_y \neq \emptyset$ atunci $B_x = B_y$.

Să presupunem deci că mulțimea $C = \{x \in A \mid f(x) = x\}$ nu are cel puțin două elemente, adică C are cel mult un element. Conform celor demonstrate mai sus avem $A = \left(\bigcup_{k=1}^{362} B_{x_k}\right) \cup \{u, v\}$ unde $x_i \neq x_j$, $(\forall) i, j = \overline{1,362}$, $i \neq j$ și unde $u, v \neq x_k$, $(\forall) k = \overline{1,362}$. Dacă $C \neq \{u, v\}$ rezultă că $B_u \subset A$ sau $B_v \subset A$ și evident $B_u, B_v \neq B_{x_k}$, $(\forall) k = \overline{1,362}$; rezultă atunci că mulțimea A, care include B_{x_k}, $(\forall) k = \overline{1,362}$ și $B_u \subset A$ sau $B_v \subset A$, are cel puțin $3 \cdot 663 = 1989$ elemente, ceea ce este absurd. Rezultă atunci că mulțimea C are cel puțin două elemente.

5. Se arată imediat că triunghiurile ADC și ABE sînt congruente de unde rezultă $(DC) \equiv (BE)$, (1). Fie $G = AB \cap EF$.

a)$\Rightarrow$b). Deoarece BD este paralelă cu EF rezultă că $m(\widehat{AGE}) = m(\widehat{ABD}) = 60$. Deoarece $\widehat{EAE}$ este unghi exterior triunghiului AEG, rezultă că $m(\widehat{BAE}) = m(\widehat{AGE}) + m(\widehat{AEG}) \Rightarrow$ $\Rightarrow m(\widehat{CEF}) = m(\widehat{CAD})$. Datorită faptului că $(EF) \equiv (BD)$ și $(EC) \equiv (AC)$ deducem că triunghiurile CEF și CAD sînt congruente de unde rezultă $(CF) \equiv (CD)$. Totodată $(BE) \equiv (DF)$. Din ultimile două congruențe și din (1) deducem $(DC) \equiv (CF) \equiv (DF)$ adică triunghiul DCF este echilateral.

b) $\Rightarrow$a). Fie H un punct în semiplanul delimitat de dreapta DE, semiplan care nu îl conține pe B, astfel încît $DBEH$ este paralelogram. Conform demonstrației a)$\Rightarrow$b) rezultă că triunghiul DCH este echilateral, deci $F = H$ și atunci patrulaterul $DBEF$ este paralelogram.

Clasa a X-a

1. Deoarece $abc \geqslant 0$ rezultă că avem de tratat cazurile:

i) $a, b, c \geqslant 0$. În acest caz $2^a, 2^b, 2^c \geqslant 1 \Rightarrow 2^a - 1, 2^b - 1, 2^c - 1 \geqslant 0 \Rightarrow (2^a - 1) \times (2^b - 1)(2^c - 1) \geqslant 0$ de unde prin înmulțire rezultă enunțul.

ii) Datorită simetriei vom considera numai cazul $a, b \leqslant 0$, $c \geqslant 0$. Avem: $2^a - 1, 2^b - 1 \leqslant 0$ și $2^c - 1 \geqslant 0$ de unde prin înmulțire deducem enunțul.

2. $x^2 + mx + m^2 = 0 \Rightarrow x \in \mathbf{C} - \mathbf{R}$ și $x^3 = m^3 \Rightarrow x \in \mathbf{C} - \mathbf{R}$ și $x = |m|\varepsilon$ unde $\varepsilon \in \mathbf{C} - \mathbf{R}$ și $\varepsilon^3 = 1$. Cu această relație din enunț devine:

$|m|^n(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)^n = |m|^n (\varepsilon_1^n + \varepsilon_2^n)$ de unde dacă ținem seama că $m \in \mathbf{R}^*$ deducem că $(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)^n = \varepsilon_1^n + \varepsilon_2^n$. Analizînd cazurile $n \in 6\mathbf{N} + k$, $k = \overline{0,5}$ deducem că enunțul este posibil numai dacă $a \in (6\mathbf{N} + 1) \cup (6\mathbf{N} + 5)$.

3. Notînd cu $s = \sigma[ABCD]$ deducem că

$$2s = AB \cdot BC \sin B + AD \cdot DC \sin D \leqslant AB \cdot BC + AD \cdot DC.$$

De asemenea avem

$$2s = AB \cdot AD \sin \widehat{BAD} + BC \cdot CD \sin \widehat{BCD} \leqslant AB \cdot AD + BC \cdot CD$$

și deci

$$4s \leqslant AB \cdot BC + BC \cdot CD + CD \cdot DA + DA \cdot AB = (AB + CD)(BC + AD) = ab.$$

Conform enunțului avem $4s = ab$ și am demonstrat că $4s \leqslant ab$ de unde deducem că $4s = ab$ fiindcă aceasta ne arată că în inegalitățile din care am obținut $4s \leqslant ab$ avem egalitate, de unde deducem că

$$\sin \widehat{ABC} = \sin \widehat{BCD} = \sin \widehat{CDA} = \sin \widehat{DAB} = 1$$

Scanned with OKEN Scanner

și de aici rezultă că patrulaterul $ABCD$ este dreptunghi. Prin urmare $AB = \frac{a}{2}$, $CD = \frac{b}{2}$ și atunci $BE = AC = \frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2}$.

4. Avem:

$$z_1\bar{z}_2 + z_2\bar{z}_3 + z_3\bar{z}_1 = z_1z_2z_3(z_1^{-1} + z_2^{-1} + z_3^{-1}) = z_1z_2z_3(\bar{z}_1 + \bar{z}_2 + \bar{z}_3) \text{ de unde rezultă}$$

$$z_1\bar{z}_2\overline{(z_1 + z_2 + z_3)} = z_1\bar{z}_2 + z_2\bar{z}_3 + z_3\bar{z}_1. \tag{1}$$

Analog deducem:

$$z_1 + z_2 + z_3 = z_1z_2z_3((z_1z_2)^{-1} + (z_2z_3)^{-1} + (z_3z_1)^{-1}) = z_1z_2z_3(\overline{z_1z_2} + \overline{z_2z_3} + \overline{z_3z_1}) =$$

$$= z_1z_2z_3\overline{(z_1\bar{z}_2 + z_2\bar{z}_3 + z_3\bar{z}_1)}. \tag{2}$$

Însumînd egalitățile (1) și (2) membru cu membru rezultă:

$$z_1\bar{z}_2 + z_2\bar{z}_3 + z_3\bar{z}_1 + z_1 + z_2 + z_3 = z_1z_2z_3\overline{(z_1\bar{z}_2 + z_2\bar{z}_3 + z_3\bar{z}_1 + z_1 + z_2 + z_3)}$$

de unde prin înmulțirea acestei egalități cu $z_1\bar{z}_2 + z_2\bar{z}_3 + z_3\bar{z}_1 + z_1 + z_2 + z_3$ obținem relația de demonstrat.

5. a) $\Rightarrow$ b). Fie d_a, d_b, d_c distanțele de la punctul M respectiv la BC, CA și AB. Rezultă atunci că $2s_1 = ad_a$, $2s_2 = bd_b$ și $2s_3 = cd_c$, de unde dacă ținem seama de condiția enunțului deducem $d_a = d_b = d_c$, adică M este centrul cercului înscris în triunghiul ABC.

b) $\Rightarrow$ c). Dacă M este centrul cercului înscris în triunghi atunci $d_a = d_b = d_c = r$, unde r este lungimea razei cercului înscris. Rezultă atunci că $2s_1 = ar$, $2s_2 = br$, $2s_3 = cr$, de unde rezultă cerința din enunț.

Clasa a XI-a

1. Aplicăm teorema *Cesaro-Stolz* pentru șirurile $u_n = \sum_{k=1}^{n}\sqrt{C_{n+k}^2}$ și $v_n = n^2$, $n \in \mathbf{N}^*$. Deoarece șirul $(v_n)_{n\geq 1}$ este strict monoton și nemărginit iar

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}-u_n}{v_{n+1}-v_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{C_{2n+1}^2} + \sqrt{C_{2n+2}^2} - \sqrt{C_n^2}}{(n+1)^2 - n^2} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{2n(2n+1)} + \sqrt{(2n+1)(2n+2)} - \sqrt{n(n-1)}}{(2n+1)\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{4}$$

rezultă că $\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n} = \frac{3\sqrt{2}}{4}$, adică limita cerută în enunț este $\frac{3\sqrt{2}}{4}$ și problema este complet rezolvată.

2. Se știe ([2] pag. 98, problema 25) că dacă $X = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbf{C})$, atunci $X^2 - (x+t)X + (xt - yz)I_2 = 0_2$, (1).

Fie deci $A \neq O_2$ cu $\det A = 0$ și ne propunem să rezolvăm ecuația $X^n = A$ unde $n \in \mathbf{N}^* \setminus \{1\}$. Din $X^n = A$ deducem $\det A = \det X^n = (\det X)^n = 0$ de unde rezultă $\det X = 0$. Conform cu (1), dacă ținem seama că $\det X = 0$, obținem că matricea X, verifică relația $X^2 - (x+t)X = O_2 \Leftrightarrow X^2 = uX$, unde $u = x + t$, (2), iar de aici prin inducție matematică deducem că

$$X^n = u^{n-1}X, \quad (\forall) n \in \mathbf{N}^* \setminus \{1\}, \tag{3}$$

Din (3) și $X^n = A$ deducem că $u^{n-1}X = A$. Din ultima relație rezultă $u \neq 0$ deoarece în caz contrar ar rezulta $A = O_2$ ceea ce contrazice ipoteza. Rezultă atunci că $X = u^{1-n}A$, (4). Avem deci că dacă $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ atunci $x = u^{1-n}a$, $t = u^{1-n}d$ de unde prin adunare rezultă că

Scanned with OKEN Scanner

$x + t = u = u^{1-n}(a + d) \Rightarrow u^n = a + d$ adică $u = \sqrt[n]{a+d}$. Este evident că nu putem avea $a + d = 0$ deoarece atunci ar rezulta $u = 0$ ceea ce nu este posibil. Deci matricele care verifică condiția $X^n = A$ sînt matricele $X_k = u_k^{1-n}A$ unde u_k, $k = \overline{0, n-1}$, sînt rădăcinile de ordinul n ale numărului complex nenul $a + d$. Acum este imediată soluția problemei propuse la concurs.

3. Dacă $x_n \leqslant 0$, $(\forall)\ n \in \mathbf{N}$, atunci avem $2x_{n+1} \leqslant x_{n+1}$, $(\forall)\ n \in \mathbf{N} \Rightarrow -2x_{n+1} \geqslant -x_{n+1}$, $(\forall)n \in \mathbf{N}$ și totodată $2x_{n+1} \geqslant x_n$, $(\forall)n \in \mathbf{N}$ de unde prin adunare deducem $0 \geqslant x_n - x_{n+1}$, $(\forall)n \in \mathbf{N} \Leftrightarrow x_{n+1} \geqslant x_n$, $(\forall)n \in \mathbf{N}$. Deci șirul $(x_n)_{n\in N}$ este crescător și mărginit superior de zero, adică este convergent.

Dacă ipoteza $x^n \leqslant 0$, $(\forall)n \in \mathbf{N}$, este falsă atunci există $m \in \mathbf{N}$ astfel încît $x_m > 0$ și atunci din $2x_{n+1} \geqslant x_n$, $(\forall)n \in \mathbf{N}$, rezultă $x_n > 0$, $(\forall)n \geqslant m$. Fără a restringe generalitatea vom presupune că $x_n > 0$, $(\forall)n \in \mathbf{N}$. Avem

$$5x_{n+2} + 2x_n \leqslant 3x_{n+1} < 5x_{n+1} < 5x_{n+1} + 2x_n,\ (\forall)n \in \mathbf{N} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_{n+2} < x_{n+1},\ (\forall)n \in \mathbf{N} \Leftrightarrow x_{n+1} < x_n,\ (\forall)n \in \mathbf{N}^*,$$

adică șirul $(x_n)_{n\in N^*}$ este strict descrescător și deci fiind mărginit inferior de zero rezultă că este convergent.

Prin urmare în ambele ipoteze șirul dat este convergent. Fie $x = \lim_{n\to\infty} x_n \in \mathbf{R}$. Conform relațiilor din enunț avem: $x \leqslant 2x$ și $5x + 2x \leqslant 3x \Rightarrow 0 \leqslant x$ și $x \leqslant 0$ de unde deducem că $x = 0$.

4. Vom nota $u = a+d$ și $v = bc - ad$. Ca și în problema 2 avem că matricea A verifică ecuația $X^2 - uX - vI_2 = O_2$, adică $A^2 = uA + vI_2$. Acum avem:

$$A^2B = BA^2,\ (\forall)B \in \mathcal{M}_2(\mathbf{C}) \Leftrightarrow (uA + vI_2)B = B(uA + vI_2),\ (\forall)B \in \mathcal{M}_2(\mathbf{C}) \Leftrightarrow uAB = uBA,$$

$$(\forall)B \in \mathcal{M}_2(\mathbf{C}) \Leftrightarrow u(AB - BA) = O_2,\ (\forall)B \in \mathcal{M}_2(\mathbf{C}) \Leftrightarrow u = 0 \text{ sau } AB = BA,\ (\forall)B \in \mathcal{M}_2(\mathbf{C}).$$

În ultima relație nu putem avea $AB = BA$, $(\forall)\ B \in \mathcal{M}_2(\mathbf{C})$ deoarece dacă presupunem $AB = BA$, $(\forall)B \in \mathcal{M}_2(\mathbf{C})$ rezultă $A = \omega I_2$ iar aceasta contrazice ipoteza că $a \neq d$. Rezultă atunci că $A^2B = BA^2$, $(\forall)B \in \mathcal{M}_2(\mathbf{C}) \Leftrightarrow u = 0 \Leftrightarrow a + d = 0$.

5. Să considerăm sistemul de coordonate xOy în care $A(0, h)$ cu $h > 0$, $B(b, 0)$, $C(c, 0)$ și deci $D(x_1, 0)$, $E(x_2, y_2)$ și $F(x_3, y_3)$. Avem de analizat două cazuri după cum urmează:

i) Triunghiul ABC nu este dreptunghic nici în B nici în C. Deoarece $D \in (BC)$, $E \in (AC)$ și $F \in (AB)$ rezultă că $cy_3 = -hx_3 + ch$, $by_3 = -hx_3 + bh$. Să considerăm în rolul punctului M pe A. Atunci paralela din A la AD este chiar $AD = d_A$, paralela din B la AE este paralela d_B din B la AC, iar paralela din C la AF este paralela d_C din C la AB. Conform enunțului avem $d_A \cap d_B \cap d_C \neq \emptyset$. Coeficienții unghiulari ai dreptelor AB și AC sînt respectiv $m_{AB} = -\frac{h}{b}$, $m_{AC} = -\frac{h}{c}$ și atunci avem:

$$d_A : \frac{y}{h} = \frac{x - x_1}{x_1} \Leftrightarrow hx - x_1y - x_1h = 0;\qquad d_B : y = -\frac{h}{b}(x - c) \Leftrightarrow hx + by - ch = 0;$$

$$d_C : y = -\frac{h}{c}(x - b) \Leftrightarrow hx + cy - bh = 0.$$

Deoarece $d_A \cap d_B \cap d_C \neq \emptyset$ rezultă că:

$$\begin{vmatrix} h & b & -ch \\ h & c & -bh \\ h & x_1 & -x_1h \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 1 & b & -c \\ 1 & c & -b \\ 1 & x_1 & -x_1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 1 & b & -c \\ 0 & c-b & c-b \\ 0 & x_1-c & b-x_1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (c - b)\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ x_1 - c & b - x_1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow (c - b)(b + c - 2x_1) = 0,$$

de unde, dacă ținem seama că $c \neq b$, rezultă că $x_1 = \dfrac{b+c}{2}$ și prin urmare D este mijlocul laturii $[BC]$.

ii) Unul din unghiurile $\hat{B}$ sau $\hat{C}$ este drept. Vom presupune că unghiul $\hat{C}$ este drept. Atunci luăm sistemul de coordonate având ca axă Ox pe BC iar ca axă Oy pe AC. Deci punctele date au coordonatele $A(0, h)$ cu $h > 0$, $B(b, 0)$ și $C(0, 0)$. În acest caz avem :

$$d_A : hx + x_1y - x_1h = 0; \quad d_B : x = b; \quad d_C : hx + by = 0$$

și deoarece $d_A \cap d_B \cap d_C \neq \emptyset$ rezultă că :

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -b \\ h & b & 0 \\ h & x_1 & -hx_1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow b^2h - 2bhx_1 = 0$$

de unde, dacă ținem seama că $h, b \neq 0$, deducem că $x = \dfrac{b}{2}$, adică D este mijlocul laturii $[BC]$.

Analog rezultă că punctele E și F sînt mijloacele laturilor $[AC]$ respectiv $[AB]$.

Observație. Prin particularizarea poziției punctului M se poate da și o soluție sintetică.

Clasa a XII-a

1. Fie $M = \{x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}\}$ o mulțime cu n elemente, $n \in \mathbf{N}^*$ și fie funcția $f : \mathbf{R}_n \to M$, $f(k) = x_k$, $(\forall) k \in \mathbf{R}_n$, care evident este bijectivă. Pe mulțimea M definim operația $*$: $M \times M \to M$, $x_i * x_j = x_{i \oplus j}$, $(\forall)(i, j) \in \mathbf{R}_n \times \mathbf{R}_n$. Este evident că mulțimea M este stabilă față de operația $*$.

$(\forall) x_i, x_j, x_k \in M$ avem $(x_i * x_j) * x_k = x_{i \oplus j} * x_k = x_{(i \oplus j) \oplus k} = x_{i \oplus (j \oplus k)} = x_i * x_{j \oplus k} = x_i * (x_j * x_k)$ ceea ce arată că operația este asociativă.

$(\forall) x_i \in M$ avem $x_i * x_0 = x_{i \oplus 0} = x_i = x_{0 \oplus i} = x_0 * x_i$ ceea ce arată că x_0 este elementul neutru al operației $*$.

Pentru orice $i \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$ notăm $x_i' = \begin{cases} x_i & \text{dacă } i = 0 \\ x_{n-i} & \text{dacă } i \neq 0 \end{cases}$ și atunci avem $x_i * x_i' = x_{i \oplus (n-i)} = x_0 = x_{(n-i) \oplus i} = x_i' * x_i$, $(\forall) i = \overline{1, n-1}$ și evident $x_0 * x_0 = x_0$ adică fiecare $x \in M$ este inversabil.

Cu aceasta am arătat că $(M, *)$ este grup. Să arătăm acum că acest grup este comutativ. Într-adevăr $(\forall) x_i, x_j \in M$ avem $x_i * x_j = x_{i \oplus j} = x_{j \oplus i} = x_j * x_i$ adică grupul $(M, *)$ este comutativ.

2. Dacă f este injectivă și $f(x) \cdot (f \circ f)(x) = a$, $(\forall) x \in G$ înlocuind x cu $f(x)$ în relația dată rezultă $(f \circ f)(x) \cdot (f \circ f \circ f)(x) = a$, $(\forall) x \in G$. Deci $f(x) \cdot (f \circ f)(x) = (f \circ f)(x) \cdot (f \circ f \circ f)(x) = a$, $(\forall) x \in G$ de unde dacă ținem seama că grupul $(G, \cdot)$ este comutativ rezultă $f(x) \cdot (f \circ f)(x) = (f \circ f \circ f)(x) \cdot (f \circ f)(x)$, $(\forall) x \in G$ și deci conform regulilor de simplificare dintr-un grup deducem că $f(x) = (f \circ f \circ f)(x) = f((f \circ f)(x))$ de unde dacă ținem seama de injectivitatea funcției f obținem că $(f \circ f)(x) = x$, $(\forall) x \in G$. Din $(f \circ f)(x) = x$, $(\forall) x \in G$ și $f(x) \cdot (f \circ f)(x) = a$, $(\forall) x \in G$ deducem că $f(x) \cdot x = a$, $(\forall) x \in G \Rightarrow f(x) = ax^{-1}$, $(\forall) x \in G$. Pentru orice $y \in G$ este evident că ecuația $y = f(x) = ax^{-1}$ admite ca soluție pe $x = y^{-1}a = cy^{-1}$ (deoarece grupul este comutativ). Deci dacă f este injectivă și verifică cerințele enunțului atunci este inversabilă și $f = f^{-1}$. Dacă f este surjectivă rezultă că $(\forall) x \in G$, $(\exists) t \in G$ astfel încît $x = f(t)$ și dacă ținem seama că $f(t) \cdot (f \circ f)(t) = a \Rightarrow x \cdot f(x) = a$ deducem $f(x) = x^{-1}a = ax^{-1}$ (deoarece grupul este comutativ). Deoarece $x \in G$ a fost arbitrar deducem că $f(x) = ax^{-1}$, $(\forall) x \in G$.

Scanned with OKEN Scanner

Dacă $f(x) = f(y)$ atunci $ax^{-1} = ay^{-1} \Rightarrow x^{-1} = y^{-1} \Rightarrow x = y$ adică f este injectivă. Prin urmare și în acest caz f este bijectivă și $f = f^{-1}$.

3. Fie $f : \mathbf{R}_+^* \to \mathbf{R}$, $f(x) = x + e^x + \sin x$ atunci $f'(x) = 1 + e^x + \cos x$ și deci $f(x) - f'(x) = x + \sin x - \cos x - 1$. Rezultă atunci că

$$\frac{x + \sin x - \cos x - 1}{x + e^x + \sin x} = \frac{f(x) - f'(x)}{f(x)} = 1 - \frac{f'(x)}{f(x)}$$

și de aici deducem că

$$\int \frac{x + \sin x - \cos x - 1}{x + e^x + \sin x}\,dx = x - \ln|f(x)| + C =$$

$$= x - \ln f(x) + C = x - \ln(x + e^x + \sin x) + C.$$

4. a) Fie $x, y \in \sqrt[n]{H}$ atunci $x^n, y^n \in H$ și deci $(xy)^n = x^n y^n \in H$ adică $xy \in \sqrt[n]{H}$. De asemenea $(\forall) x \in \sqrt[n]{H}$ avem $x^n \in H \Rightarrow (x^{-1})^n = (x^n)^{-1} \in H$ ceea ce înseamnă că $x^{-1} \in \sqrt[n]{H}$. Cu aceasta am demonstrat că $\sqrt[n]{H}$ este subgrup al lui G. Este evident că $(\forall) x \in H \Rightarrow x^n \in H \Rightarrow x \in \sqrt[n]{H} \Rightarrow H \subset \sqrt[n]{H}$.

b) Avem, $\sqrt{\mathbf{R}^*} = \{x \in \mathbf{C}^* \mid x^2 \in \mathbf{R}^*\}$. Dacă $x = a + bi$: $a, b \in \mathbf{R}$: $a^2 + b^2 \in \mathbf{R}_+^*$ atunci avem $x^2 = a^2 - b^2 + 2abi$ și deci $x^2 \in \mathbf{R}^*$ dacă și numai dacă $a = 0$ sau $b \neq 0$ (dar nu simultan). Prin urmare $x \in \sqrt{\mathbf{R}^*} \Leftrightarrow x = a$ cu $a \in \mathbf{R}^*$ sau $x = bi$ cu $b \in \mathbf{R}^*$. Rezultă atunci că $\sqrt{\mathbf{R}^*} = \mathbf{R}^* \cup i\mathbf{R}^*$.

5. Deoarece $f = F'$ rezultă că f are proprietatea lui *Darboux*. În particular dacă există $x_1, x_2 \in \mathbf{R}$, $x_1 < x_2$ cu $f(x_1)f(x_2) < 0$ atunci există $x \in (x_1, x_2)$ astfel încît $f(x) = 0$ și deci în acest caz concluzia problemei este evidentă.
Rămîn de studiat cazurile: $f(x) > 0$, $(\forall) x \in \mathbf{R}$ sau $f(x) < 0$, $(\forall) x \in \mathbf{R}$.

i) $f(x) > 0$, $(\forall) x \in \mathbf{R}$. În acest caz rezultă că F este strict crescătoare pe $\mathbf{R}$ și deoarece $F(x) \in \mathbf{R}_+^*$, $(\forall) x \in \mathbf{R}$ rezultă că există $\lim_{x \to -\infty} F(x) = \inf_{x \in \mathbf{R}} F(x) = a \in \mathbf{R}_+$. Pentru orice $\varepsilon \in \mathbf{R}_+^*$, $(\exists) \delta_\varepsilon > 0$ astfel încît $(\forall)\ x < -\delta_\varepsilon$ avem $a \leqslant F(x) \leqslant a + \frac{\varepsilon}{2}$. Pentru un astfel de x_0 fixat aplicînd teorema lui *Lagrange* funcției F pe intervalul $[x_0 - 1, x_0]$ rezultă că există $x \in (x_0 - 1, x_0)$ astfel încît $F(x_0) - F(x_0 - 1) = F'(x) = f(x)$ de unde obținem că pentru acest x avem $|f(x)| = |F(x_0) - F(x_0 - 1)| \leqslant |F(x_0) - a| + |F(x_0 - 1) - a| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$.

ii) În cazul $f(x) < 0$, $(\forall) x \in \mathbf{R}$ deducem că F este strict descrescătoare pe $\mathbf{R}$ și procedînd ca în cazul i) există $\lim_{x \to \infty} F(x) = \inf_{x \in \mathbf{R}} F(x) = b \geqslant 0$ și demonstrația decurge întocmai ca în cazul i). Cu aceasta problema este rezolvată.

Bibliografie

[1] *Bălineţu-Giurgiu D. M., Şiruri*, Editura Albatros, 1979.

[2] *Năstăsescu C., Niţă C.* și colectiv, *Exerciţii și probleme de algebră*, Editura Didactică și Pedagogică, 1981.

[3] *Pîrşan Liviu, Lazanu Cristina-Georgeta, Probleme de algebră și trigonometrie*, Editura Facla, 1983.

Scanned with OKEN Scanner

CONCURSUL INTERJUDEȚEAN DE MATEMATICĂ „GHEORGHE ȚIȚEICA"

FAZA FINALĂ, SLATINA, 15—16 mai 1987

Prezentare de Constantin P. Niculescu și George Vraciu

Proba pe echipe. Sîmbătă 16 mai 1987.

ENUNȚURI

Gimnaziu

19. *Fie* $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f(x+y)=f(x)+f(y)$, *oricare ar fi* $x, y\in\mathbf{R}$. *Să se arate că dacă mulțimea* $A=\{x\in\mathbf{R}\mid f(x)=x\}$, *are un număr finit de elemente atunci acest număr este impar.*

20. *Se consideră în plan cercurile* $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \ldots, \mathcal{C}_n (n\geq 5)$, *de raze egale și centre diferite două cîte două așa încît oricare patru dintre ele au un punct comun. Să se arate că cele n cercuri au un punct comun.*

21. *Fie ABCD un patrulater inscriptibil în planul P și O un punct exterior planului. Să se demonstreze că are loc relația:*

$$OA^2\cdot\sigma(BCD)+OC^2\cdot\sigma(ABD)=OB^2\cdot\sigma(ACD)+OD^2\cdot\sigma(CAB),$$

unde $\sigma(BCD)$ *reprezintă aria triunghiului BCD, etc.*

C.d.p. *Gh. Țițeica*, problema 948

Treapta I

22. i) *Să se arate că pentru orice* $n>1$ *există un polinom* $f\in\mathbf{C}[X]$ *de grad n astfel încît* $f(n)\in\mathbf{Z}$, $\forall n\in\mathbf{Z}$ *dar* $f\notin\mathbf{Z}[X]$.

ii) *Fie* $f\in\mathbf{C}[X]$. *Dacă grad* $f=n$, $n\in\mathbf{N}^*$ *și* $f(k)\in\mathbf{Z}$ *pentru orice* $k\in\{0,\ldots,n\}$ *atunci* $f(k)\in\mathbf{Z}$ *pentru orice* $k\in\mathbf{Z}$.

Alexandru Dincă

23. *Se dă un triunghi ABC având* $\widehat{BAC}>1$ dr. *Fie* $M\in(BC)$ *astfel încît* $AM^2=BM\cdot CM$.

i) *Să se arate că există două și numai două puncte* M_1 *și* $M_2\in(BC)$ *care au proprietatea din enunț și apoi să se arate că* $\widehat{BAM_1}=\widehat{CAM_2}$.

ii) *Fie D mijlocul lui (BC) și E piciorul înălțimii din A. Să se arate că* $M_1D\equiv M_2E$.

C.d.p. *Gh. Țițeica*, problema 620

24. *Să se arate că dacă într-un tetraedru [ABCD] ariile fețelor sînt egale, atunci fiecare muchie este congruentă cu muchia opusă.*

C. d. p. *Gh. Țițeica*, problema 947

Treapta a II-a

25. *Se dă* $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ *o funcție cu proprietatea că funcțiile* $f_1, f_2:\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)\to\mathbf{R}$, $f_1(x)=(x^3+x^2+x+1)f(\operatorname{tg}x)$, $f_2(x)=(x^6+1)f(\operatorname{tg}x)$, $(\forall)\ x\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$, *admit primitive pe* $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$. *Să se demonstreze că f are primitive pe* $\mathbf{R}$.

Mihai Piticari

Scanned with OKEN Scanner

26. *Dacă A, B, C sînt unghiurile unui triunghi neechilateral, ascuțitunghic atunci ecuația*

$$(2\cos A)^{2x} + (2\cos B)^{2x} + (2\cos C)^{2x} = 3$$

are o soluție unică în intervalul $(0,1)$.

27. *Dacă A, B, C sînt 3 matrici pătratice de ordin n ($n \geqslant 2$) cu elemente reale, ce comută două cîte două, atunci*

$$\det (A^2 + B^2 + C^2 - AB - BC - CA) \geqslant 0.$$

Dumitru Bușneag

Soluții și comentarii

O paranteză dreaptă cu 10 poziții în dreptul numărului unei probleme reprezintă distribuția notelor obținute de concurenți; pe poziția k se găsește numărul concurenților care au obținut nota k. Semnul ▣ semnifică sfîrșitul soluției unei probleme.

Gimnaziu

19. Avem $f(0) = f(0) + f(0) = 2f(0)$ și deci $f(0) = 0$. Dacă $x \in A$ tunci $f(2x) = f(x) + f(x) = 2x$, $f(3x) = f(2x) + f(x) = 3x$, etc. Deci A conține sau numai pe 0 (vezi cazul funcției $f(x) = ax$ cu $a \neq 1$) sau conține o infinitate de elemente. ▣

În legătură cu această problemă vezi și comentariul la problema 17 relativ la ecuația funcțională a lui *Cauchy*.

20. Conform ipotezei, cercurile de centre O_1, O_2, O_3 și O_4 au un punct comun, fie acesta A. Atunci $O_1, \ldots, O_4$ se află pe cercul $\mathcal{C}$ de centru A și rază r; cercul $\mathcal{C}$ se poate gîndi și ca cercul circumscris triunghiului $O_1O_2O_3$. Considerînd în loc de O_4 orice alt centru O_i cu $i \geqslant 4$ și raționînd-ca mai sus, deducem că și O_i se află pe cercul circumscris triunghiului $O_1O_2O_3$, deci pe $\mathcal{C}$. În consecință și cercul cu centrul în O_i și rază r trece prin A. ▣

Binecunoscuta problemă a piesei de 5 lei (datorată lui *Țițeica*) ne arată că afirmația din problema 20 nu mai este adevărată dacă se cere doar ca oricare trei cercuri să aibă un punct comun.

21. Notăm cu M intersecția diagonalelor patrulaterului $ABCD$. Din relația lui *Stewart* avem:

$$OA^2 \cdot MC + OC^2 \cdot MA - OM^2 \cdot AC = MA \cdot MC \cdot AC$$

$$OB^2 \cdot MD + OD^2 \cdot MB - OM^2 \cdot BD = MB \cdot MD \cdot BD.$$

Înmulțim prima relație cu BD iar a doua cu AC, apoi scădem egalitățile obținute, și ținînd seama că $MA \cdot MC = MB \cdot MD$ (puterea punctului M față de cercul circumscris patrulaterului $ABCD$) obținem:

$$OA^2 \cdot MC \cdot BD + OC^2 \cdot MA \cdot BD = OB^2 \cdot MD \cdot AC + OD^2 \cdot MB \cdot AC, \qquad (1).$$

Notăm cu A' și C' proiecțiile lui A și C pe BD iar cu B' și D' proiecțiile lui B și D pe AC.

Se constată cu ușurință că unghiurile $\widehat{A'AM}$, $\widehat{B'BM}$, $\widehat{C'CM}$ și $\widehat{D'DM}$ sînt congruente. Notăm măsura lor cu α și avem:

$$AM = AA'/\cos\alpha, \quad BM = BB'/\cos\alpha, \quad CM = CC'/\cos\alpha \text{ și } DM = DD'/\cos\alpha.$$

Relația (1) se scrie echivalent:

$$OA^2 \cdot \frac{CC' \cdot BD}{2} + OC^2 \cdot \frac{AA' \cdot BD}{2} = OB^2 \cdot \frac{DD' \cdot AC}{2} + OD^2 \cdot \frac{BB' \cdot AC}{2}$$

care este chiar concluzia problemei. ▣

Observație. Se poate demonstra enunțul mai general: Dacă $ABCD$ este un patrulater convex plan iar O un punct exterior planului, are loc relația:

$$OA^2 \cdot \sigma[BCD] + OC^2 \cdot \sigma[ABD] = OB^2 \cdot \sigma[ACD] + OD^2 \cdot \sigma[ABC] + \sigma[ABCD]\,(AM \cdot MC - BM \cdot MD).$$

Scanned with OKEN Scanner

22. [6, 2, 0, 1, 1, 0, 0, 1, 0, 0]

i) Putem considera spre exemplu polinomul

$$P_n(X) = \frac{X(X-1)\dots(X-n+1)}{n!}.$$

Coeficientul lui X^n fiind $1/n!$, atunci $P_n(X) \notin \mathbf{Z}[X]$. Pe de altă parte, $P_n(k) = 0$, dacă $k \in \{0, \dots, n-1\}$ și $P_n(k) = C_k^n$ dacă $k \geq n$. Dacă $k = -p$ cu $p \in \mathbf{N}$, atunci

$$P_n(k) = (-1)^n \cdot \frac{p(p+1)\dots(p+n-1)}{n!} = (-1)^n C_{p+n-1}^n.$$

ii) Orice polinom $P_n(X) \in \mathbf{Z}[X]$ de gradul n se poate pune sub forma

$$P_n(X) = a_0 + \frac{a_1}{1!}X + \frac{a_2}{2!}X(X-1) + \dots + \frac{a_n}{n!}X(X-1)\dots(X-n+1)$$

unde $a_0, \dots, a_n$ sînt numere complexe convenabil alese.

Într-adevăr $a_0 = P_n(0)$ și

$$a_k = P_n(k) - a_0 - C_k^1 \cdot a_1 - \dots - C_k^{k-1} a_{k-1} \text{ pentru } k \in \{1, \dots, n\}.$$

Se vede de aici că dacă $P_n(k) \in \mathbf{Z}$ pentru orice $k \in \{0, \dots n\}$ toți coeficienții a_k sînt întregi. Cu ceea ce s-a demonstrat la punctul i) rezultă în acest caz că $P_n(\mathbf{Z}) \subset \mathbf{Z}$. ■

23. [0, 0, 0, 0, 2, 0, 1, 3, 4, 1]

i) Fie M unul dintre punctele cu proprietatea $AM^2 = BM \cdot MC$ și fie N simetricul lui A față de M, deci $AM \cdot MN = BM \cdot MC$. Această relație se mai scrie $\frac{AM}{MB} = \frac{MC}{MN}$, de unde deducem că triunghiurile AMC și BMN sînt asemenea, deci $\widehat{BNA} \equiv \widehat{ACB}$. Aceasta dovedește că punctul N se află pe cercul circumscris triunghiului ABC.

Fie A' simetricul lui A față de BC. Din faptul că $\widehat{BAC}$ este obtuz rezultă $\widehat{BA'C}$ este obtuz deci A' este interior cercului. Paralela la BC dusă prin A' taie deci cercul în două puncte N_1 și N_2. Dreapta AN_i taie BC în $M_i (i \in \overline{1, 2})$. Din puterea punctului M_i avem $M_iN_i \cdot M_iA = M_iB \cdot M_iC$ adică $M_iA^2 = M_iB \cdot M_iC$, $i \in \overline{1, 2}$.

Din faptul că $N_1N_2 \parallel BC$ rezultă $\widehat{N_1B} \equiv \widehat{N_2C}$ deci $\widehat{BAM_1} \equiv \widehat{CAM_2}$.

ii) Fie P intersecția dreptelor AD și N_1N_2 iar Q proiecția lui D pe N_1N_2. În triunghiul $AA'P$, DQ este linie mijlocie deci $(QA') \equiv (QP)$. Pe de altă parte $(QN_1) \equiv (QN_2)$ și rezultă $(N_1A') \equiv (PN_2)$. Dar $M_1E = \frac{N_1A'}{2}$ iar $M_2D = \frac{PN_2}{2}$, deci $(M_1E) \equiv (M_2D)$, relație echivalentă cu concluzia.

24. [0, 1, 3, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 6]

Fie AA' și DD' înălțimile triunghiurilor ABC și DBC. Din egalitatea ariilor triunghiurilor ABC și DBC rezultă $AA' \equiv DD'$. Notăm cu M mijlocul lui AD și cu N mijlocul lui $A'D'$. Din congruența triunghiurilor $AA'N$ și $DD'N$ rezultă $AN \equiv ND$, deci în triunghiul isoscel AND mediana NM este și înălțime: $MN \perp AD$, (1).

Triunghiurile $AA'D'$ și $DD'A'$ sînt congruente deci $AD' \equiv DA'$; folosind această relație rezultă congruența triunghiurilor $AA'D$ și $DD'A$ deci și medianele $A'M$ și $D'M$ sînt congruente. În triunghiul isoscel $MA'D'$ mediana MN este și înălțime: $MN \perp BC$, (2).

Relațiile (1) și (2) arată că MN este perpendiculara comună a dreptelor AD și BC.

Dacă ducem în triunghiurile BAD și CAD înălțimile din B și respectiv C, repetînd raționamentul de mai sus rezultă că perpendiculara comună a dreptelor AD și BC trece prin mijlocul lui BC. Cum perpendiculara comună este unică, rezultă că N este mijlocul lui BC. Deci $A'B \equiv D'C$. Triunghiul ABA' este congruent cu CDC' de unde $AB \equiv CD$. ■

Analog se demonstrează celelalte două congruențe. ■

Tetraedrul care are toate fețele de arii egale se numește *tetraedru echifacial*. Fiecare dintre următoarele condiții este echivalentă cu aceea ca un tetraedru să fie echifacial:

— fiecare muchie este congruentă cu muchia opusă;

— toate fețele sînt triunghiuri congruente;

Scanned with OKEN Scanner

— centrele sferelor înscrisă și circumscrisă coincid;
— sumele unghiurilor plane de la fiecare vîrf al tetraedrului sînt aceleași;
— suma unghiurilor plane de la fiecare vîrf este egală cu 180°;
— desfășurarea tetraedrului este un triunghi ascuțitunghic în care sînt duse liniile mijlocii;
— toate fețele sînt triunghiuri ascuțitunghice cu cercurile circumscrise de aceeași rază;
— proiecțiile tetraedrului pe fiecare dintre cele trei plane paralele cu două muchii opuse sînt dreptunghiuri;

Detalii se află în „Probleme de matematică traduse din revista sovietică KVANT", problema M9, pag. 29.

Treapta a II-a

25. [0, 0, 0, 2, 0, 0, 4, 0, 1, 3]

Soluția de față utilizează numai ipoteza privitoare la f_2. Vom demonstra mai întîi două leme:

Lema 1. *Dacă f are primitive, iar g este derivabilă, cu derivată continuă, atunci fg admite primitive.*

Demonstrație. Fie F o primitivă a lui f. Funcția Fg' este continuă deci are o primitivă G. Atunci $(Fg - G)' = fg$. ■

Lema 2. *Dacă φ are primitive, iar ψ este de două ori derivabilă cu derivata a doua continuă și cu $\psi' \neq 0$ atunci $\varphi \circ \psi$ admite primitive.*

Demonstrație. Într-adevăr, funcția $\varphi(\psi(x))\psi'(x)$ admite o primitivă $\Phi(\psi(x))$ unde Φ este o primitivă a lui φ. Funcția $1/\psi'(x)$ este derivabilă cu derivata continuă. Aplicăm lema 1 pentru funcția $\varphi(\psi(x))\psi'(x)$ și funcția $1/\psi'(x)$. ■

Aplicînd lema 1 deducem că $f(\mathrm{tg}x)$ are primitive pe $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. Funcția $g(x) = \mathrm{arctg}x$ este de două ori derivabilă cu derivata a doua continuă și $g'(x) \neq 0$ pe $\mathbf{R}$. Conform lemei 2 și $f(x) = f(\mathrm{tg}(\mathrm{arctg}x))$ are primitive. ■

26. [0, 0, 0, 1, 1, 1, 0, 0, 5, 2]

Considerăm funcția continuă $f: (0,1] \to \mathbf{R}$ definită prin

$$f(x) = \left[\frac{(\cos A)^{2x} + (\cos B)^{2x} + (\cos C)^{2x}}{3}\right]^{1/x}$$

Ecuația din enunț se mai scrie $f(x) = 1/4$. Avem

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \sqrt[3]{(\cos A)^2 (\cos B)^2 (\cos C)^2}.$$

Pe de altă parte, în orice triunghi ABC (diferit de cel echilateral) are loc relația

$$\Sigma \cos^2 A = 1 - 2\cos A \cos B \cos C > 3/4.$$

Prin urmare $\lim_{x \to 0} f(x) < 1/4 < f(1)$ și conform proprietății lui *Darboux* există $\xi \in (0,1)$ cu $f(\xi) = 1/4$. Unicitatea lui ξ rezultă din faptul că f este strict crescătoare. ■

În concurs s-a cerut numai partea de existență, care necesită considerarea funcției mai simple $g(x) = (2\cos A)^x + (2\cos B)^x + (2\cos C)^x - 3$ și observația că $f(1/2) \leq 0$ în vreme ce $f(1) > 0$.

Condiția de existență a ecuației din enunț cere ca $\cos A \geq 0$ și $\cos B \geq 0$, $\cos C \geq 0$, deci ca $A, B, C \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Deci enunțul privește numai triunghiurile ascuțitunghice diferite de cele echilaterale.

27. [0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 9]

Din definiția determinanților rezultă că dacă $M = (x_{i,j})_{i,j} \in \mathcal{M}(n, \mathbf{C})$ și $\overline{M} = (\overline{x}_{i,j})_{i,j}$ atunci $\det \overline{M} = \overline{\det M}$. Fie $\omega = (-1 - i\sqrt{3})/2$; avem $\omega^3 = 1$ și $\overline{\omega} = \omega^2$. Deci:

$$\det(A^2 + B^2 + C^2 - AB - BC - CA) = \det(A + \omega B + \overline{\omega} C)(A + \overline{\omega} B + \omega C) =$$
$$= \det(A + \omega B + \overline{\omega} C) \cdot \det(A + \overline{\omega} B + \omega C) = |\det(A + \omega B + \overline{\omega} C)|^2 \geq 0. \blacksquare$$

Scanned with OKEN Scanner

CONCURSUL DE MATEMATICĂ, ETAPA JUDEȚEANĂ, 12 MARTIE 1988, LICEE

Clasa a IX-a

1. Să se determine $(x, y, z) \in \mathbf{Z}_+ \times \mathbf{Z}_+ \times \mathbf{Z}_+$, $0 < x \leqslant y \leqslant z$, care satisfac ecuația $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{4}{5}$.

* * *

2. Fie $a \in \mathbf{R}$, $a \neq 0$. Să se arate că există funcții bijective $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ astfel încît

$$a^2 f^2((a^2+1)x) - 2af(x^2 + a^2) + 1 \leqslant 0, \ (\forall)\ x \in \mathbf{R},$$

dacă și numai dacă $a \in \{-1, 1\}$.

I. Ionescu

3. În triunghiul ABC se consideră bisectoarele BB' și CC', $B' \in (AC)$ și $C' \in (AB)$. Fie B'' mijlocul segmentului $[BB']$ și C'' mijlocul segmentului $[CC']$. Să se arate că dreptele $C'B''$, $B'C''$ și BC sînt concurente dacă și numai dacă $m(\hat{A}) = 60°$.

L. Panaitopol

4. 1°. Să se demonstreze că dacă G este centrul de greutate al triunghiului ABC și M un punct în plan, atunci

$$MA^2 + MB^2 + MC^2 = 3MG^2 + GA^2 + GB^2 + GC^2.$$

2°. Să se deducă de aici că dacă triunghiul ABC este echilateral de latură 1, atunci $MA^2 + MB^2 + MC^2 \geqslant 1$.

* * *

Clasa a X-a

1. Să se determine $a \in \mathbf{R}$ astfel încît sistemul

$$\begin{cases} 2^x + 2^{-x} + y = a \\ x^3 + 2^y = 3 - a \end{cases}$$

să admită o singură soluție.

L. Panaitopol

2. Se consideră funcția $f: \mathbf{N}^* \setminus \mathbf{C}^* \to \mathbf{C}^*$, $f(n) = a_n$, care îndeplinește condițiile:

(1) $\frac{a_1}{a_2} = \frac{a_2}{a_3} = \frac{a_3}{a_4} = \frac{a_4}{a_5} = \dots$

(2) Există numere naturale $n > 2$, astfel încît

$$a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2 = (a_1 + a_2 + \dots + a_n)^2.$$

Să se arate că funcția f este periodică.

M. Becheanu

3. Fie $n > 2$ un număr natural și $z \in \mathbf{C} \setminus \{1\}$ astfel încît $z^n = 1$.

(1) Să se arate că $|1 - z| > \frac{2}{n-1}$.

(2) Să se arate că $(\forall) k \in \mathbf{Z}$, $k \not\equiv 0 \pmod n$, avem

$$\left|\sin \frac{k\pi}{n}\right| > \frac{1}{n-1}.$$

4. Se consideră pentagoanele convexe $ABCDE$ înscrise într-un cerc de rază 1, care au diagonalele $AG \perp BD$ perpendiculare. Să se determine valoarea maximă a ariilor acestor pentagoane.

* * *

Scanned with OKEN Scanner

Clasa a XI-a

1. Pentru ce numere naturale n există limita

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{1+x}+\sqrt[3]{1-x}-2}{x^n}\ ?$$

* * *

2. Considerăm şirul de numere reale $(x_n)_{n>0}$ definit astfel:

$$x_{n+1}=\sqrt{nx_n+1},\ (\forall)\ n\geq 0.$$

Să se arate că şirurile $(y_n)_{n\geq 1}$ şi $(z_n)_{n\geq 1}$ definite prin

$$y_n=\frac{x_n}{n}\ \text{şi}\ z_n=n-x_n,\ (\forall)\ n\in\mathbf{N}^*$$

sînt convergente şi să se afle limitele lor.

L. Panaitopol

3. Fie $A\in\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ o matrice cu proprietatea că pentru orice $t\in\mathbf{R}$ avem $\det(tA+I)=\det(A+tI)$, unde I este matricea-unitate. Să se arate că dacă n este par, atunci

$$\det(-tA+I)=\det(-A+tI)$$

$$\det(tA^2+I)=\det(A^2+tI),\ (\forall)\ t\in\mathbf{R}.$$

4. Fie un triunghi ABC. Să se afle locul geometric al punctelor M, interioare triunghiului, pentru care

$$d(M,\ BC)=d(M,\ AB)+d(M,\ AC).$$

* * *

Clasa a XII-a

1. Să se determine o primitivă a funcţiei

$$f:(0,1]\to\mathbf{R},\ f(x)=\ln(\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}).$$

2. Fie $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ o funcţie cu următoarea proprietate: „oricare ar fi funcţia continuă $g:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, funcţia $h=f+g$ are proprietatea lui *Darboux*". Rezultă în mod necesar că f este continuă?

L. Panaitopol

3. Fie $M=(1,\infty)$ şi o lege de compoziţie pe M, definită astfel:

$$x\circ y=xy+ax+by+c,\ \text{unde}\ a,\ b,\ c\in\mathbf{R}.$$

Să se determine a, b, c ştiind că $(M,\circ)$ este grup şi să se arate că $(M,\circ)$ este izomorf cu $(\mathbf{R},+)$.

L. Panaitopol

4. Fie G un subgrup nenul al grupului $(\mathbf{R},+)$ cu proprietatea că $G\cap(-a,a)$ este o mulţime finită, $(\forall)\ a\in\mathbf{R},\ a>0$. Să se arate că $(G,+)\simeq(\mathbf{R},+)$.

I. D. Ion

PROBLEME PENTRU CICLUL PRIMAR

33. Să se elimine trei cifre din numărul 3817945 astfel încît cu cifrele care rămîn (păstrîndu-se ordinea în care se găsesc) să se formeze cel mai mic număr natural).

Anemaria-Raluca Matiş, elevă, Negreşti-Oaş

Scanned with OKEN Scanner

34. O grădină în formă de dreptunghi plantată cu căpşuni are perimetrul 400m iar lungimea este cu 40m mai mare decît lăţimea. Să se determine cantitatea de căpşuni care se recoltează din grădină ştiind că de pe un ar de teren se recoltează 200 kg căpşuni.

Ioan Furcaş, Călineşti-Oaş

35. Ion, Petre şi Gheorghe au împreună o sumă cuprinsă între 192 lei şi 198 lei. Dacă Petre îi dă lui Ion 15 lei şi lui Gheorghe 8 lei, atunci ei au sume egale, reprezentate prin numere naturale. Ce sumă are fiecare?

Maria Floare Lazea, învăţătoare, Sudurău

36. Suma a 50 de numere naturale distincte este 2548. Arătaţi că printre ele se află cel puţin două numere naturale impare.

Maria Crainic, învăţătoare, Piru Nou

37. Mama, tata şi fiica au împreună 78 ani. Fiica împreună cu mama au 42 ani, iar fiica împreună cu tata au 48 ani. Aflaţi cîţi ani are fiecare.

Anda Andreica elevă, Negreşti-Oaş

38. La o staţie de benzină se află o cantitate de benzină. Într-o zi s-a vîndut 2/5 din toată cantitatea plus 500 l, ceea ce reprezintă jumătate din toată cantitatea de benzină. Care a fost cantitatea de benzină ce se afla la staţia de benzină?

Floare Maria Lazea, învăţătoare, Sudurău

39. Citul a două numere este 5 iar diferenţa lor este 600. Care sînt numerele?

* * *

40. Într-o şcoală sînt cel mult 200 pionieri. Împărţind aceşti pionieri pe rînd în grupe de 6 pionieri, 7 pionieri, 8 pionieri rămîne mereu o grupă incompletă de 5 pionieri. Cîţi pionieri sînt în şcoală?

* * *

41. Două caiete şi o gumă costă a lei iar două gume şi un caiet costă b lei. Cît costă o gumă şi cît costă un caiet?

* * *

42. Citul a două numere este 7 iar restul împărţirii lor este 70. Diferenţa numerelor este 670. Care sînt numerele?

* * *

43. Determinaţi numărul numerelor de două cifre care au suma dintre cifra unităţilor şi cifra zecilor egală cu dublul cifrei unităţilor.

Ion Z. Predescu, profesor, Rast, Dolj

44. Înlocuiţi literele cu cifre astfel încît adunarea

$$\begin{array}{r} \text{PATRU} + \\ \text{PATRU} \\ \hline \text{ŞAPTE} \end{array}$$

să fie corectă.

Gh. Vicol-Turcanu, învăţător

Scanned with OKEN Scanner

45. Începînd cu 1 martie un sportiv își propune să parcurgă zilnic, timp de mai multe luni un număr de km egal cu data fiecărei zile din calendar (pentru 1 martie 1 km, pentru 2 martie 2 km, etc.) Cîți km va avea parcurși sportivul după 32 de zile?

Gh. Vicol-Turcanu, învățător

46. M-am gîndit la un număr. La bublul acestuia am adăugat numărul, doimea sa și respectiv pătrimea sa și numărul 55, obținînd astfel numărul 6000. La ce număr m-am gîndit?

Georgeta Cojocaru și *Ion Cojocaru*, Mioveni, Argeș

47. Determinați numărul a din egalitatea:

$$(10^4 + 10 \cdot 10 \cdot 10 + 10^2 + 100 : 10 + 1) : a = 1.$$

Georgeta Cojocaru și *Ion Cojocaru*, Mioveni, Argeș

48. Irina a scos de la C.E.C. într-o zi suma de 140 lei, iar a doua zi a scos cu 30 lei mai puțin. Cîți lei i-au rămas Irinei la C.E.C. dacă a avut depusă suma de 890 lei?

Maria Comănescu, învățătoare, Ploiești

PROBLEME REZOLVATE PENTRU GIMNAZIU

Clasa a V-a

Problema E : 9131* (G.M.5/1987, pag. 192)

Să se împartă numărul 123 în cinci părți, astfel încît dacă adunăm 5 la prima parte, scădem 5 din partea a doua, înmulțim cu 5 partea a treia, împărțim la 5 partea a patra, obținem de fiecare dată partea a cincea.

Ștefan Sabău, profesor, Baia-Mare

Soluție. Notăm cu x partea a cincea, cu $x-5$ prima parte, cu $x+5$ a doua parte, cu $\frac{x}{5}$ partea a treia și cu $5x$ a patra parte. Atunci avem ecuația:

$$x - 5 + x + 5 + \frac{x}{5} + 5x + x = 123.$$

Înmulțim ambii membri cu 5. Deci:

$5x - 25 + 5x + 25 + x + 25x + 5x = 615$, de unde $41x = 615$, $x = 15$.

Prima parte este 10, a doua parte este 20, a treia parte este 3, a patra parte este 75 și respectiv partea a cincea este 15.

Soluție dată de: *Ioana Luputi*, *Raul Hăprian*, *Anca Morar*, elevi clasa a V-a, Lic. Filologie-istorie Satu Mare.

Scanned with OKEN Scanner

Problema E : 9133* (G.M.5/1987, pag. 192).

Să se arate că numărul : $A = 3^{40} - 2^{40}$ *se divide cu 5.*

Maria Minea, profesoară, Galați

Soluție. Avem $3^{40} = (3^4)^{10} = 81^{10}$ și $2^{40} = (2^4)^{10} = 16^{10}$. Rezultă că numărul 3^{40} are ultima cifră 1 iar 3^{40} are ultima cifră 6. Deci numărul $3^{40} - 2^{40}$ are ultima cifră 5 de unde rezultă că A se divide cu 5.

Soluție bună au dat: *Frățilă Ioan*, cl. a V-a, Șc. gen. 3 Vaslui; *Popovici Raluca*, cl. a V-a, Șc. gen. 1 Alba Iulia; *Cucu Cristina*, cl. a V-a, Șc. gen. 4 Bacău.

Problema E : 9155* (G.M. 6/1987, pag. 231)

Determinați cifrele a *și* c *astfel încît să avem egalitatea* :

$$\overline{accc} - \overline{ccca} = \overline{aaa}.$$

* * *

Soluție., Avem succesiv :

$$1000a + 100c + 10c + c - 1000c - 100c - 10c - a = 100a + 10a + a$$

sau $999(a - c) = 111a$ sau $9a - 9c = a$ de unde $8a = 9c$

și cum a și c sînt cifre avem $a = 9$ și $c = 8$.

Egalitatea din enunț devine : $9888 - 8889 = 999$ și se poate verifica.

Soluție bună au dat : *Gruseu Alina*, cl. a V-a, Șc. gen. Azuga; *Andronic Mihaela*, cl. a V-a, Șc. gen. 2 Bacău; *Cosma Cătălin*, cl. a V-a, Lic. ind. 8 Baia Mare.

Clasa a VI-a

Problema E : 9137* (G.M. 5/1987, pag. 193)

In triunghiul ABC *se consideră pe latura* AB *punctele* M, R *astfel încît* $AM \equiv MR \equiv RB$; *pe* BC *punctele* N, S *astfel încît* $BN \equiv NS \equiv SC$, *pe* CA *punctele* P, T *astfel încît* $CP \equiv PT \equiv TA$. *Să se arate că* $\Delta MNP \equiv \Delta STR$.

Adrian Tudorașcu, elev, Făurești, Vîlcea

Soluție. Din $\frac{CT}{TA} = \frac{CN}{NB} = \frac{2}{1}$, conform reciprocei teoremei lui *Thales*, rezultă că $TN \parallel AB$, (1), deci triunghiurile CNT și CAB sînt asemenea, deci $\frac{TN}{AB} = \frac{CT}{CA} = \frac{CN}{CB} = \frac{2}{3}$, de unde $TN = \frac{2}{3} AB$, (2).

Din $CP \equiv PT$ și $CS \equiv SN$ rezultă că PS este linie mijlocie în triunghiul CNT; deci $PS \parallel TN$, (3) și $PS = \frac{1}{2} TN$, (4).

Scanned with OKEN Scanner

Din (1) și (3) rezultă că $PS \parallel AB$, adică $PS \parallel MR$, (5). Din (2) și (4) obținem $PS = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} AB$, deci $PS = \frac{1}{3} AB$, prin urmare $PS \equiv MR$, (6). Din (5) și (6) deducem că $MPSR$ este un paralelogram, de unde $MP \equiv RS$.

Analog demonstrăm că $MN \equiv TS$ și $NP \equiv RT$, deci rezultă că $\Delta MNP \equiv \Delta STR$ (caz L.L.L.).

Soluție bună au dat: *Matei George*, cl. a VI-a, Șc. gen. 6 Curtea de Argeș; *Bolovan Călin*, cl. a VI-a, Lic., „S. Vulcan" Beiuș.

Problema E: 9140* (G.M. 5/1987, pag. 193)

Dacă avem relația $\frac{1}{ab} = \frac{1}{a+b}$, *atunci avem și relația* $\frac{1}{a} = \frac{b-1}{b}$.

Gh. Hulea, profesor, Bacău

Soluție. Avem succesiv:

$$\frac{1}{ab} = \frac{1}{a+b} \Rightarrow \frac{1}{a} = \frac{b}{a+b} = \frac{b-1}{a+b-a} = \frac{b-1}{b} \Rightarrow \frac{1}{a} = \frac{b-1}{b}.$$

Soluție bună au dat: *Ciupercă Florina*, cl. a VI-a, Șc. gen. 3 Alexandria; *Vîlcu Nicoleta*, cl. a VI-a, Șc. gen. 299 București.

Problema E: 9142* (G.M. 5/1987, pag. 194)

Pe latura BC a triunghiului ABC se consideră punctele E și F astfel încît

$$2\widehat{EAC} = \hat{C};\ BE \equiv FC;\ 2 \cdot \hat{B} = 3 \cdot \hat{C} \text{ și } 7 \cdot \hat{B} = 3 \cdot \hat{A}.$$

Să se arate că:

1) *triunghiurile ABE și ACF sînt isoscele.*

2) $\sphericalangle BAF \equiv \sphericalangle ACB$.

Artur Bălăucă, profesor, Botoșani

Soluție. 1) Notăm $\widehat{EAC} = \alpha$. Avem:

$$\hat{C} = 2\alpha;$$

$$2\hat{B} = 3\hat{C} \Rightarrow \hat{B} = \frac{3}{2}\hat{C} \Rightarrow \hat{B} = \frac{3}{2} \cdot 2\alpha \Rightarrow \hat{B} = 3\alpha;$$

$$7\hat{B} = 3\hat{A} \Rightarrow \hat{A} = \frac{7}{3}\hat{B} \Rightarrow \hat{A} = \frac{7}{3} \cdot 3\alpha \Rightarrow \hat{A} = 7\alpha.$$

Dar $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180°$, deci $7\alpha + 3\alpha + 2\alpha = 180°$ de unde $\alpha = 15°$, prin urmare: $\widehat{EAC} = 15°$, $\hat{A} = 105°$, $\hat{B} = 45°$, $\hat{C} = 30°$.

Scanned with OKEN Scanner

Din $\widehat{BAC} = 105°$ și $\widehat{EAC} = 15°$ rezultă că $\widehat{BAE} = 90°$. Triunghiul BAE este dreptunghic cu $\widehat{ABE} = 45°$, deci $\widehat{AEB} = 45°$, prin urmare triunghiul BAE este isoscel.

Ducem $AD \perp BE$. Triunghiul BAE fiind dreptunghic isoscel rezultă că AD este și mediană, deci $AD = \frac{BE}{2}$, (1). Triunghiul ADE este dreptunghic cu $\widehat{ACD} = 30°$, deci $AD = \frac{AC}{2}$, (2). Din (1) și (2) deducem că $BE \equiv AC$; dar $BE \equiv CF$, deci $FC \equiv AC$, prin urmare triunghiul FAC este isoscel.

2) Triunghiul FAC fiind isoscel avem $\widehat{CAF} \equiv \widehat{CFA} = \frac{180° - 30°}{2} = 75°$. Din $\widehat{BAC} = 105°$ și $\widehat{CAF} = 75°$ deducem $\widehat{BAF} = 30°$, adică $\widehat{BAF} \equiv \widehat{ACB}$.

Soluție bună au dat: *Tripșa Monica*, cl. a VI-a, șc. gen. 1 Arad; *Vilecui Adrian*, cl. a VI-a, Șc. gen. 3 Brașov.

Problema E: 9162* (G.M. 6/1987, pag. 232)

Suma unui număr impar de numere naturale consecutive este 219. Să se găsească aceste numere naturale.

Iulian Coroian, conf. univ., Baia Mare

Soluție. Fie $(x - k), \ldots, (x-2), (x - 1), x, (x + 1), (x + 2), \ldots, (x + k)$ cele $2k + 1$ numere naturale, unde $k \geqslant 1$ și $x \geqslant k$. Deoarece suma lor este un număr impar rezultă că numărul numerelor impare trebuie să fie impar, deci x trebuie să fie număr impar. Suma lor va fi egală cu $(2k + 1)x$, deci.

$$(2k + 1)x = 219 \Leftrightarrow (2k + 1)x = 73 \cdot 3 \cdot 1,$$

de unde avem cazurile:

$$\begin{cases} 2k + 1 = 1 \\ x = 219, \end{cases} \quad \begin{cases} 2k + 1 = 219 \\ x = 1, \end{cases} \quad \begin{cases} 2k + 1 = 73 \\ x = 3, \end{cases} \quad \begin{cases} 2k + 1 = 3 \\ x = 73. \end{cases}$$

Soluția ultimului sistem este singura care îndeplinește condițiile pentru x și k, deci $x = 73$ și $k = 1$, de unde numerele căutate sînt 72, 73, 74.

Soluție bună au dat: *Chereches Virgil*, cl. a VI-a, șc. gen. 5 Bacău; *Magda Laura*, cl. a VI-a, Lic. „S. Vulcan" Beiuș.

Problema E: 9166* (G.M. 6/1987, pag. 233)

Să se arate că o condiție necesară și suficientă ca bisectoarea unghiului A, înălțimea dusă pe AC și mediatoarea laturii AB ale unui triunghi ABC să fie concurente este ca unghiul A să aibă 60°.

Laura Constantinescu, profesoară, Sibiu

Scanned with OKEN Scanner

Soluție. Fie AD bisectoarea unghiului A, $\widehat{BAD} \equiv \widehat{DAC}$, $BE \perp AC$, $M \in AB$ cu $AM \equiv MB$, $Mx \perp AB$.

1) $AD \cap BE \cap Mx = \{P\} \Rightarrow \hat{A} = 60°$:

Din $PM \perp AB$ și $AM \equiv MB$ rezultă că triunghiul PAB este isoscel, deci $BP \equiv AP$ și $\widehat{BAP} \equiv \widehat{ABP}$. Din ultima congruență și din $\widehat{BAD} \equiv \widehat{DAC}$ rezultă că $\widehat{ABP} \equiv \widehat{DAE}$.

Din $\widehat{PMB} \equiv \widehat{PEA} = 90°$, $BP \equiv AP$ și $\widehat{MBP} \equiv \widehat{PAE}$ rezultă că triunghiurile BMP și AEP sînt congruente (caz I. U.) deci $MB \equiv AE$. În triunghiul AEB, dreptunghic în E, avem $AE \equiv MB \equiv MA = \frac{AB}{2}$, prin urmare $\widehat{ABE} = 30°$ de unde rezultă că $\widehat{BAE} = 60°$, adică $\hat{A} = 60°$.

2) $\hat{A} = 60° \Rightarrow AD \cap BE \cap Mx = \{P\}$.

Fie $AD \cap BE = \{P\}$. Din triunghiul dreptunghic AEB cu $\hat{A} = 60°$, rezultă $\widehat{ABE} = 30°$, de unde $AE = \frac{AB}{2}$ adică $AE \equiv MB$; mai observăm că $\widehat{PAE} \equiv \widehat{PBE} = 30°$, deci $\Delta BMP \equiv \Delta AEP$ (caz C. U.), de unde $PA \equiv PB$. Rezultă de aici că triunghiul APB este isoscel, deci mediatoarea bazei AB trece prin vîrful triunghiului, adică $P \in Mx$ și cu aceasta am demonstrat că $AD \cap BE \cap Mx = \{P\}$.

Soluție bună au dat: *Chilat Daniela*, cl. a VI-a, Șc. gen. 10 Bacău; *Savu Daniel*, cl. a VI-a, Șc. gen. 10 Brașov.

Clasa a VII-a

Problema E : 9144* (G.M. 5/1987, pag. 194)

Să se determine numerele $x \in \mathbf{R}$ *și* $y \in \mathbf{N}$ *știind că* $x > 1$ *și* $\frac{x}{3} = \frac{5x+1}{3y+2}$.

Aurel Ene, profesor, Rîmnicu Vîlcea

Soluție. Avem succesiv:

$$\frac{x}{3} = \frac{5x+1}{3y+2} \Leftrightarrow 3xy + 2x = 15x + 3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x(3y-13) = 3 \Leftrightarrow x = \frac{3}{3y-13}.$$

Punînd condiția din enunț ca $x > 1$ obținem inecuația:

$$\frac{3}{3y-13} > 1 \Leftrightarrow \frac{16-3y}{3y-13} > 0.$$

Scanned with OKEN Scanner

Tabelul de semn va fi:

y	$-\infty$		$\frac{13}{3}$		$\frac{16}{3}$		$+\infty$
$16-3y$		$+$	$+$	$+$	0	$-$	
$3y-13$		$-$	0	$+$	$+$	$+$	
$\frac{16-3y}{3y-13}$		$-$	$\|$	$+$	0	$-$	

Deci $y \in \left(\frac{13}{3}, \frac{16}{3}\right) \cap N \Rightarrow y \in \{5\}$. Deci $y = 5$ și $x = \frac{3}{2}$.

Soluție bună au dat: *Ardelean Oana*, cl. a VII-a, Șc. gen. 28 Galați; *Paicu Marius*, cl. a VII-a, Șc. gen. 1 Motru.

Problema E : 9146* (G.M. 5/1987, pag. 194)

Se consideră trapezul $ABCD$ în care $AB \| CD$ și $CD = 2AB$. Pe prelungirile diagonalelor AC și BD (în același sens) se iau punctele M și respectiv N astfel încît $AM \equiv AC$ și $BN \equiv BD$. Dacă $\{P\} = CN \cap DM$, se cere să se exprime aria triunghiului MNP în funcție de aria trapezului $ABCD$.

Giselle Șaganai, elevă, Constanța

Soluție. Notăm $AB = a$, $AD = b$, $BC = c$, deci $CD = 2a$. Fie $BE \| AD$, $E \in CD$. Rezultă $ABED$ paralelogram și $AB \equiv DE = a$, $AD \equiv BE = b$ și $EC = DC - DE = a$.

Din $DB \equiv BN$ și $DE \equiv EC$ rezultă că BE este linie mijlocie în triunghiul DNC, deci $CN \| BE \| AD$ și $CN = 2BE$, adică $CN = 2b$, (1).

Din $CN \| AD$ rezultă $AD \| CP$; dar $MA \equiv AC$, deci AD este linie mijlocie în triunghiul MPC de unde $CP = 2AD$, adică $CP = 2b$, (2) și $MD \equiv DP$, (3).

Din (1) și (2) obținem $NP = 4b$, (4). Tot din (1) și (2) avem $NC \equiv CP$; dar $BN \equiv BD$, deci BC este linie mijlocie în triunghiul NDP de unde $DP = 2BC$, $DP = 2c$ și ținînd seama de (3) avem $MP = 4c$, (5).

Din asemănarea triunghiurilor AOB și DOC (unde $\{O\} = AC \cap BD$) avem $\frac{OB}{OD} = \frac{OA}{OC} = \frac{AB}{CD} = \frac{1}{2}$ de unde $\frac{OB}{BD} = \frac{OA}{AC} = \frac{1}{3}$; dar $BD \equiv BN$ și $AC \equiv AM$; deci $\frac{OB}{BN} = \frac{OA}{AM} = \frac{1}{3}$. Conform reciprocei teoremei lui *Thales* în triunghiul MON rezultă că $AB \| MN$, de unde $\Delta AOB \sim \Delta MON$ și de aici $\frac{AB}{MN} = \frac{OB}{ON} = \frac{OA}{OM} = \frac{1}{4}$, deci $MN = 4AB$, adică $MN = 4a$, (6).

Din (4), (5) și (6) rezultă că triunghiurile BEC și MNP sînt asemenea cu raportul de asemănare $\frac{BC}{MB} = \frac{1}{4}$; deci $\frac{\sigma[BEC]}{\sigma[MNP]} = \left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{1}{16}$ de unde $\sigma[MNP] = 16\ \sigma[BEC]$, (7).

Scanned with OKEN Scanner

Notînd cu h înălțimea trapezului $ABCD$ avem:

$\sigma[ABCD] = \sigma[ABED] + \sigma[BEC] = ah + \frac{ah}{2} = \frac{3ah}{2} = 3\,\sigma[BEC]$, de unde $\sigma[BEC] = \frac{1}{3}\,\sigma[ABCD]$, (8). Ținînd seama de (8) în (7) obținem că $\sigma[MNP] = \frac{16}{3}\,\sigma[ABCD]$.

Soluție bună au dat: *Gălețeanu Violeta*, cl. a VII-a, Șc. gen. Beiu; *Asaftei Laura*, cl. a VII-a, Șc. gen. 15 Bacău.

Problema E: 9148* (G.M. 5/1987, pag. 194)

Fie $ABCD$ un patrulater convex și $M \in AB$ astfel încît $MA \equiv MB$ și $\widehat{MDA} \equiv \widehat{MDC}$.

1) *Să se arate că $\mathcal{C}(M, MA) \cap CD \neq \emptyset$.*

2) *Să se arate că există un unic punct $R \in \mathcal{C}(M, MA) \cap CD \Leftrightarrow \widehat{DAB} = 90°$.*

Alexandru Blaga, profesor, Satu Mare

Soluție. 1) Fie $MN \perp CD$ și $MP \perp AD$. Deoarece DM este bisectoarea unghiului $\widehat{ADC}$ rezultă $MN \equiv MP$. Dacă $P = A$ atunci $MN \equiv MP \equiv MA$, (1); dacă $P \neq A$ atunci $MP < MA$ (într-un triunghi dreptunghic fiecare catetă este mai mică decît ipotenuza), adică $MN < MA$, (2). Din (1) și (2) rezultă că $MN \leqslant MA$; deci distanța de la centrul cercului la dreapta CD este mai mică sau egală cu raza cercului, prin urmare CD este mai mică sau egală cu raza cercului; rezultă că CD este secantă sau tangentă la cerc, adică $\mathcal{C}(M, MA) \cap CD \neq \emptyset$.

2) a) $\mathcal{C}(M, MA) \cap CD = \{R\} \Rightarrow \widehat{DAB} = 90°$:

Din $\mathcal{C}(M, MA) \cap CD = \{R\}$ rezultă că CD este tangentă la cerc în R, de unde $MR \perp CD$ și $MR \equiv MA$, (3). Dar $MR \equiv MP$, (4), unde $MP \perp AD$ (deoarece DM este bisectoarea unghiului $\widehat{ADC}$). Din (3) și (4) avem $MP \equiv MA$, ceea ce are loc numai dacă $P = A$, deci $MA \perp AD$, adică $\widehat{DAB} = 90°$.

b) $\widehat{DAB} = 90° \Rightarrow \mathcal{C}(M, MA) \cap CD = \{R\}$;

Fie $MR \perp CD$. Avem $MA \equiv MR$ (deoarece DM e bisectoarea unghiului $\widehat{ADC}$), deci CD e tangentă la cercul $\mathcal{C}(M, MA)$, de unde rezultă că $\mathcal{C}(M, MA) \cap CD = \{R\}$.

Soluție bună au dat: *Ștefănescu Cătălina*, cl. a VII-a, Șc. gen. 56 București; *Antonescu Lavinia*, cl. a VII-a, Lic. ind. 8 Rm Vîlcea.

Problema E: 9168* (G.M. 6/1987, pag. 233)

Să se determine unghiurile triunghiului ABC în care $h_b = b$ și $h_c = c$ (unde $AB = c$, $AC = b$, $BC = a$, iar h_a, h_b, h_c sînt lungimile înălțimilor din A, B, C).

Mihaela Banyai, profesoară, București

Scanned with OKEN Scanner

Soluție. Într-un triunghi produsul dintre o latură și înălțimea corespunzătoare este constant, deci $b \cdot h_b = c \cdot h_c$ (1). Deoarece $h_b = b$ și $h_c = c$, relația (1) devine $b^2 = c^2$ de unde obținem $b = c$; adică $b = c = h_b = h_c$. Din $c = h_b$ (sau $b = h_c$) rezultă că $\hat{A} = 90°$. Deci triunghiul ABC este dreptunghic isoscel, de unde avem: $\hat{A} = 90°$, $\hat{B} = \hat{C} = 45°$

Soluție bună au dat: *Tomescu Mihaela*, cl. a VII-a, Șc. gen. 27 București; *Răduț Mihaela*, cl. a VII-a, Șc. gen. 10 Slatina.

Problema E: 9172* (G.M. 6/1987, pag. 233)

În triunghiul ABC, $\hat{B} = 3\hat{A}$. Mediatoarea laturii BC taie pe AC în E. Dacă $AB \equiv BE$, să se afle unghiurile triunghiului ABC.

Ioan Morariu, Salva, Bistrița-Năsăud

Soluție. Fie $\hat{A} = \alpha$; avem $\hat{B} = 3\alpha$ și $\hat{C} = 180° - 4\alpha$. Deoarece $AB \equiv BE$ rezultă $\widehat{BAE} \equiv \widehat{BEA} = \alpha$. Fie M mijlocul laturii BC; ME fiind mediană și înălțime în triunghiul EBC rezultă că acest triunghi este isoscel, deci $\widehat{EBC} \equiv \widehat{ECB} = 180° - 4\alpha$. Dar $\widehat{BEA}$ este unghi exterior triunghiul EBC prin urmare va fi egal cu suma unghiurilor interioare nealăturate, deci $\alpha = 2(180° - 4\alpha)$ de unde $\alpha = 40°$. Rezultă că $\hat{A} = 40°$, $\hat{B} = 120°$ și $\hat{C} = 20°$.

Soluție bună au dat: *Bercia Robert*, cl. a VII-a, Șc. gen. 10 Ploiești; *Cauteș Cătălin*, cl. a VII-a, Șc. gen. 18 Brăila.

Clasa a VIII-a

Problema E: 9154* (G.M. 5/1987, pag. 196).

Să se rezolve în numere întregi ecuația:

$$x(3x + 1) + 2y(y - 2x) - 2 = 0.$$

Ștefan Smarandache, profesor, București

Soluție. Avem $x(3x + 1) + 2y(y - 2x) - 2 = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 3x^2 + x + 2y^2 - 4xy - 2 = 0 \Leftrightarrow 2(x - y)^2 = -x^2 - x + 2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2(x - y)^2 = -(x - 1)(x + 2).$$

Deoarece $2(x - y)^2 \geqslant 0$ rezultă că $-(x - 1)(x + 2) \geqslant 0$ adică $(x - 1) \times (x + 2) \leqslant 0$. Studiind semnul funcțiilor de gradul întîi obținem că $x \in [-2; 1]$. Dar $x \in \mathbf{Z}$, deci $x \in \{-2; -1; 0; 1\}$.

Pentru $x = -2$ rezultă că $2(-2 - y)^2 = 0$ deci $y = -2$.

Pentru $x = -1$ rezultă că $2(-1 - y)^2 = 2 \Leftrightarrow (-1 - y)^2 = 1 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow -1 - y = 1$ sau $-1 - y = -1 \Leftrightarrow y = -2$ sau $y = 0$.

Scanned with OKEN Scanner

Pentru $x = 0$ avem $2y^2 = 2 \Leftrightarrow y = -1$ sau $y = 1$.
Pentru $x = 1$ obținem că $y = 1$.
În concluzie, ecuația are soluțiile $(-2, -2)$, $(-1, -2)$, $(-1, 0)$, $(0, -1)$, $(0,1)$ și $(1,1)$.

Soluție bună au dat: *Cheța Alina*, cl. a VIII-a, Șc. gen. 4 Arad; *Ungureanu Traian*, cl. a VIII-a, Șc. gen. 1 Băilești.

Problema E : 9175* (G.M. 6/1987, pag. 234)

Fie $ABCD$ un tetraedru cu proprietățile $AB = AC = BC = AD = BD$ și $AD \perp BC$. Să se demonstreze că $ABCD$ este tetraedru regulat.

Ion Pătrașcu, profesor, Băilești

Soluție. Deoarece $AD \perp BC$ construim planul $(ADD_1) \perp BC$, $D_1 \in BC$. Rezultă că $AD_1 \perp BC$ și $DD_1 \perp BC$. Dar triunghiul ABC este echilateral deci $D_1B = D_1C$, deoarece $AD_1 \perp BC$. Rezultă că în triunghiul BDC avem DD_1 înălțime și mediană deci triunghiul BDC este isoscel cu vîrful în D. Rezultă că $DC = BD$.
În concluzie $AB = AC = AD = BC = BD = DC$ deci tetraedrul $ABCD$ este regulat, ceea ce trebuia arătat.

Soluție dată de: *Albu Irina*, cl. a VIII-a, Șc. gen. 11 București; *Alexe Daniela*, cl. a VIII-a, Șc. gen. 3 Însurăței.

PROBLEME PENTRU GIMNAZIU

Clasa a V-a

E : 9419. Să se scrie mulțimile A și B enumerînd elementele lor, dacă:
$A = \{x \mid x \in \mathbf{N},\ x \leq 17,\ x$ dă restul 2 prin împărțire la 3$\}$ și
$B = \{3x \mid x \in A\}$.

Emil Dohi, elev, Negrești-Oaș

E : 9420*. Se dă numărul de forma: 123 .. 91011 .. 9899100
Se cere:
1) Cîte cifre are?
2) De cîte ori apare fiecare cifră?
3) Care este suma cifrelor?
4) Care cifră stă pe poziția 49?

Mirela Pinte, elevă, Satu Mare

E : 9421*. Dacă a, b, c sînt numere naturale, $a \geq b \geq c$, cu proprietatea că $(a - b) : c$, $(a - c) : b$ și $(b - c) : a$ sînt numere naturale, justificați care din afirmațiile următoare este adevărată:

i) $b = c$;

ii) $(a - b)(a - c)(b - c) = 0$.

Dați un exemplu de astfel de numere.

Alexandru Blaga, profesor, Satu Mare

Scanned with OKEN Scanner

E : 9422*. Să se determine cifrele consecutive a, b scrise în baza zece, știind că : $\overline{ab5} = 5^{a+b}$.

Francisc Csaki, profesor, Livada, Satu Mare

E : 9423. Să se determine tripletele de numere naturale impare consecutive care sînt prime.

Rodica Pop, profesoară, Satu Mare

E : 9424*. Determinați numerele naturale de forma $\overline{abcd}$, în baza 10, știind că are loc egalitatea :

$$\overline{abcd} = \overline{abc} + \overline{cbd} + \overline{dca} + \overline{aa}.$$

Emeric Horvath, profesor, Livada, Satu Mare

E : 9425. Să se determine cifrele a, b scrise în baza zece, știind că raportul lor este egal cu media aritmetică dintre suma și diferența lor.

Erika Molnar, elevă, Dumbrava-Livada, Satu Mare

E : 9426*. Determinați un număr scris cu zece cifre distincte multiplu de 125. Numărul este unic ?

Ion Dumitrescu, profesor, Satu Mare

E : 9427. Să se găsească toate numerele de forma $\overline{2x3y6}$ divizibile cu 24.

Raluca Batbul, elevă, Negrești-Oaș

E : 9428. Un tată are 42 ani și trei copii de 12, 8 și 6 ani. După cît timp tatăl va avea vîrsta egală cu suma vîrstelor copiilor la acea dată ?

Nadia Ciuclan, elevă, Negrești-Oaș

E : 9429*. Să se găsească toate numerele naturale de forma $A = 3^{\alpha} \cdot 5^{\beta}$ ce au 12 divizori ($\alpha, \beta \in \mathbb{N}$). Care este cel mai mic ? Dar cel mai mare ?

Maria Minea, profesoară, Galați

E : 9430. Cîte numere de trei cifre, divizibile cu 37 sînt ? Dacă S este suma tuturor acestor numere, arătați că $S + 74$ se divide cu 29.

Alexandru Blaga, profesor, Satu Mare

Scanned with OKEN Scanner

E : 9431. În triunghiul ABC avem $\hat{A} = 85°$. Înălțimea AD, $D \in (BC)$ și mediana BM, $M \in (AC)$ se intersectează în P. Știind că triunghiul ABP este isoscel, iar $BD = \frac{AC}{2}$, să se determine măsurile celorlalte două unghiuri ale triunghiului ABC.

Adalbert Kovacs, profesor, Satu Mare

E : 9432*. Determinați toate numerele formate din două cifre diferite de zero, cu proprietatea $\overline{xy}^2 = \overline{abcd}$ și $y^2 = \overline{cd}$.

Adalbert Kovacs, profesor, Satu Mare

E : 9433*. Pentru fiecare $m \in \mathbf{Z}$ se consideră numerele $x = m^3 + 1$, $y = m^3 - 1$. Să se arate că dacă m nu se divide cu 7 atunci produsul $x \cdot y$ se divide cu 7.

Constantin Oneț, profesor, Satu Mare

E : 9434. Se dau numerele naturale a, b și c invers proporționale cu numerele $\frac{1}{2}$, 0,25 și 0,1(6). Să se ordoneze crescător numerele:

$$A = \frac{ab + ac + bc}{a^2 + b^2 + c^2}, \quad B = \frac{abc}{a^3 + b^3 + c^3} \text{ și}$$

$$C = \frac{a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2}{a^4 + b^4 + c^4}.$$

Aurel Netea, elev, Tășnad, Satu Mare

E : 9435*. Să se arate că pentru orice număr $n \in \mathbf{N}$, $n \geqslant 1$, numărul:

$$A = \frac{36^n \cdot 5^{n+1} \cdot 7 - 2^{2n+1} \cdot 3^{2n+1} \cdot 5^n}{6^n \cdot 5^{n-1} \cdot 19 + 2^{n+1} \cdot 15^n}$$

este număr natural.

Ioan Chindriș, profesor, Satu Mare

E : 9436. Numerele a, b, c satisfac relațiile:

$$\frac{a}{3} = \frac{b}{4} = \frac{c}{6} \text{ și } 2a + 5b + 3c = 88.$$

Scanned with OKEN Scanner

Să se calculeze :

i) $4a + 3b - 4c$;

ii) $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}$,

Călin Chindriș, elev, Satu Mare

E : 9437*. Să se afle numerele care împărțite la 52 dau citul 3 și restul mai mare decît 1, iar împărțite la 43 dau citul 3.

Florentin Smarandache, Craiova

E : 9438*. Fie O centrul cercului circumscris unui triunghi ABC ale cărui unghiuri A, B, C sînt proporționale cu 6 ; 4 și 2. Dacă punctul D este diametral opus lui A să se arate că patrulaterul $ABCD$ este dreptunghi.

Ion Z. Predescu, profesor, Rast, Dolj

E : 9439. Fie a, b, c trei numere naturale care satisfac condiția $a = \frac{b}{0,4} = \frac{c}{0,(4)}$. Știind că numerele $a + b$ și c sînt prime între ele, se cere :

1) Să se arate că $a + b$ este un divizor al lui 63 ;

2) Să se determine numerele a, b, c.

Nistor Budescu, profesor, Dalboșeț, Caraș-Severin

E : 9440. În triunghiul ABC cu unghiurile ascuțite, din punctul D care este piciorul înălțimii corespunzătoare laturii BC, se duc perpendicularele DE și DF pe laturile AB și $AC (E \in (AB), F \in (AC))$. Se prelungesc aceste perpendiculare cu segmentele $EM \equiv DE$ și $FN \equiv DF$. Să se demonstreze că :

1) $AM \equiv AN$; 2) $MB + CN = BC$; 3) $AM \perp MB$.

Maria Vizuroiu, Nicolae Vizuroiu, profesori, Pitești

E : 9441. Pe latura (BC) a triunghiului ABC se consideră punctul mobil M, iar MP și MQ sînt perpendicularele din M pe latura AB, respectiv AC. Să se arate că oricare ar fi poziția lui M pe BC, suma unghiurilor $\widehat{PMB}$ și $\widehat{QMC}$ este constantă.

Ioan Stupari, profesor, Șintioara, Bistrița Năsăud

E : 9442*. Triunghiul ABC dreptunghic în A are $\hat{C} = 10°$. Fie M punctul în care bisectoarea interioară a unghiului A intersectează ipotenuza BC, iar N punctul în care perpendiculara dusă în M pe BC taie cateta AC. Să se determine măsura unghiului $\widehat{ABN}$.

Ion Z. Predescu, profesor, Rast, Dolj

Scanned with OKEN Scanner

E : 9443. Să se arate că există numere naturale care se pot reprezenta în două moduri ca diferența pătratelor a două numere naturale distincte.

Alexandru Blaya, profesor, Satu Mare

E : 9444*. Fie x, y, z numere reale pozitive. Să se arate că $x^3 + 8y^3 + 27z^3 \leqslant 18xyz$ dacă și numai dacă $x = 2y = 3z$.

Ovidiu Pop, profesor, Satu Mare

E : 9445*. Fie trei numere naturale nenule de aceeași paritate. Să se arate că există un număr natural nenul astfel încît suma pătratelor celor patru numere să se scrie ca suma pătratelor a trei numere naturale.

Ovidiu Pop, profesor, Satu Mare

E : 9446. Se dă numărul

$$A = 1981^1 + 1982^2 + 1983^3 + 1984^4 + 1985^5 + 1986^6 + 1987^7 + 1988^8.$$

Să se decidă dacă numărul $\sqrt{A}$ este rațional sau irațional.

Tiberiu Makora, profesor, Satu Mare

E : 9447*. Fie $ABCD$ un patrulater convex cu $AC \perp BC$, iar punctele M și E mijloacele laturilor AB și respectiv CD. Pe latura (AB) se ia un punct F astfel încît $\widehat{MDC} \equiv \widehat{EFA}$. Să se arate că patrulaterul $MECF$ este inscriptibil dacă și numai dacă $ABCD$ este inscriptibil.

Maria Sichet, profesoară, Satu Mare

E : 9448. Fie AA', BB', CC' înălțimile triunghiului ascuțitunghic $ABC(A' \in (BC), B' \in (AC), C' \in (AB))$ și M, N, P punctele în care acestea intersectează a doua oară cercul circumscris triunghiului. Să se arate că:

$$\frac{AA'}{A'M} + \frac{BB'}{B'N} + \frac{CC'}{C'P} \geqslant 9.$$

Domokos Csaba, profesor, Satu Mare

E : 9449. Pe semicercul de diametru AB se iau punctele C fix și M mobil. Să se demonstreze că oricare ar fi $M \in \widehat{AB}$ avem:

a) $m(\widehat{ACD}) \geqslant m(\widehat{AMD})$, unde D reprezintă proiecția lui C pe AB;

b) $m(\widehat{DCO}) \geqslant m(\widehat{DMO})$.

Ioan Radu și *Aurel Neteș*, profesori, Tășnad, Satu Mare

Scanned with OKEN Scanner

E : 9450*. Să se arate că perimetrul triunghiului de arie 2 este mai mare decît 6.

Gyöngyver Nevelits, profesoară, Satu Mare

E : 9451*. Să se afle perimetrul și aria unui triunghi, știind că lungimile laturilor sînt exprimate prin trei numere întregi consecutive, iar numeric, perimetrul este egal cu jumătatea ariei triunghiului.

Ion Dumitrescu, profesor, Satu Mare

E : 9452. Să se rezolve ecuația :

$$|x-6| = \left[\frac{x-1}{2}\right] + \left[\frac{x-2}{2}\right] + \left[\frac{x-3}{2}\right] + \left[\frac{x-4}{2}\right]$$

unde simbolul $[a]$ reprezintă partea întreagă a unui număr real a.

Mugurel Szőrős, profesor, Drobeta-Tr. Severin

E : 9453*. Ipotenuza BC a unui triunghi dreptunghic de măsură unitară, se împarte în cinci părți congruente $BM \equiv MN \equiv NR \equiv RT \equiv TC$. Să se arate că $AT^2 + AM^2 = \frac{17}{25}$.

Să se generalizeze problema în cazul în care ipotenuza de măsură unitatea se împarte în n părți congruente și să se verifice relația găsită pentru $n = 5$.

Andrei Boros, profesor, Baia Mare

E : 9454. Se consideră triunghiul dreptunghic $ABC(\hat{A} = 90°)$ cu înălțimea AD, bisectoarea AE și $\hat{B} = 75°$, $(D,\ E \in (BC))$. Determinați rapoartele $\frac{DB}{DC}$ și $\frac{EB}{EC}$.

Damian Mărinescu, profesor, Tîrgoviște

Clasa a VIII-a

E : 9455. Fie $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = ax^2 - x + 1$, $g(x) = 2ax - 1$, unde a este parametru real. Cîte puncte comune au graficele funcțiilor f și g?

Imre Merenyi, profesor, Negrești-Oaș, Satu-Mare

E : 9456*. Să se arate că ecuația

$$x(x+1)(x+2)(x+3) = y^2 - 2$$

nu are soluții în mulțimea numerelor întregi.

Tiberiu Makora, profesor, Satu Mare

Scanned with OKEN Scanner

E : 9457*. Să se determine paralelipipedul dreptunghic avînd lungimea diagonalei constantă, a cărei arie totală este maximă.

* * *

E : 9458. Fie trapezul dreptunghic $ABCD$ cu $m(\hat{A}) = m(\hat{D}) = 90°$, $AB = 3a$, $AD = a$, $DC = 2a$. Notăm $AD \cap BC = \{E\}$, $AC \cap BD = \{O\}$. În punctul E ridicăm o perpendiculară pe planul trapezului și luăm pe ea un punct M. Să se calculeze EM astfel încît unghiul dintre planul (MAC) și planul bazei să fie de 45°.

Mihaela Berindeanu, profesoară, București

E : 9459. Să se rezolve ecuația în m :

$$\sqrt{4 + m(m + 2\sqrt{3} - 2) - 2\sqrt{3}} + \sqrt{4 + m(m - 2\sqrt{3} - 2) + 2\sqrt{3}} = 18.$$

Gabriel Apetrei, elev, Botoșani

E : 9460. Pe trei muchii concurente ale unui cub se iau respectiv punctele M, N, P diferite de vîrfuri.

a) Să se arate că triunghiul MNP nu poate fi dreptunghic.

b) În ce caz este isoscel ?

c) Dar echilateral ?

Florentin Smarandache, cercet. șt., Craiova

E : 9461. Se dă fracția :

$$F(x) = \frac{20703_x - 5050_x + 406_x}{3021_x - 1103_x - 201_x}$$

unde x este baza unui sistem de numerație.

a) Să se simplifice fracția.

b) Să se determine mulțimea : $A = \{x \in \mathbf{N}^* \setminus \{1\} \mid F(x) \in \mathbf{N}\}$.

Romeo Cernat, profesor, Ciurea, Iași

E : 9462. Fie fracția :

$$F(x) = \frac{5x^3 + 3x^2 + 3x - 2}{2x^3 + 3x^2 + 3x + 1}, \text{ unde } x \in \mathbf{R} \setminus \left\{-\frac{1}{2}\right\}.$$

a) Să se simplifice fracția.

b) Să se determine mulțimile

$$A = \{x \in \mathbf{Z} \mid F(x) \in \mathbf{Z}\} \text{ și } B = \{x \in \mathbf{R} \mid F(x) \geqslant x\}.$$

c) Să se afle $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$.

Ștefan Smarandache, profesor, București

Scanned with OKEN Scanner

E : 9463*. Pentru ce valori $n \in \mathbf{N}$ fracția

$$\frac{27n^3 + 6n^2 - 37n + 4}{27n^3 - 21n^2 - 70n + 8}$$ se simplifică prin 1988?

Constantin Nicolau, profesor, Curtea de Argeș

E : 9464*. Fie funcția $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ definită prin $f(x) = \sqrt{5x^2 - 4x + 1} + \sqrt{5x^2 - 6x + 2}$. Să se afle minimul funcției f.

C. Ionescu-Țiu, București

E : 9465*. Se dau polinoamele P și Q cu proprietatea că $P(x) = Q(x) + Q(1 - x)$, oricare $x \in \mathbf{R}$. Știind că P are coeficienți naturali și că $P(0) = 0$, calculați $P(P(3))$.

Teodor Bănică, elev, București

E : 9466*. Fie polinomul $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ unde $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n \in \{0, 1, 2, \ldots, 9\}$.

Să se arate că dacă $P(x)$ este divizibil cu $x^2 - 4x - 5$ atunci numărul $\overline{a_n a_{n-1} \ldots a_1 a_0}$ este divizibil cu 55.

D. Săvulescu, profesor, Bacău

PROBLEME PRELIMINARE DE TIP O.I.M. PENTRU ELEVII DIN GIMNAZIU

O.G. : 71. Să se determine mulțimile $A = \{x \in \mathbf{N} \mid x = 4[\sqrt{x}] + 3\}$ și $B = \{x \in \mathbf{N} \mid x = 5([\sqrt[3]{x}])^2\}$.

S-a notat cu $[a]$ partea întreagă a numărului a.

D. M. Bătinețu-Giurgiu

O.G. : 72. Fie ABC un triunghi oarecare. Cercul care trece prin C și este tangent în A la dreapta AB se intersectează, a doua oară, cu cercul care trece prin A și este tangent în B la dreapta BC, în punctul P. Un punct arbitrar al planului M, se proiectează pe dreptele AP, BP și respectiv CP în punctele A', B' și C'.

Să se arate că triunghiul $A'B'C'$ este asemenea cu triunghiul ABC.

Mihai Miculița, profesor, Oradea

O.G. : 73. Să se arate că dacă numărul $\underbrace{111\ldots1}_{n \text{ cifre}}$ este prim atunci n este prim. Reciproca este adevărată?

Ovidiu Pop, Satu Mare

O.G. : 74. Să se rezolve în numere naturale ecuația :

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1988.$$

Emeric Horvath, profesor, Livada, Satu Mare

Scanned with OKEN Scanner

PROBLEME REZOLVATE PENTRU LICEU

Clasa a IX-a

Problema 21099* (G.M. 5/1987, pag. 197)

Fie A', B', C' punctele diametral opuse vîrfurilor triunghiului ABC în cercul circumscris acestuia. Să se demonstreze că tangentele în A', B', C' la cercul circumscris intersectează dreptele BC, CA respectiv AB în trei puncte coliniare.

Siziana Odangiu, elevă, Turnu-Măgurele

Soluție. În triunghiurile dreptunghice ACA' și ABA' avem $\widehat{AA'C} \equiv \hat{B}$ respectiv $\widehat{AA'B} \equiv \hat{C}$ deci $\cos \hat{B} = \dfrac{A'C}{AA'}$ respectiv $\cos \hat{C} = \dfrac{A'B}{AA'}$ adică

$$A'C = 2R \cos \hat{B} \text{ respectiv } A'B = 2R \cos \hat{C}, \tag{1}$$

Fie E intersecția lui BC cu tangenta în A' la cerc. Rezultă că $\widehat{CA'E} \equiv \widehat{EBA'}$ deci triunghiurile ECA' și $EA'B$ sînt asemenea, avînd unghiul $\hat{E}$ comun. Rezultă că $\dfrac{A'E}{BE} = \dfrac{A'C}{A'B} = \dfrac{CE}{A'E}$ deci $BE = A'E \cdot \dfrac{A'B}{A'C}$ și $CE = A'E \cdot \dfrac{A'C}{A'B}$ de unde rezultă, conform relațiilor (1), că

$$\frac{EB}{EC} = \left(\frac{A'B}{A'C}\right)^2 \Rightarrow \frac{EB}{EC} = \left(\frac{\cos C}{\cos B}\right)^2, \tag{2}$$

Analog, dacă F respectiv G sînt punctele de intersecție ale tangentelor la cerc în B' respectiv C' cu dreptele AC respectiv AB, vom obține:

$$\frac{FC}{FA} = \left(\frac{\cos A}{\cos C}\right)^2 \text{ respectiv } \frac{GA}{GB} = \left(\frac{\cos B}{\cos A}\right)^2, \tag{3}$$

Din relațiile (2) și (3) rezultă că:

$$\frac{EB}{EC} \cdot \frac{FC}{FA} \cdot \frac{GA}{GB} = \left(\frac{\cos C}{\cos B} \cdot \frac{\cos A}{\cos C} \cdot \frac{\cos A}{\cos B}\right)^2 = 1,$$

ceea ce, conform reciprocei teoremei lui *Ceva*, arată că punctele E, F și G sînt coliniare.

Soluție bună au dat: *Tobi Beatrice*, cl. a IX-a, Lic. „N. Bălcescu" București; *Mihai Viorica*, cl. a IX-a, Lic. agroind. Călugăreni.

Problema 21121* (G.M. 6/1987, pag. 235)

Dacă a, b, c sînt numere reale strict pozitive să se arate că:

$$\frac{a}{\sqrt{(a+b)(a+c)}} + \frac{b}{\sqrt{(b+a)(b+c)}} + \frac{c}{\sqrt{(c+a)(c+b)}} \leqslant \frac{3}{2}.$$

Constantin Caragea, profesor, Constanța

Soluție. Deoarece numerele a, b și c sînt strict pozitive atunci există x, y și z strict pozitive astfel încît $b + c = x^2$, $c + a = y^2$ și $a + b = z^2$. Rezultă că

$$a = \frac{-x^2 + y^2 + z^2}{2}; \; b = \frac{x^2 - y^2 + z^2}{2} \text{ și } c = \frac{x^2 + y^2 - z^2}{2}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Atunci inegalitatea din enunț este echivalentă cu:

$$x^2y + x^2z + y^2x + y^2z + z^2x + z^2y - x^3 - y^3 - z^3 - 2xyz \leqslant xyz, \text{ adică}$$

$$(-x + y + z)(x - y + z)(x + y - z) \leqslant xyz, \quad (1).$$

În continuare notăm $-x + y + z = A$, $x - y + z = B$ și $x + y - z = C$. Vom arăta mai întîi că A, B și C sînt strict pozitive. Într-adevăr se observă că $x^2 + y^2 = a + b + 2c > a + b = z^2$ deci $x^2 + y^2 > z^2$ și analog $x^2 + z^2 > y^2$ și $y^2 + z^2 > x^2$. Deoarece $x^2 + y^2 > z^2$ și $z > 0$ rezultă că $\sqrt{x^2+y^2} > z$. Dar $x + y > \sqrt{x^2+y^2} \Leftrightarrow x^2 + y^2 + 2xy > x^2 + y^2 \Leftrightarrow 2xy > 0$, evident. Deci $x + y > \sqrt{x^2+y^2} > z$ adică $x+y > z$. Analog se arată că $x+z > y$ și $y+z > x$. Cu alte cuvinte am arătat că dacă x, y, z sînt strict pozitive și x^2, y^2, z^2 verifică inegalitatea triunghiului atunci și x, y, z verifică inegalitatea triunghiului. Rezultă că numerele A, B și C sînt strict pozitive.

Cu notațiile făcute obținem: $x = \dfrac{A + B}{2}$, $y = \dfrac{A + C}{2}$, $z = \dfrac{B + C}{2}$ și inegalitatea (1) devine:

$$(A + B)(B + C)(C + A) \geqslant 8ABC \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow ABC + AC^2 + B^2C + BC^2 + A^2B + A^2C + AB^2 + ABC \geqslant 8ABC \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (AC^2 - 2ABC + AB^2) + (CA^2 - 2ABC + BA^2) + (BC^2 - 2ABC + BA^2) \geqslant 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow A(B - C)^2 + C(A - B)^2 + B(C - A)^2 \geqslant 0,$$

ceea ce este evident deoarece $A > 0$, $B > 0$, $C > 0$.
Deci inegalitatea din enunț este adevărată și avem egalitate dacă și numai dacă $A = B = C \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow x = y = z \Leftrightarrow a = b = c$.

Soluție bună au dat: *Tulai Ioana*, cl. a IX-a, Lic. ind. Cîmpia Turzii; *Matei Mircea*, cl. a IX-a, Lic. ind. 5 Cîmpina.

Clasa a X-a

Problema 21132* (G.M. 6/1987, pag. 236)

Să se determine toate numerele complexe care au partea reală, partea imaginară și modulul numere raționale.

Florin Vulpescu-Jalea, profesor, București

Soluție. Se constată că numerele $z = r$, $r \in \mathbb{Q}$ sînt soluții ale problemei date.
Fie $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Q}$ astfel încît $\mathrm{Re} z \in \mathbb{Q}$, $\mathrm{Im} z \in \mathbb{Q}^*$ și $|z| \in \mathbb{Q}^*$, (1). Numărul z se poate scrie sub formă trigonometrică $z = r(\cos\alpha + i\sin\alpha)$ și condiția (1) devine:

$$r \in \mathbb{Q}_+^*,\ r\cos\alpha \in \mathbb{Q},\ r\sin\alpha \in \mathbb{Q}^*,\ \alpha \in (0, \pi) \cup (\pi, 2\pi),$$

sau

$$r \in \mathbb{Q}_+^*,\ \cos\alpha \in \mathbb{Q},\ \sin\alpha \in \mathbb{Q}^*,\ \alpha \in (0, \pi) \cup (\pi, 2\pi),$$

sau

$$r \in \mathbb{Q}_+^*,\ \frac{1 - t^2}{1 + t^2} \in \mathbb{Q},\ \frac{2t}{1 + t^2} \in \mathbb{Q}^* \qquad (2)$$

unde $t = \operatorname{tg} \dfrac{\alpha}{2}$,

Scanned with OKEN Scanner

Este evident că dacă $t \in \mathbb{Q}^*$, atunci (2) este adevărată.

Reciproc, să presupunem că (2) este adevărată. Vom arăta că $t \in \mathbb{Q}^*$. Într-adevăr, fie $\frac{1-t^2}{1+t^2} = a$, $\frac{2t}{1+t^2} = b$, unde $a, b \in \mathbb{Q}^*$. Din prima relație rezultă că $t^2 = \frac{1-a}{1+a}$ care înlocuită în a doua relație implică $t = \frac{b}{1+a} \in \mathbb{Q}$, evident.

În concluzie numerele căutate sînt de forma

$$z = \frac{r(1-t^2)}{1+t^2} + i\,\frac{2rt}{1+t^2},\ r \in \mathbb{Q}_+^*\ \text{și}\ t \in \mathbb{Q}^*\ \text{sau de forma}\ z = r,\ r \in \mathbb{Q}.$$

Soluție bună au dat: *Glurescu Remus*, cl. a X-a, Lic. „Radu Greceanu" Slatina; *Vasiliu George*, cl. a X-a, Lic. ind. „Unirea" Focșani.

Problema 21138* (G.M. 6/1987, pag. 236)

Să se găsească funcția $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *cu proprietatea că*

$$f(f(n)) + f(n) = 2n + 6,\ (\forall)\ n \in \mathbb{N}.$$

Cristinel Mortici, elev, Tîrgoviște

Soluție. Demonstrăm că funcția f este injectivă. Fie $m, n \in \mathbb{N}$ astfel încît $f(m) = f(n)$. Avem:

$$f(m) = f(n) \Rightarrow f(f(m)) = f(f(n)) \Rightarrow f(f(m)) + f(m) = f(f(n)) + f(n) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2m + 6 = 2n + 6 \Rightarrow m = n,$$

deci f este injectivă.

Să calculăm $f(0)$. Pentru aceasta notăm $f(0) = \alpha$, deci $\alpha \in \mathbb{N}$. În relația din enunț dăm lui n, pe rînd, valori:

$$n = 0 \Rightarrow f(f(0)) + f(0) = 6 \Rightarrow f(\alpha) + \alpha = 6 \Rightarrow f(\alpha) = 6 - \alpha \in \mathbb{N} \Rightarrow 0 \leqslant \alpha \leqslant 6;$$

$$n = \alpha \Rightarrow f(f(\alpha)) + f(\alpha) = 2\alpha + 6 \Rightarrow f(6-\alpha) = 2\alpha + 6 - 6 + \alpha \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(6-\alpha) = 3\alpha \in \mathbb{N} \Rightarrow \alpha \geqslant 0;$$

$$n = 6 - \alpha \Rightarrow f(f(6-\alpha)) + f(6-\alpha) = 2(6-\alpha) + 6 \Rightarrow f(3\alpha) = 18 - 5\alpha \in \mathbb{N} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \alpha \leqslant \frac{18}{5};\ \text{dar}\ \alpha \in \mathbb{N},\ \text{deci}\ 0 \leqslant \alpha \leqslant 3;$$

$$n = 3\alpha \Rightarrow f(f(3\alpha)) + f(3\alpha) = 6\alpha + 6 \Rightarrow f(18-5\alpha) = 11\alpha - 12 \in \mathbb{N} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \alpha \geqslant \frac{12}{11};\ \text{dar}\ k \in \mathbb{N},\ \text{deci}\ \alpha \geqslant 2,\ (1);$$

$$n = 18 - 5\alpha \Rightarrow f(f(18-5\alpha)) + f(18-5\alpha) = 2(18-5\alpha) + 6 \Rightarrow f(11\alpha - 12) =$$

$$= 54 - 21\alpha \in \mathbb{N} \Rightarrow \alpha \leqslant \frac{54}{21};\ \text{dar}\ \alpha \in \mathbb{N},\ \text{deci}\ 0 \leqslant \alpha \leqslant 2, \qquad (2).$$

Din relațiile (1) și (2) rezultă că $\alpha = 2$, deci $f(0) = 2$.

Scanned with OKEN Scanner

Vom demonstra prin inducție că $f(2n) = 2n + 2$, pentru $(\forall)n \in \mathbf{N}$. Pentru $n = 0$ avem $f(0) = 2$, ceea ce este adevărat. Presupunem propoziția adevărată pentru $n = k$, adică $f(2k) = 2k+2$,(3), și să demonstrăm că propoziția este adevărată și pentru $n = k+1$, adică $f(2k + 2) = 2k + 4$. Pentru $n = 2k$ relația din enunț devine: $f(f(2k)) + f(2k) = 4k + 6$ și ținînd seama de (3) obținem: $f(2k + 2) + 2k + 2 = 4k + 6 \Rightarrow f(2k + 2) = 2k + 4$, ceea ce trebuia demonstrat. Prin urmare $f(2n) = 2n + 2$ pentru $(\forall)\, n \in \mathbf{N}$, (1).

Deoarece funcția f este injectivă, ținînd seama de (1), rezultă că $f(2n+1)$ este un număr impar pentru $(\forall)\, n \in \mathbf{N}$.

Să calculăm $f(1)$. Notăm $f(1) = \beta$, deci β este un număr natural impar. În relația din enunț îi dăm lui n valoarea 1. Obținem:

$$f(f(1)) + f(1) = 8 \Rightarrow f(\beta) = 8 - \beta \in \mathbf{N}, \ (4);$$

dar β este natural impar, deci $f(\beta)$ este impar și din (4) avem $\beta \in \{1, 3, 5, 7\}$. Vom arăta că singura valoare pe care o poate lua β este 3.

Dacă $\beta = 1$, adică $f(1) = 1$, din (4) avem $f(1) = 7$, contradicție.

Dacă $\beta = 5$, adică $f(1) = 5$, din (4) avem $f(5) = 3$: făcînd $n = 5$ în relația din enunț obținem:

$$f(f(5)) + f(5) = 16 \Rightarrow f(3) + 3 = 16 \Rightarrow f(3) = 13;$$

pentru $n = 3$, relația din enunț devine:

$$f(f(3)) + f(3) = 12 \Rightarrow f(13) + 13 = 12 \Rightarrow f(13) = -1 \notin \mathbf{N},$$

deci $f(1)$ nu poate lua valoarea 5.

Dacă $\beta = 7$, adică $f(1) = 7$, din (4) avem $f(7) = 1$; dar pentru $n=7$ relația din enunț se scrie:

$$f(f(7)) + f(7) = 20 \Rightarrow f(1) + 1 = 20 \Rightarrow f(1) = 19, \text{ contradicție.}$$

Prin urmare $\beta = 3$, adică $f(1) = 3$.

Demonstrăm prin inducție că $f(2n + 1) = 2n + 3$ pentru $(\forall)\, n \in \mathbf{N}$. Pentru $n = 0$ obținem $f(1)=3$, adevărat. Presupunem propoziția adevărată pentru $n = k$, adică $f(2k + 1) = 2k + 3$, (5) și să demonstrăm că și pentru $n = k + 1$ relația este adevărată, adică $f(2k + 3) = 2k + 5$.

Pentru $n = 2k + 1$, relația din enunț devine:

$$f(f(2k + 1)) + f(2k + 1) = 2(2k + 1) + 6,$$

și ținînd seama de (5), obținem:

$$f(2k + 3) + 2k + 3 = 4k + 8 \Rightarrow f(2k + 3) = 2k + 5,$$

ceea ce trebuia demonstrat. Deci $f(2n + 1) = 2n + 3$, $(\forall)\, n \in \mathbf{N}$, (ii).

Din (i) și (ii) rezultă că $f(n) = n + 2$ pentru $(\forall)\, n \in \mathbf{N}$.

Soluție bună au dat: *Onișor Ovidiu*, cl. a-X-a, Lic. ind. Cîmpia Turzii; *Neagu Paula*, cl. a X-a, Lic. ind. „Unirea" Focșani.

Clasa a XI-a

Problema 21109* (G.M. 5/1987, pag. 199)
Găsiți toate funcțiile continue în $x_0 = 0$, care verifică relația:

$$nf(nx) = f(x) + nx,$$

unde $n > 1$ este un număr natural fixat.

Matematika v škole, 3/1988

Scanned with OKEN Scanner

Soluție. Punem în relația din enunț $\frac{x}{n}$ în locul lui x. Obținem:

$$nf(x) = f\left(\frac{x}{n}\right) + x \text{ sau } f(x) = \frac{1}{n} \cdot f\left(\frac{x}{n}\right) + \frac{x}{n}.$$

În această relație înlocuind succesiv pe x cu $\frac{x}{n}$ apoi cu $\frac{x}{n^2}, \frac{x}{n^3}, \ldots, \frac{x}{n^k}$, $k \in \mathbb{N}^*$, și amplificîndu-le respectiv cu $\frac{1}{n}, \frac{1}{n^2}, \ldots, \frac{1}{n^k}$, obținem:

$$f(x) = \frac{1}{n} \cdot f\left(\frac{x}{n}\right) + \frac{x}{n},$$

$$\frac{1}{n} f\left(\frac{x}{n}\right) = \left(\frac{1}{n^2}\right) f\left(\frac{x}{n^2}\right) + \frac{x}{n^3},$$

$$\frac{1}{n^2} f\left(\frac{x}{n^2}\right) = \frac{1}{n^3} f\left(\frac{x}{n^3}\right) + \frac{x}{n^5},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\frac{1}{n^k} f\left(\frac{x}{n^k}\right) = \frac{1}{n^{k+1}} f\left(\frac{x}{n^{k+1}}\right) + \frac{x}{n^{2k+1}}.$$

Prin adunarea acestor relații și făcînd reducerile avem:

$$f(x) = \frac{1}{n^{k+1}} f\left(\frac{x}{n^{k+1}}\right) + \frac{x}{n}\left(1 + \frac{1}{n^2} + \ldots + \frac{1}{n^{2k}}\right).$$

Trecînd la limită pentru $k \to \infty$ avem:

$$f(x) = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{n^{k+1}} \cdot f\left(\frac{x}{n^{k+1}}\right) + \lim_{k\to\infty} \frac{x}{n} \cdot \frac{1 - \frac{1}{n^{2k+2}}}{1 - \frac{1}{n^2}}.$$

Dar f este continuă în 0 deci

$$\lim_{k\to\infty} f\left(\frac{x}{n^{k+1}}\right) = f(0) \text{ și } \lim_{k\to\infty} \frac{1}{n^{k+1}} \cdot f\left(\frac{x}{n^{k+1}}\right) = \frac{f(0)}{\lim\limits_{k\to\infty} n^{k+1}} = 0.$$

Deoarece $\lim\limits_{k\to\infty} \frac{x}{n} \cdot \frac{1 - \frac{1}{n^{2k+2}}}{1 - \frac{1}{n^2}} = \frac{nx}{n^2 - 1}$ rezultă $f(x) = \frac{nx}{n^2 - 1}$.

Soluție bună au dat: *Pascu Nelu*, cl. a XI-a, Lic. agroind. Călugăreni; *Stănică Daniel*, cl. a XI-a, Lic. ind. 3 Cîmpulung Muscel.

Scanned with OKEN Scanner

Clasa a XII- a

Problema 21120* (G.M. 5/1987, pag. 200)

Să se calculeze:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sin\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{\sin\left(1+\frac{2}{n}\right)}{\sqrt{n^2+2}}+\ldots+\frac{\sin\left(1+\frac{n}{n}\right)}{\sqrt{n^2+n}}\right).$$

Liviu Pîrșan

Soluția I, dată de *Sorin Rojca*, elev cl. a XI-a, Satu Mare. Notăm:

$$a_n=\frac{\sin\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{\sin\left(1+\frac{2}{n}\right)}{\sqrt{n^2+2}}+\ldots+\frac{\sin\left(1+\frac{n}{n}\right)}{\sqrt{n^2+n}}.$$

Deoarece $\sin\left(1+\frac{1}{n}\right)>0,\ \sin\left(1+\frac{2}{n}\right)>0,\ \ldots,\ \sin\left(1+\frac{n}{n}\right)>0$ avem dubla inegalitate:

$$\frac{\sin\left(1+\frac{1}{n}\right)+\sin\left(1+\frac{2}{n}\right)+\ldots+\sin\left(1+\frac{n}{n}\right)}{\sqrt{n^2+n}}\leqslant a_n\leqslant$$

$$\leqslant\frac{\sin\left(1+\frac{1}{n}\right)+\sin\left(1+\frac{2}{n}\right)+\ldots+\sin\left(1+\frac{n}{n}\right)}{\sqrt{n^2+1}},\qquad(1)$$

Se cunoaște că:

$$\sin(1+a)+\sin(1+2a)+\ldots+\sin(1+na)=\frac{\sin\frac{na}{2}\sin\left(1+\frac{a}{2}+\frac{na}{2}\right)}{\sin\frac{a}{2}}.$$

Dacă $a=\frac{1}{n}$ atunci

$$\sin\left(1+\frac{1}{n}\right)+\sin\left(1+\frac{2}{n}\right)+\ldots+\sin\left(1+\frac{n}{n}\right)=\frac{\sin\frac{1}{2}\cdot\sin\left(1+\frac{1}{2n}+\frac{1}{2}\right)}{\sin\frac{1}{2n}}.$$

Însă

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sin\frac{1}{2}\cdot\sin\left(1+\frac{1}{2n}+\frac{1}{2}\right)}{n\sin\frac{1}{2n}}=2\sin\frac{1}{2}\sin\frac{3}{2},$$

deoarece $\lim_{n\to\infty}\left(n\sin\frac{1}{2n}\right)=\frac{1}{2}$.

Scanned with OKEN Scanner

Deoarece pentru orice $p \in \mathbb{N}$, $p \in [1, n]$ avem

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sin\left(1+\frac{1}{n}\right)+\sin\left(1+\frac{2}{n}\right)+\ldots+\sin\left(1+\frac{n}{n}\right)}{\sqrt{n^2+p}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\sin\left(1+\frac{1}{n}\right)+\sin\left(1+\frac{2}{n}\right)+\ldots+\sin\left(1+\frac{n}{n}\right)}{n}$$

rezultă, ținînd seamă de inegalitățile (1) și de criteriul cleștelui, că $\lim_{n\to\infty} a_n = 2\sin\frac{1}{2}\sin\frac{3}{2}$.

Soluția a II-a. Deoarece $(\forall) n \in \mathbb{N}$ avem $c_n \leqslant a_n \leqslant b_n$ unde (a_n) este șirul a cărui limită vrem să o calculăm, iar:

$$c_n = \frac{\sin\left(1+\frac{1}{n}\right)+\sin\left(1+\frac{2}{n}\right)+\ldots+\sin\left(1+\frac{n}{n}\right)}{\sqrt{n^2+n}} \text{ și}$$

$$b_n = \frac{\sin\left(1+\frac{1}{n}\right)+\sin\left(1+\frac{2}{n}\right)+\ldots+\sin\left(1+\frac{n}{n}\right)}{\sqrt{n^2+1}}.$$

Dacă notăm:

$$d_n = \frac{1}{n}\left(\sin\left(1+\frac{1}{n}\right)+\sin\left(1+\frac{2}{n}\right)+\ldots+\sin\left(1+\frac{n}{n}\right)\right)$$

se știe că:

$$\lim_{n\to\infty} d_n = \int_0^1 \sin(1+x)\,dx = -\cos(1+x)\Big|_0^1 = \cos 1 - \cos 2 = 2\sin\frac{1}{2}\sin\frac{3}{2}.$$

Pentru că $\lim_{n\to\infty} c_n = \lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} d_n$ rezultă că și

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n = \lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} d_n = 2\sin\frac{1}{2}\sin\frac{3}{2}.$$

PROBLEME PENTRU LICEU

Clasa a IX-a

21429. Se dă triunghiul ascuțitunghic ABC și, fie N un punct pe segmentul (BC) și M un punct pe semidreapta $(BA$, astfel încît $\sphericalangle MAC \equiv \sphericalangle CNM$. Fie $MN \cap AC = \{Q\}$, $QP \parallel AB$, $P \in (BC)$.

Să se arate că dacă $\frac{AQ}{MQ} = \frac{1}{\sqrt{2}}$, atunci QN este mediană în triunghiul PQC.

Marius Lucian Pop, elev, Satu Mare

Scanned with OKEN Scanner

21430. În triunghiul ABC oarecare se notează cu h_a lungimea înălțimii dusă din A, cu R raza cercului circumscris și cu b respectiv c, lungimile laturilor AC respectiv AB. Arătați că:

$$|h_a - R| \leqslant \sqrt{R^2 - bc\cos B\cos C}.$$

C. Moldovan, elev, Satu Mare

21431*. Să se arate că într-un triunghi oarecare ascuțitunghic ABC între lungimile înălțimilor, lungimile bisectoarelor, raza cercului circumscris și raza cercului înscris există relația:

$$\frac{h_a}{i_a^2} + \frac{h_b}{i_b^2} + \frac{h_c}{i_c^2} = \frac{1}{R} + \frac{1}{2r}.$$

Nicolae Oprea, profesor, Livada, Satu Mare

21432*. Fie $z_1, z_2, \ldots, z_n$, n numere complexe nenule de același modul care satisfac relația:

$$z_2z_4 \ldots z_{n-1}z_n + z_1z_3 \ldots z_{n-1}z_n + \ldots + z_1z_2 \ldots z_{n-2} = 0.$$

Să se demonstreze că: $\quad z_1z_2 + z_2z_3 + \ldots + z_{n-1}z_n = 0.$

Marius Lucian Pop, elev, Satu Mare

21433. Dacă $a, b, c > 0$ arătați că:

$$\frac{9abc}{2(a+b+c)} \leqslant \frac{ab^2}{a+b} + \frac{bc^2}{b+c} + \frac{ca^2}{c+a} \leqslant \frac{a^2+b^2+c^2}{2}.$$

C. Moldovan, elev, Satu Mare

21434*. Fie $a, b, c \in (0,1)$ cu $a + b + c = 1$. Să se arate că:

$$\cos(a\pi) + \cos(b\pi) + \cos(c\pi) \geqslant 3(a\cos(a\pi) + b\cos(b\pi) + c\cos(c\pi)).$$

Cînd are loc semnul egal?

Imre Merenyi, profesor, Negrești-Oaș

21435*. Fie punctele B și C fixe în plan și A mobil astfel încît $m(\widehat{BAC}) = 90$. Pe catetele AB și AC construim în exteriorul triunghiului pătratele $ABDE$ și $AFCG$. Să se determine locul geometric al intersecției dreptelor DE și FG.

Constantin Onet, profesor, Satu Mare

21436. Laturile triunghiului MNP se prelungesc cu segmentele NC, PA, MB astfel încît: $\frac{PM}{MB} = \frac{NM}{NC} = \frac{NP}{PA} = 1$ și $M \in (PB)$, $N \in (MC)$, $P \in (AN)$. Să se arate că dacă triunghiul ABC este echilateral, atunci și triunghiul MNP este echilateral.

Alexandru Blaga, profesor, Satu Mare

21437. Fie funcțiile $f, g: A \to A$ cu proprietățile:

a) funcția g este bijectivă; b) $f \circ g^{-1} \circ f = 1_A$.

Să se arate că:

1) funcția f este bijectivă; 2) $f \circ f = g$; 3) $f \circ g = g \circ f$.

Rodica Pop, Satu Mare

21438*. Să se determine funcțiile $f: \mathbf{N}^* \to \mathbf{N}$ care verifică relația:

$$f(n+1) - f(n-1) = 4n, (\forall) n \in \mathbf{N}.$$

Alexandru Blaga, profesor, Satu Mare

Scanned with OKEN Scanner

21439. Aflați toate valorile lui $m \in \mathbf{Z}$, pentru care $A \cup B \subset \mathbf{Z}$ unde

$$A = \{x \in \mathbf{R} \mid x^2 - 5x + 7 - m = 0\}, \text{ iar}$$

$$B = \{x \in \mathbf{R} \mid x^2 = (m+1)(2x-m)\}.$$

Aurel Ene, profesor, Rm. Vîlcea

21440. Să se afle mulțimile A, B, T care satisfac simultan relațiile:

$$C_T(A \cup B) = \{7, 8, 9\};$$

$$C_B A = \{4, 5, 6\};$$

$$T \subseteq \{1\ 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}.$$

Florentin Smarandache, Craiova

21441*. Fie $ABCD$ un patrulater circumscriptibil, O centrul cercului înscris în el și I intersecția diagonalelor lui. Ducem prin I dreapta Δ, perpendiculară pe OI, și notăm cu M și N punctele de intersecție ale dreptei Δ cu două laturi opuse ale patrulaterului. Demonstrați că $(IM) \equiv (IN)$.

Mircea Bârsan, elev, Iași

21442. Se dă triunghiul ABC cu $m(\hat{A}) = 50°$ și $m(\hat{B}) = 60°$. Se consideră $M \in (AB)$ și $N \in (AC)$ astfel încît $m(\widehat{ABN}) = 20°$, $m(\widehat{ACM}) = 30°$. Să se determine $m(\widehat{ANM})$.

Alin Pop, profesor, Suplai, Zagra

Clasa a X-a

21443*. Să se arate că numărul $\underbrace{101010\ldots}_{n \text{ cifre}}$ este prim dacă și numai dacă $n = 3$.

Ovidiu Pop, Satu Mare

21444. Fie $f: \mathbf{R} \to (0, \infty)$ o funcție bijectivă și $a > 1$ un număr real. Să se rezolve sistemul de ecuații:

$$\begin{cases} a^{f(x_1)} + a^{f(x_2)} + \ldots + a^{f(x_n)} = n \cdot a^a, \\ \log_a f(x_1) + \log_a f(x_2) + \ldots + \log_a f(x_n) = n. \end{cases}$$

Laszlo Toth, profesor, Satu Mare

21445. Să se demonstreze că $(\forall) n \in \mathbf{N}$, numerele:

$$N_1 = 2^n \cdot 3 \cdot 5^{3n} + 2^{6n+2} \cdot 5^n,$$

$$N_2 = 2 \cdot 5^{2n} \cdot 6^n + 2^{3n} \cdot 5^{2+n} + 5 \cdot 2^{7n},$$

$$N_3 = 2^{2n} \cdot 3^{2n+1} \cdot 5^n + 3 \cdot 2^{n+1} \cdot 5^{2n} + 2^{7n+3},$$

$$N_4 = 2^{n+1} \cdot 3^{3n} \cdot 5^n + 7^{2n+1} + 2^{2n+3} \cdot 5^{2n}$$

sînt divizibile respectiv cu 7, 11, 13 și 17.

Petre Mecea, Satu Mare

21446*. Fie f un polinom cu coeficienți numere întregi și $f(19) \cdot f(88) = 5$. Să se arate că $f(k) \neq 1988$, oricare ar fi $k \in \mathbf{Z}$. Generalizare.

Emeric Horvath, profesor, Livada

Scanned with OKEN Scanner

21447. Considerăm trapezul $ABCD$ cu baza mare (AB) și $\{O\}=AC\cap BD$. Dacă V este un punct exterior planului $(ABCD)$, atunci:

a) $v[VAOB]\cdot v[VODC]=v[VAOD]\cdot v[VOBC]$;

b) $v[VAOB]+v[VODC]>[vAOD]+v[VOBC]$;

c) $\dfrac{v_1\cdot v_2}{v_3\cdot v_4}=\dfrac{AB^2\cdot DC^2}{AD^2\cdot BC^2}$,

unde v_1, v_2, v_3, v_4 reprezintă volumele conurilor de vîrf V și baze respectiv cercurile circumscrise triunghiurilor AOB, DOC, AOD, BOC.

Dan Maioreseu, profesor, Satu Mare

21448. Fie punctele mobile $M_1, M_2, \ldots, M_n$ situate pe laturile $[A_1A_2]$, $[A_2A_3]$, $\ldots[A_nA_1]$ ale poligonului convex $[A_1A_2\ldots A_n]$. Să se determine poziția punctelor M_i, $i\in\{1,2,\ldots,n\}$, astfel încît aria poligonului $[M_1M_2\ldots M_n]$ să fie maximă, știind că: $M_1M_2\|A_1A_3$, $M_2M_3\|A_2A_4$, $\ldots, M_{n-1}M_n\|A_{n-1}A_1$.

Monica Gătină, profesoară, Satu Mare

21449*. Fie ABC un triunghi isoscel $(AB)\equiv(AC)$ și $M\in(BC)$ un punct mobil. Notăm O_1, G_1 centrul cercului circumscris, respectiv centrul de greutate al triunghiului ABM. Analog definim O_2, G_2 pentru triunghiul ACM. Considerăm K, L respectiv mijloacele segmentelor (O_1O_2) și (G_1G_2). Să se arate că dreapta KL trece printr-un punct fix cînd M parcurge (BC).

Sorin Rojea, elev, Satu Mare

21450*. În triunghiul oarecare ABC pe latura (BC) se consideră punctele mobile M_1 și N_1 astfel încît $\dfrac{1}{M_1C}+\dfrac{1}{N_1B}=\dfrac{3}{BC}$. Fie $NM_1\|AC$ și $NN_1\|AB$ $(M\in(AB)$, $N\in(AC))$. Să se arate că MN trece printr-un punct fix.

Călin Burdușel, profesor, Tîrgoviște

21451*. Fie $A_1A_2A_3\ldots A_{24}$ un poligon regulat înscris într-un cerc de rază R. Să se arate că:

$$R^2=A_1A_2(A_1A_{10}+A_1A_{12}).$$

Neculai Roman, profesor, Scheia, Iași

21452. Arătați, fără tabele că: $\sin\dfrac{13\pi}{34}>\dfrac{1}{16}$.

Lucian Buliga, profesor, Dealu Lung

21453. Să se demonstreze că

$$(3^m-1)^n+(3^n-2^n)^m\geqslant 3^{mn}$$

pentru orice m, $n\in\mathbb{N}$, $m\geqslant 1$, $n\geqslant 1$.

Gh. Cărjă, profesor, Vaslui

21454. Să se rezolve ecuația:

$$A_x^0+A_x^1+2A_{x+1}^2+3A_{x+2}^3+\ldots+nA_{x+n-1}^n=A_{n+2-x}^{n+2-x},\ n\in\mathbb{N}^*.$$

Nicolae Bișboacă, profesor, Alba Iulia

21455*. Într-o piramidă triunghiulară $SABC$, fie A', B', C' proiecțiile vîrfului piramidei pe laturile (BC), (AC) respectiv (AB), ale triunghiului ABC. Dacă $[SA']\equiv[SB']\equiv[SC]$, atunci dreptele AA', BB', CC' sînt concurente.

Florin Nicolaescu, matematician, Balș

Scanned with OKEN Scanner

21456. Fie un triunghi oarecare ABC de laturi a, b, c și semiperimetru p. Fie I_a, I_b și I_c centrele cercurilor exînscrise de raze r_a, r_b respectiv r_c. Notăm cu T aria triunghiului $I_aI_bI_c$. Să se arate că:

1°. $AI_a = \dfrac{2T\cos\dfrac{A}{2}}{r_b + r_c}$;

2°. $\dfrac{r_a r_b r_c}{abc} = \dfrac{2T}{p^2}$.

Bogdan Suceavă, elev, București

Clasa a XI-a

21457. Să se arate că numărul

$$N = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 2 & 3 & 2 \\ 8 & 7 & 8 & 7 & 8 \\ 9 & 7 & 5 & 3 & 1 \\ 2 & 7 & 4 & 9 & 6 \\ 0 & 2 & 4 & 6 & 8 \end{vmatrix}$$

este divizibil cu 1988.

Gh. Cauleș, Brăila

21458. Se consideră șirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definit prin relația

$$x_{n+1} = \frac{x_n^2}{x_n - k}, \text{ unde } k > 0 \text{ și } x_1 > k.$$

Calculați: a) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$; b) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{x_n}$.

Mihaela Banyai, profesoară, București

21459*. Dacă A, $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ și $AB = O_n$ atunci

$$\det\left(I_n + \frac{1}{2}A + \frac{1}{3}B + \frac{1}{4}A^2 + \frac{1}{9}B^2\right) \geqslant 0.$$

Generalizare.

D. M. Bătinețu-Giurgiu

21460*. Să se rezolve ecuația $\sin ax - a\sin x = (a^2 + 1)x$, $a \in \mathbb{R}$.

Ioan Bogdan, profesor, Ciceu-Giurgești, Bistrița-Năsăud

21461*. Fie $A \in M_n(\mathbb{R})$ o matrice în care $a_{ij} = 0$ pentru $i + j =$ par, $1 \leqslant i, j \leqslant n$. Să se arate că dacă $n =$ impar, atunci determinantul matricei A este nul.

Gheorghe Bordea, Constanța

21462. Se consideră matricea

$$A = \begin{pmatrix} a+b & 0 & a \\ 0 & b & 0 \\ a & 0 & a+b \end{pmatrix}, \text{ unde } a, b \in \mathbb{R}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Să se determine A^n unde $n \in \mathbf{N}$.

Aurel Nelea, Lăşnad, Satu Mare

21463. Să se arate că

$$\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)-\ln\left(1+\frac{1}{n+1}\right)>\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\ln\left(1+\frac{1}{n+1}\right), \quad (\forall)\ n\in\mathbf{N},\ n\geq 1.$$

Laszlo Toth, profesor, Satu Mare

21464. Să se calculeze limita şirului $(a_n)_{n\geq 1}$, unde

$$a_n=\sum_{k=1}^{n}\operatorname{tg}\frac{1}{k(k+1)n}.$$

Olosz Ferenc, profesor, Satu Mare

21465. Să se calculeze

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\varphi(n)\sigma(n)},$$

unde $\varphi(n)$ este indicatorul lui *Euler*, iar $\sigma(n)$ notează suma divizorilor pozitivi ai lui n.

Laszlo Toth, profesor, Satu Mare

21466. Şirul $(a_n)_{n\geq 1}$ este definit prin recurenţă astfel: $a_1=2(m+1)$, $a_{n+1}=\frac{1}{4m}\ (ma_n-$ $-1+\sqrt{1+2ma_n}\ )$, $m\in\mathbf{N}^*$. Să se găsească expresia termenului a_n, $(\forall)n\in\mathbf{N}^*$.

Florin Rotaru, matematician, Focşani

21467*. Fie matricea $A_\alpha\in\mathcal{M}_3(\mathbf{C})$, $\alpha\in\mathbf{C}^*$,

$$A_\alpha=\begin{pmatrix} a+\alpha & 0 & b \\ 0 & a+b & 0 \\ b & 0 & a+\alpha \end{pmatrix}.$$

Să se calculeze A^n, $n\in\mathbf{N}$.

Iacob Hoparţean, profesor, Ocna Mureş

21468*. Pe un cerc de centru O se iau punctele A, B, C, M. Să se demonstreze că cercurile descrise pe coardele AM, BM, CM ca diametri se intîlnesc două cîte două în trei puncte coliniare.

21469. Să se calculeze

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1988^{\frac{1}{n}}}{n+1}+\frac{1988^{\frac{2}{n}}}{n+\frac{1}{2}}+\ldots+\frac{1988^{\frac{n}{n}}}{n+\frac{1}{n}}\right).$$

Liviu Pîrşan

21470*. Fie $a<c<b$ şi $f:(a,b)\setminus\{c\}\to\mathbf{R}$ o funcţie cu proprietăţile:

1. f are proprietatea *Darboux* atît pe (a,c), cît şi pe (c,b).
2. $(\exists)\ (a_n)_{n\geq 1}\subseteq(a,c)$ şi $(b_n)_{n\geq 1}\subseteq(c,b)$ astfel încît $a_n\to c$, $b_n\to c$ şi $\lim_{n\to\infty}f(a_n)=\lim_{n\to\infty}f(b_n)\in\mathbf{R}$.

Atunci f poate fi prelungită la o funcţie cu proprietatea *Darboux* pe (a,b).

Gh. Strefeki

Scanned with OKEN Scanner

21471*. Fie $P \in \mathbf{R}[X]$ un polinom de gradul n cu rădăcinile $x_i (i=\overline{1,n})$ reale distincte și coeficient dominant 1. Fie $x_m = \min\limits_{i=\overline{1,n}}\{x_i\}$ și $x_M = \max\limits_{i=\overline{1,n}}\{x_i\}$. Să se arate că:

1) $P(x)(P'(x) - P''(x)) < 0$, $(\forall)\ x \in (-\infty, x_m)$;

2) $P(x)(P'(x) + P''(x)) > 0$, $(\forall)\ x \in (x_M, \infty)$.

Cornel B. Bolovan, profesor, Colțești, Vîlcea

21472. Fie $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ o funcție derivabilă și F o primitivă a sa. Dacă $F(0) - F(1) = f(1)$, atunci $(\exists)\ c \in (0,1)$ astfel încît $2f(c) + c \cdot f'(c) = 0$.

Aurel Ene, profesor, Rm. Vîlcea

21473. Considerăm funcția $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = x^3 + ax + b$, unde $a, b \in \mathbf{R}$ cu proprietățile $a \leqslant -3$ și $b - a = 1$. Să se calculeze în funcție de parametrul a aria S a mulțimii plane mărginite de graficul funcției f și axa Ox. Să se găsească minimul acestei arii.

Adalbert Kovacs, profesor, Satu Mare

21474. Să se determine funcțiile $f, g : I \to \mathbf{R}$, $I \subset \mathbf{R}$, interval, astfel încît f să fie o primitivă a lui g și g să fie o primitivă a lui f.

Rodica Pop, Satu Mare

21475*. Să se calculeze:

$$\int_0^1 \frac{4x^4 - 3x^3}{e^x + 3x^2 + 2x + 1}\,dx.$$

Gh Micläuș, profesor, Satu Mare

21476*. Să se calculeze:

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{i}{n} \operatorname{arctg} \frac{n}{n^2 + i(i-1)}$;

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{i}{\sqrt{i^2 + n^2}} \operatorname{arctg} \frac{n}{n^2 + i(i-1)}$.

Sorin Rojea, elev, Satu Mare

21477*. Să se determine funcțiile derivabile $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ $(a < b)$, cu proprietatea că funcția $\{f\} : [a, b] \to \mathbf{R}$ este o primitivă a funcției f. (S-a notat cu $\{a\}$ partea fracționară a numărului real a).

Ovidiu Pop, Satu Mare

21478. Dacă un polinom $p \in \mathbf{R}[X]$ de gradul 5 are rădăcinile în progresie aritmetică, să se arate că și polinomul $p'' \in \mathbf{R}[X]$ admite rădăcinile în progresie aritmetică și cele două polinoame au o rădăcină comună.

Florin Rotaru, matematician, Focșani

21479. Folosind regula lui Cramer să se rezolve sistemul de ecuații liniare cu coeficienți în $\mathbf{Z}_5$:

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 5 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 11. \end{cases}$$

* * *

Scanned with OKEN Scanner

21480*. Demonstrați că mulțimea matricilor de forma:

$$\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ -b & a & -d & c \\ -c & d & a & -b \\ -d & -c & b & a \end{pmatrix}, \quad a, b, c, d \in \mathbb{R},$$

formează împreună cu adunarea și înmulțirea matricelor un corp necomutativ.

* * *

21481. A fiind un inel comutativ cu element unitate să se arate că în $A[X]$ avem:

a) $x^2 + x + 1 \mid x^{14} + x^7 + 1$;

b) $x^2 + 3x + 2 \mid (x+1)^{3n+2} + (x+2)^{3n+1}$;

c) $x^2 + x + 1 \mid x^{6n-1} + x + 1$.

* * *

21482*. Să se calculeze: $\int \frac{\arcsin(e^x)}{e^x}\,dx$.

* * *

21483. Să se calculeze: $\int \frac{\operatorname{arctg}(e^{\frac{x}{2}})}{e^{\frac{x}{2}}(1+e^x)}\,dx$.

21484. Să se demonstreze inegalitatea:

$$\int_2^3 x^{\frac{x}{2}}\,dx > \frac{2}{\ln 2}.$$

Antonela Kecs, studentă, București

PROBLEME PREGĂTITOARE PENTRU O.I.M. și O.B.M.

O : 548. În triunghiul ABC notăm cu a, b, c lungimile laturilor, cu m_a, m_b, m_c lungimile medianelor, cu l_a, l_b, l_c lungimile bisectoarelor, iar cu s_a, s_b, s_c lungimile simedianelor. Notăm de asemenea cu $\omega = \max(a, b, c) - \min(a, b, c)$. Să se demonstreze inegalitățile:

a) $s_a + s_b + s_c \leqslant m_a + m_b + m_c \leqslant s_a + s_b + s_c + 2\omega$;

b) $m_a + m_b + m_c \leqslant l_a + l_b + l_c + \omega$.

Mircea Lascu, profesor, Zalău

O : 549. Să se demonstreze că nu există aplicații injective definite pe spațiul euclidian cu valori în planul euclidian care transformă cercurile în cercuri.

Marius Cavachi, profesor, Constanța

O : 550. Să se găsească $n \in \mathbb{N}$ astfel încît $2^n + 3^n + 4^n$ să fie pătrat perfect.

Lucian Tuțescu, Craiova

Scanned with OKEN Scanner

O : 551. Să se determine numerele de n cifre $\overline{a_1a_2\ldots a_n}$ care verifică egalitatea:

$$n \cdot \overline{a_1a_2 \ldots a_n} = \overline{a_na_{n-1}\ldots a_1}.$$

Alexandru Blaga, profesor, Satu Mare

O : 552. Rezolvați în numere reale sistemul

$$\frac{2x^2}{x^2+1} = y\,;\quad \frac{3y^3}{y^4+y^2+1} = z\,;\quad \frac{4z^4}{z^6+z^4+z^2+1} = x.$$

* * *

O : 553. Demonstrați că într-un triunghi oarecare avem:

$$3a^2 + 3b^2 - c^2 \geqslant 4\sqrt{3}\,S.$$

* * *

PROBLEME PENTRU CONCURSUL ANUAL AL REZOLVITORILOR

Clasele a IX-a și a X-a

C : 785. Fie n un număr natural. Să se demonstreze că:

a) Dacă n este par, între 3^n și 3^{n+1} există o singură putere naturală a lui 2;

b) Dacă n este impar, între 3^n și 3^{n+1} există exact două puteri naturale ale lui 2.

Nicolae Popescu

C : 786. Calculați partea întreagă a numărului real:

$$a = \sqrt{6+\sqrt{6+\ldots+\sqrt{6}}} + \sqrt[3]{6+\sqrt[3]{6+\ldots+\sqrt[3]{6}}},$$

(Numărul radicalilor este n).

(Matematika v škole 1/1987)

C : 787. Fie $ABCDEF$ un hexagon convex înscris într-un cerc. Să se arate că: $AB \cdot CD \cdot EF = BC \cdot DE \cdot FA$ dacă și numai dacă AD, BE, CF sînt concurente.

Virgil Nicula, profesor, București

C : 788. Fie $\mathcal{C}(O, R)$ cercul circumscris triunghiului dreptunghic ABC, cu $m(\hat{A}) = \frac{\pi}{2}$, $[DE]$ diametrul cercului $\mathcal{C}$ perpendicular pe OA, P un punct pe (DE), iar A_1, B_1, C_1 punctele în care dreptele PA, PB,

PC intersectează a doua oară cercul $\mathscr{C}$. Să se arate că:

$$\sigma[ABC] \geq \sigma[A_1B_1C_1].$$

V. Cîrtoaje, Ploiești și *M. Lascu*, Zalău

C : 789. Să se arate că dacă numerele naturale $a_1, a_2, \ldots, a_{3n}$ în progresie aritmetică verifică relația

$$\frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} - \frac{1}{a_4} + \ldots + \frac{1}{a_{2n-1}} - \frac{1}{a_{2n}} =$$

$$= \frac{1}{a_{n+1}} + \frac{1}{a_{n+2}} + \ldots + \frac{1}{a_{2n}}$$

atunci verifică și relația

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} - \frac{2}{a_3} + \frac{1}{a_4} + \frac{1}{a_5} - \frac{2}{a_6} + \ldots + \frac{1}{a_{3n-2}} + \frac{1}{a_{3n-1}} -$$

$$- \frac{2}{a_{3n}} = \frac{1}{a_{n+1}} + \frac{1}{a_{n+2}} + \ldots + \frac{1}{a_{3n}},$$

și reciproc.

Florin Rotaru, matematician, Focșani

C : 790. Dacă $a_1, a_2, \ldots, a_n \in [1, +\infty)$ sau $a_1, a_2, \ldots, a_n \in (0,1)$, $n \in \mathbf{N}$, arătați că:

$$(1 + a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n)^n \geq (a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n)^{\frac{n-1}{2}} \cdot (1 + a_1)(1 + a_2) \ldots (1 + a_n).$$

C. Caragea și *G. Bordea*, Constanța

C : 791. Să se rezolve în $\mathbf{C} \times \mathbf{C} \times \mathbf{C}$ sistemul

$$xy + x + y = 3; \quad yz + y + z = 8; \quad zx + z + x = 15.$$

Ștefan Tache, profesor, Cîmpina

C : 792. Să se determine funcțiile $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ care au proprietatea că $f(x + 1) = f(x) + x^3$, $(\forall) x \in \mathbf{R}$. Generalizare.

Florin Vulpescu-Jalea, profesor, București

Clasele a XI-a și a XII-a

C : 793. Fie $f(X) = a_0X^n + a_1X^{n-1} + \ldots + a_{n-1}X + a_n$ un polinom cu coeficienți reali care are toate rădăcinile reale și conținute în intervalul $(-1,1)$. Să se arate că

$$-1 < \frac{a_1 + a_3 + a_5 + \ldots}{a_0 + a_2 + a_4 + \ldots} < 1.$$

Mircea Becheanu, București

Scanned with OKEN Scanner

C : 794. Fie $(G, \cdot)$ un grup și $a \in G$ fixat. Pentru $k \in \mathbf{N}^*$, un număr prim, dacă $x^{2k} = (ax)^k$, $(\forall)\, x \in G$ atunci $x^k = e$, $(\forall)\, x \in G$, unde e este elementul neutru al grupului $(G, \cdot)$.

Radu Gramatovici, elev, București

C : 795. Fie $(a_n)_{n>1}$ un șir strict crescător de numere naturale nenule și având proprietatea că a_{n+1} se divide cu a_n, pentru orice $n \geqslant 1$. Să se demonstreze că seria $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n}$ este convergentă.

Ion Toderiță, profesor, Galați

C : 796. Fie $(G, \cdot)$ un grup abelian, $(H, \cdot)$ un subgrup al său, iar $n \geqslant 2$ un număr natural. Notăm $\sqrt[n]{H} = \{x \in G \mid x^n \in H\}$.
Să se demonstreze că :

a) $\sqrt[n]{H}$ este un subgrup al lui G, care include subgrupul H și pentru orice $i, j \in \mathbf{N}$, $i \geqslant 2$, $j \geqslant 2$ avem egalitatea

$$\sqrt[i]{\sqrt[j]{H}} = \sqrt[ij]{H};$$

b) Dacă H este un subgrup finit cu n elemente al lui G, atunci H este subgrup și al lui $\sqrt[n]{\{e\}}$, e fiind elementul neutru din G;

c) Dacă avem un corp comutativ $(K, +, \cdot)$ în care notăm $G = (K^*, \cdot)$, iar H este un subgrup cu $n \geqslant 2$ elemente al lui G, atunci există egalitatea $H = \sqrt[n]{\{1\}}$, 1 fiind elementul unitate din corpul K;

d) Dacă $G = (\mathbf{C}^*, \cdot)$ și $H = \bigcup_{i \geqslant 2} \sqrt[i]{\{1\}}$, atunci pentru fiecare $n \geqslant 2$ natural, avem egalitatea $\sqrt[n]{H} = H$.

Marcel Țena

C : 797. Să se calculeze limita :

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2} \left(n - \sum_{k=1}^{n} \cos kx \cdot \cos(k+1)x \cdot \ldots \cdot \cos nx \right).$$

Octavian Georgescu, elev, București

C : 798. Fie $(A, +, \cdot)$ un inel cu $0 \neq 1$ și $xy = 1 \Rightarrow yx = 1$. Să se demonstreze că inelul A este izomorf cu Z_2 dacă și numai dacă există $a, b \in A$ și un endomorfism injectiv $f : A \to A$ cu proprietățile $(f \circ f)(x) + f(x) = a$, $(\forall)\, x \in A$ și $(f \circ f)(x) \cdot f(x) = b$, $(\forall)\, x \in A^* = A \setminus \{0\}$.

D. M. Bătinețu-Giurgiu

Scanned with OKEN Scanner

C : 799. Fie $a, b \in \overline{\mathbf{R}}$ cu $a < b$ și funcția $f : (a, b) \to \mathbf{R}$ derivabilă cu proprietatea că $\lim_{x \searrow a} |f(x)| = +\infty$

Dacă $\lim_{x \searrow a} f'(x)$ există, atunci nu este finită.

(În legătură cu corolarul 3 de la pag. 210 din „Calcul diferențial și integral", vol. 1, de *Gh. Sireți*).

Costel Chiteș, profesor, Bacău

C : 800. Fie S_n grupul permutărilor de n elemente. Să se demonstreze că orice element din S_n este de ordin $\leqslant 4$ dacă și numai dacă $n \leqslant 4$.

Silviu Stössel, profesor, București

PROBLEME DE INFORMATICĂ

I : 333. Să se elaboreze un algoritm și un program FORTRAN pentru a determina cel mai mic pătrat perfect care începe cu $\overline{a_1 a_2 \ldots a_n}$, $a_1 \neq 0$, $a_i \in \{0, 1, 2, \ldots, 9\}$, $i = 1, 2, \ldots, n$.
(În legătură cu problema E : 9065 din G. M. nr. 2/1987).

Petre Rau, analist principal, Centrul de Calcul Galați

I : 334. Să se arate că orice permutare de grad 4 se poate scrie ca produsul a cel mult trei transpoziții. Să se scrie programul BASIC pentru generarea tuturor permutărilor de gradul patru.

Silviu Stössel, profesor, București

I : 335. Un număr de n apartamente trebuiesc repartizate la n persoane, fiecărei persoane atribuindu-se doar un singur apartament și fiecare apartament se atribuie doar unei singure persoane. Fiecare persoană prezintă o listă de preferințe pentru anumite apartamente. Să se elaboreze un algoritm și un program FORTRAN pentru a rezolva problema repartizării celor n apartamente astfel încît satisfacerea preferințelor să fie maximă.

(Dintr-o problemă dată la concursul Internațional de programare al informaticienilor din industria metalurgică, desfășurat în aprilie 1987 în R. P. Ungară).

Petre Rau, analist principal, Centrul de Calcul Galați

I : 336. Să se scrie programul pentru determinarea coeficienților polinomului $P(X) = X^n + a_1 X^{n-1} + \ldots + a_n$ cunoscîndu-se rădăcinile ecuației $P(X) = 0$. (Se va studia soluția problemei 11 propusă de U.R.S.S. la a XXVI-a O.I.M., G.M.4/1986, pag. 99).

Silviu Stössel, profesor, București

Scanned with OKEN Scanner

RUBRICA REZOLVITORILOR DE PROBLEME

CAPU-CODRULUI (SUCEAVA) Ş.g. cl. VI Brăteanu Mihaela (200). **CARACAL** (OLT) Ş.g. 7 Botar Octavian Ionuţ (100). Dragu George (109). **CARANSEBEŞ** (CARAŞ-SEVERIN) Ş.g. 8 cl. V Brătescu Lavinia (60), Cocie Lăcrămioara (129), Cullcă Florin (140), cl. VI Pipa Daria (146), Popa Bochiş Adrian (93), Toma Sorin (20); Lic. pedagogic cl. VI Mitran Ramona (68). **CĂLĂRAŞI** (CĂLĂRAŞI) Ş.g. 4 cl. VI Marcu Claudiu (88), Pantilie Simona (200); Ş.g. 5 cl. VI Budu Ana Mari (70), Vlăsceanu Cristinel (90), cl. VII Alecu Marius Iulian (80), Brebeanu Răzvan (74), Dincă Gabriela (93), Ilie Dorin Gabriel (68), Iliuţă Rozalia (90), Sebea Cosmin (100), cl. VIII Tudosiu Cristinel (80); Ş.g. 9 cl. VI Catalol Laurenţiu-Ştefan (183). **CEAMURLIA DE SUS** (TULCEA) Ş.g. cl. VII Pelican Tanţa (90). **CERNAVODĂ** (CONSTANŢA) Ş.g. 1 cl. IV Rupeanu Mihaela (280). **CERNIŞOARA** (VÎLCEA) Ş.g. Mădulari cl. II Ionescu Claudiu Mariu» (78), cl. VI Ionescu Ovidiu-Daniel (193). **CIREŞU** (BRĂILA) S.g. de 10 ani cl. V Bogdan E. Steluţa (74), Coman M. Mariana (80), Gheorghiţă Alina (60), cl. VI Cheorghică Cristina (60). **CÎMPINA** (PRAHOVA) Ş.g. 2 cl. V Mihai Ştefan (100), Popescu Mihaela-Esmeralda (100); Lic. ind. 5 cl. IX Dimache Cristina (120), Frincu Mihaela (120). **CÎMPULUNG** (SUCEAVA) Ş.g. 3 cl. VI Bologa Simona (80), Marin Eugenia (100), Pituari Gabriela (80), Scripcă Bogdan (80). **CÎMPULUNG MUSCEL** (ARGEŞ) Ş.g. 5 cl. V Iacob Loredana (60), Popa Ramona (50); Ş.g. 7 cl. V Catrinu Dana (95); Lic. ind. 3 cl. IX Stănică Daniel (483). **CÎMPIA TURZII** (CLUJ) Ş.g. 5 cl. VII Pitic Antoniu Gabriel (141). **CLUJ-NAPOCA** (CLUJ) Ş.g. 6 cl. VI Listeş Ovidiu (80); Ş.g. 15 Dolean Victoriţa (76); Ş.g. 21 cl. VII Prodan Radu (198); Lic. ind. „N. Bălcescu" cl. V Potfălean Daniel (84), cl. VI Costişor Adrian (81), cl. VII Bologa Cristian (100). **COMARNA** (IAŞI) Ş.g. cl. VI Botez Georgiana (100). **CONSTANŢA** (CONSTANŢA) Ş.g. 5 cl. V Popa Iosif Octavian (80); Ş.g. 7 cl. V Pînzaru Angi (70); Ş.g. 29 cl. VI Andrieş Alin Răzvan (100). **COPALNIC-MĂNĂŞTUR** (MARAMUREŞ) Ş.g. cl. VII Cozma Cosmin (72), Oroş Oana Lia (80). **CORBU** (HARGHITA) Ş.g. 1 cl. V Cîmpion Elena Angela (73). **COROD** (GALAŢI) Ş.g. cl. VI Racoviţă Mirela (109). **COSTEŞTI** (VÎLCEA) Ş.g. cl. IV Predescu Ştefan (160), Sîrbu Aura (70), cl. V Cîrstoiu Raul (120). **CRAIOVA** (DOLJ) Ş.g. 5 Vasile Ionuţ (80); Ş.g. 11 cl. V Căpraru Cătălin (100), cl. VI Cioroianu Dana 98), Iovan Victor (97), Strugariu Mihai (100); Ş.g. 16 cl. V Popa Nicoleta (80); Ş.g. 19 cl. VI Belega Carmen (130), Neniu Mădălina (75); Ş.g. 21 cl. VI Mitrică Florin (68); Ş.g. 22 cl. VI Burci Oana (77), Tobă Mihai (201); Ş.g. 31 cl. VII Păţuleanu Diana (69); Ş.g. 33 cl VI Bezerghianu Adrian (65), Strîmbeanu Marius Cristina (73); Ş.g. 37 cl. V Safta Ionuţ (71); Lic. fil.-ist. cl. VI Giumancă Petru (69), Pîrtilă George (69), Văcariu Claudiu (70), cl. VII Mitricună Constantin (75); Lic. „Fraţii Buzeşti" cl. VI Voinea Sorinel (103), Zamfir Cristian (112). **CRIVINA** (MEHEDINŢI) Ş. g. cl. VI Cotargea Vlorel Cătălin (120). **CUDALBI** (GALAŢI) Ş.g. 1 cl. V Barbu Fănel (96), Crăciun Ionica (180), Drugan Alexandrina (100), Gradea Nicuşor (123), Irugan Dumitru (163), Istrate Daniela (150), Lazăr Valeriu (180), Mocanu Săndel (100), Rozinca Maricica (130), cl. VI Ambrinoc Ionel (190), Andrunache Nicolae (228), Boeru Nicoleta (230), Carp Antoneta (200), Carp Maricela (220), Clobanu Nicoleta (211), Crăciun Tiţa (109), Crihană Angela (162), Goga Elvira (220), Istrate Costela (216), Krampulz Mirabela (230), Sava Oprişan (210), Tască Tincuţa (140), Tănase Niculina (200), Tulearcă Ionică (210), Virlan Costinela (230). **CUGIR** (ALBA) Ş.g. 2 cl. V Băcilă Dragoş (50). **CURTEA** (TIMIŞ) Ş.g. cl. VI Modovan Florin (90). **CURTEA DE ARGEŞ** (ARGEŞ) Ş.g. 1 cl. VI Armeanu Daniel (135); Ş.g. 6 cl. VI Ungureanu Iulia (100). **CUZDRIOARA** (CLUJ) Ş.g. cl. V Mănăsturean Adrian (40).

ALEXANDRIA (TELEORMAN) S. g. 3 cl. VII Mitu Alina (120). **ARAD** (ARAD) Lic. ind. 12 cl. V Moisescu Alciona (90), Omota Ciprian (80); Lic. „I. Slavici" cl. VII Verzea Ouorina (200). **AZUGA** (PRAHOVA) S.g. cu cl. I—X cl. VII Dumitrescu Cristiana (100), Sasu Florin (40), Ureche Ioana (50).

BĂILE HERCULANE (CARAŞ SEVERIN) S.g. cl. VII Kaszony Claudia (30). **BĂILEŞTI** (DOLJ) S.g. cls. I—VIII cl. VI Ungureanu Traian (50). **BĂLCEŞTI** (VÎLCEA) S.g. cl. VIII Găianu Marian (100). **BACĂU** (BACĂU) S.g. 18 cl. V Potoroacă Eglapie (234); S.g. 27 cl. V Boilă Roxana (70), Neli Irina (70). Zaharia Violeta (75). **BAIA MARE** (MARAMUREŞ) S.g. 4 cl. V Nechita Simona (100); Lic. ind. 8 cl. V Zaharia Ovidiu-Marcel (90); S.g. 14 cl. V Vasiliu Cornelia (95). **BARAOLT** (COVASNA) S. g. 1 cl. VII Szabo Laura (100). **BEIUŞ** (BIHOR) Lic. „Samuil Vulcan" cl. V Mincic Răzvan (30). **BILTENI** (GORJ) S.g. Moi cl. VI Cotoi Carmen (70). **BIRLAD** (VASLUI) S.g. 8 cl. VI Fecceru Gabriel (180). **BISTRIŢA** (BISTRIŢA-NĂSĂUD) Lic. „L. Rebreanu" cl. VI Cătană Oana Camelia (100). **BOTOŞANI** (BOTOŞANI) S.g. 7 cl. V Cărăuşu George (100), Iliescu Irina (75), cl. VI Mustaţă Magdalena (110), cl. VII Apetrei Gabriel (120), Constantinică Oana (115), Lucan Anca Nicoleta (130); S.g. 12 cl. V Danileţ Loredana (79), cl. IV Ştefanache Simona (90), cl. VII Andone Carmen (72), Honciuc Graţiela (80). **BRAŞOV** (BRAŞOV) S.g. 5 cl. V Mihălăchioaie Călin (50); S.g. 6 cl. V Cauzac Mirela (100), Cojocaru Wanda (70); S.g. 27 cl. V Brînzea Antina (81), Cazacu Aurelia (90). **BREZOI** (VÎLCEA) Lic. ind. cl. V Mihăescu Mihai (80). **BRĂILA** (BRĂILA) S.g. 10 cl. V Bordea Tudor (90); S.g. 18 cl. VI Canteş Cătălin (110); S. g. 22 cl. V Pătu Ghe. Vlorel (100), Gheorghe

Scanned with OKEN Scanner

Liliana (100), Gurău Florin (100), Iancu Sorin (100), Ioniță Aida (100), Manolache Nicu (100), Neculai Carmen (100), Nica Stănica (100), Răilleanu Violeta (100), Stroe Mihaela (100), Untea Gilbert (100), Vilcu Daniela (100); S.g. 23 cl. V Teortoi Viorel (90), cl. VI Mogodeanu Aura (120): S.g. 32 cl. VII Tătărcă Veronica (90); Lic. „Gh. Munteanu" cl. IX Mogodeanu Eugen (90). **BUCUREȘTI** S.g. 1 cl. VI Paven Horia Apostol (230): S.g.5 cl. VII Grama Matei Daniel (130), Stanciu Nicolae (81); S.g. 11 cl III Albu Andrei (180); S.g. 27 cl. V Frangu Brîndușa (80); S.g 45 cl VII Munteanu Dragoș (100); S.g. 50 cl. V Toader Ciprian (90); S.g. 79 cl. VI Stănoiu Mihai Alexandru (343): S.g. 96 cl. VII Dănilă Gențiana (80); S.g. 117 cl. VI Stoica Andreea (120); S.g. 156 cl. VI Barbu Silvia (80), Drăgoi Alexandru (100), Dumitru Andreea (260), Filimon Mădălina (70), Horneț Otilia (200), Isăilă Mariana (260), Scurtu Diana (165), cl. VII Bulgaru Cristina (30), Sbârnea Emanuela (282); S.g. 157 cl. V Ghidarcea Mihai (100): S.g 172 cl. V Bănică Valeria (175), Dănculș Andrei (127), Dinu Ciprian (69), cl. VIII Bănică Teodor (210); S.g. 174 cl. V Grădeanu Ionuț (90), cl. VI Ardeleanu Monica (50), Nicolae Anda (150), Panduru Anca (80): S.g. 199 cl. V Guță Bogdan (110); S.g. 201 cl. V Dumitrescu Modica (90); Lic. mat.-fiz. 3 cl. X Iordache Cristina (130); Lic. 34 cl. VIII Bătătorescu Cosmin (160); Lic. „Zoia Kosmodemianskaia" cl V Tabacu Ana (150); Lic. „N. Bălcescu" cl. IX Dobre George (140); Lic. „Gh. Lazăr" cl IX Moca Ruxandra (120), Mitoi Cătălin (120). **BUDA CORBIȚA** (VRANCEA) cl. VII Ionașcu Lidia (105).

CĂLINEȘTI (MARAMUREȘ) S.g. cu cls. I—X cl. VI Fonta Petru (90), Hotea Maria (80), Rednic Ioan (87). **CARACAL** (OLT) S. g. 2 cl. V Rădulescu Cezar (90), cl. VI Popovici Cristina (150), cl. VII Oprea Mihaela (140); S.g. 5 cl. VII Căroi Dana Codruța (90); S.g. 7 cl. V Barbu Florentina (75), Mihăilă Lucia (93), Popescu Diana (69), Tinca Aura (81), cl. VI Nicu Marilena-Theodora (80). **CARANSEBEȘ** (CARAȘ SEVERIN) S.g. 8 cl. V Chișevescu Mihail (150), Cranciova Carmen (90), Ghera Isabella (160), Gonciulea Bogdan (70), Margină Oana (70). **CEHU-SILVANIEI** (SĂLAJ) S.g. cu cls. V—VIII cl. V Embler Daniel (80), Goste Ancuța (75). **CHIROFTEI** S.g. 1 cl. VI Jarcă Dragoș (120). **CIREȘU** (BRĂILA) S.g. de 10 ani cl. VI Balaban Mihaela (100). **CIMPINA** (PRAHOVA) S.g. 1 cl. VI Vilcu Bogdan (180); S.g. 2 cl. V Bohiltea Dan (75), Budușan Monica (80), Panait Maria (80), Rus Mihai (61): S.g. 4 cl. VII Nicolae Răzvan (72); S.g. 8 cl. VII Căciulă Olivia (90), cl. VIII Năstase Mihai (200); Lic. ind. 5 cl. X Toader Ana Maria (140). **CIMPULUNG** (ARGEȘ) S.g. 3 cl. V Coman Cristina (110). **CIMPULUNG MOLDOVENESC** (SUCEAVA) S.g. 3. cl. VI Lehaci Nicoleta (60), Moroganu Oana (80), Pescaru Raluca (78), Piticari Gabriela (80), Stamatin Ioana (79). Sutea Marius (80), Țăran Teodora (60), Timpău Bogdan (75). **CIRSTĂNEȘTI** (VÎLCEA). S.g. cl. VII Davidescu Ileana (160). **CLUJ-NAPOCA** (CLUJ) S.g. 6 cl. V Pop Codruța Cosmina (150): S.g. 16 cl. V Racoriță Adela (140); Lic. mat.-fiz. 2 cl. IX Popescu Voicu (130); Lic. ind. „G. Barițiu" cl. IX Frențiu Alin-Militon (125); Lic. „Emil Racoviță" cl. VI Frențiu Cosmin (132), cl. VII Lupșa Luciana (135), cl. XI Mihoc Cristian (140). **CONSTANȚA** (CONSTANȚA) S.g. 25 cl. VII Pruiu Dana-Gabriela (160). **COSTEȘTI** (VÎLCEA) S.g. cu cls. I—VIII cl. V Jidoveanu Tudor (100), Pădurețu Luminița (100). **CRAIOVA** (DOLJ) S.g. 16 cl. II Dănăila Mihaela (120), Mocanu Liliana (111): S.g. 21 cl. V Dica Alina (100), Muller Cristina (103), Predoi Carmen (190), cl. VI Birău Liliana (110), Vladimirescu Cristian (128), cl. VII Tudoran Octavian (102); S. g. 22 cl. VI Tobă Mihai (150); S.g. 31 cl. V Berbec Mirela (120), Milicov Diana (120), Popa Ileana (100); S. g. 32 cl. VI Dogaru Florinel (130); S.g. 33 cl. V Popa Luminița (164); Lic. „Frații Buzești" cl. V Pescăruș Iulia (100), cl. XI Pescăruș Cristiana (100); Lic. „N. Bălcescu" cl. VIII Savin Diana (180). **CUDALBI** (GALAȚI) S.g. 1 cl. V Guzgă Ileana(50), Irimia Natalia (50). **CURTEA DE ARGEȘ** (ARGEȘ), S.g. 4 cl. VI Drăguț Roxana (80), Vasilescu Irina (80); Lic. „Vlaicu Vodă" cl. XI Tuță Diana (40). **CUZDRIOARA** (CLUJ) S.g. cl. V Suciu Radu (70), cl. VI Rus Daniel (70), Urian Gabriela (100).

DRĂGĂNEȘTI (OLT) S.g. 1 cl. V Dumitru Ancuța (280). **DRĂGĂȘANI** (VÎLCEA) S.g. 2 cl. VI Călugărașu Bogdana (100). **DEJ** (CLUJ) S.g. 1 cl. VII Timar Adrian (120); S.g. 3 cl. V Pop Monica (130), Urian Anda (150), cl. VI Buhățel Dan (160), Cimpean Celia (158), Fejervari Ramona (210), Șandru Lavinia (100), cl. VII Bochiș Călin (100), cl. VIII Rusu Monica (90). **DOROHOI** (BOTOȘANI) S.g.5 cl. V Ichim Oana Edith (100). **DROBETA TURNU SEVERIN** (MEHEDINȚI) S.g. 8 cl. V Bibu Rami (90), Constantinescu Carmen (80).

FĂGĂRAȘ (BRAȘOV) S.g. 7 cl. VII Drăgușan Iulia (80). **FĂLTICENI** (SUCEAVA) S.g. 2 cl. V Bolohan Amelia (85), Maxim Loredana (90); S.g. 4 cl. VI Bejenar Petrică (100), Florescu Ciprian (120), Lungu Irinel (110), Mîndruță Ana Maria (100), Nedelcu Paul (110), Sava Vasilică (100), Stafie Mihaela (100), Vornicu Daniela (100), cl. VII Bochiș Călin(130). **FĂUREȘTI** (VÎLCEA) S.g. cu cls. I—X cl. VIII Tudorașcu Adrian (461). **FIENI** (DÎMBOVIȚA) S.g. 1 cl. V Dumitrache Ramona (90). **FILIPEȘTII DE PĂDURE** S.g. cl. V Cordonașu Diana (50), Nuță Ioana (60), Pătrașcu Gabriela (50), Tincu Alice (50). **FOCȘANI** (Vrancea) S.g. 9 cl. VIII Iftimie Emilia (80); Lic. „A.I. Cuza" cl. XI Camil Muscalu (80). **GALAȚI** (GALAȚI) S.g 6 cl. VI Curduman Mara (80), Drăghici Marius (160), Glica Diana (100), Voina Laura (88), cl. VII Andrei Andreia (123), Satmare Adrian (140); S.g. 9 cl. V Apostu Cristina (100); S.g. 10 cl. V Bold Mihaela (110), Ganea Cristina (80), Minzu Ionela (100), Moisă Carmen (80); S.g. 16

Scanned with OKEN Scanner

cl. V Mocanu Liliana (59), Dănăilă Mihaela (58); S.g. 18 cl. V Antohi Relu (48), Mălinoiu Cristina (65), Niță Daniela (55), Stamate Valentin (45), Serban Daniela (56), cl. VI Hîrtanu Mihaela (40); S.g. 24 cl. V Ariton Loreta (100). Găureanu Monica (100), Pamfil Mariana (100), cl. VI Ciumarenco Nicușor (99), Hendoreanu Cristian (110), Livinschi Angela (90), Samoilă Florin (80). cl. VII Mateiță Gabriel (109); S.g. 25 cl. V Talmazanu Mariana (100), cl. VI Banu Octavian (140), Moraru Florin (121), Munteanu Răzvan (190), Purcaru Oana (340), Sabău Cristina (140), cl. VII Ioan Ciprian (250); S. g. 28 cl.V. Bamboi Raluca (80), Bamboi Roxana (85). Blaga Christian (50), Budur Monica (80), Ciobotaru Adrian (85), Domniteanu Elena (70), Enacopol Carina (85), Herda Paul (70), Luca Iuliana (85), Lungu Anișoara (110), cl. VI Astafi Ioan (149), Bulza Valentin (93), Cotoranu Monica (90), Fetecău Roxana (110), Otta Georgia (90), Leibovici Andy (110), Mitu Eugen (100), Popescu Alin (175), cl. VII Hapenciuc Ileana (100); S.g. 29 cl. III Antohi Cornel (201); S.g. 31 cl. V Enghel Stefan (64); S.g. 33 cl. IV Pruteanu Lucian (82), cl. VII Halenski Marcel (105), Mocanu Anca (150), Ungureanu Cristina (140); S.g. 41 cl. V Vlad Ionel (70), cl. VI Mușală Mariana (100), Petra Monica (90); S.g. 42 cl. V Minzu Ciprian (50), Neagu Claudiu (40), Sterian Nicoleta (45), Zamfir Florin (50), cl. VI Diaconescu George (104), Llacu Despina (85), Roșu-Florin (90), Sandu Liviu (80), Sima-Hăileanu Laura (100). **GALICEA** (VÎLCEA) S.g. Bratia Deal cl. VI Cercel Felicia (70). **GIURGIU** (GIURGIU) S.g. 3 cl. V Peiu Gabriel (80). **GIRDA** (ALBA) S. g. cl. I Belei Norica (110), Ștefănuț Mariana (100), cl. III Morcan Cristian (260), cl. IV Belei Mihai (260), Belei Mihaela (250), Belei Dorin (260), Cioara Adrian (250). Dig Antoaneta (260), Dobra Ciprian (260), Dobra Dorel (260), Dobra Valentina (260), Gavra Doru (260), Haiduc Dorina (260), Ionele Simona (260), Lazea Fica (260), Pașca Monica (260), Petruse Ileana (260), Petruse Aurica (260), Petruse Delia (260), Pleșa Călin (250), Matei Radu (260), Mocanu Vladimir (250), Todea Cornel (250), cl. VI Bac Livia (130), Bite Dorina (130), Bite Carmen (130), Bite Dănuț (130), Belei Daniela (130), Borteș Constanța (130), Cioara Călin (130), Culda Daniela (130), Dobra Victoria (130), Haiduc Gabriela (130), Joldeș Emilia (130), Mocanu Gabriel (130), Marc Viorica (130), Negrea Avram (130), Negrea Dorel (130), Petruse Marinela (130), Trifa Georgeta (130), Trinc Rodica (130), Zdrenghea Mihaela (130).

HUȘI (HUNEDOARA) S.g. 2 cl. V Botea Ligia (80), cl. VII Bicăzan Mihaela (120), Ceaicovski Lenuța (100), Daciu Cristina (100), cl. VIII Maurer Eduard (70).

IAȘI (IAȘI) S.g. 23 cl. V Ilie Iuliana (80), Vasiloiu Anca (80); S.g. 37 cl. V Veringă Irina (110), cl. VI Veringă Liviu (150); Lic. „G. Ibrăileanu" cl. VII Volocariu Monica (80); Lic. „Național" cl. VII Hamciuc Cătălin (140), Voitcu Ovidiu (110), cl. VIII Avrămuț Valeriu (200), Cărucerii Oreste (100), Drăgan Valentin (120), Herescu Cristian (110), Preotu Alin (100), Vițcu Ioan (80). **IZBICENI** (OLT) S.g. cl. VI Giulea Dragoș (170), Luca Virginia (80). **INSURĂȚEI** (BRĂILA) S.g. 3 cl. VII Alexe Daniela (50).

LUPENI (HUNEDOARA) S.g. 2 cl. VI Ciobanu Adriana.

MEDIAȘ (SIBIU) S.g. 5 cl. VII Chiș Mihai (40); S.g. 9 cl.VII Sălcudean Sorina (50). **MEHADIA** (CARAȘ-SEVERIN) S.g. cl. VI Lalescu Maria (100). **METEȘ** (ALBA) S.g. cl. VI Opruța Lidia (120). **MIERLEȘTI** (OLT) S.g. cl. VII Andrei Mihaela (100). **MIZIL** (PRAHOVA) S.g. 2 cl. VI Dumitru Marius (100); S.g. 3 cl. VII Apostol Mihai (100), Bulete Cristina (120), Lupșan Amalia (100), Răducanu Silviu (100). **MOINEȘTI** (BACĂU) S.g. 4 cl. V Scarlat Laura (100). **MORENI** (DÎMBOVIȚA) S. g. 1 cl. VI Diițescu Răzvan (100); S.g. 4 cl. VI Răduță Gabriela (160), cl. VII Lupică Marius (150). **MOTRU** (GORJ) S.g. 1 cl. V Drulă Valeria (152), cl. VI Răducu Ionela (85), cl. VII Ghițescu Paula (70), Mercuț Alina (90); S.g. 2 cl. VI Stăniloiu Claudia (110), cl. VII Luță Florian (75), cl. VIII Paicu Laura (90); Lic. ind. cl. X Ciurea Ema (120). **MURGENI** (VASLUI) S.g. cu cls. I—VIII cl. V Carp Iuliana (80), Mateescu Laura (95).

NAZNA (MUREȘ) S.g. cl. V Suciu Sanda-Maria (100). **NEGREȘTI-OAȘ** (SATU MARE) S.g. cl. VI Feier Constantin (90).

PĂLTINOASA (SUCEVA) S.g. cl. V Chiruț Florin (80). **PĂUNEȘTI** (VRANCEA) S.g. cl. VI Andrei Veronica (100). **PETROȘANI** (HUNEDOARA) S.g. 5 cl. VII Bușe Gheorghe-Florin (140). **PIATRA NEAMȚ** (NEAMȚ) S.g. 2 cl. IV Antoniuc Bogdan (250), cl. V Apetrei Ionel (80), cl. IV Roibu Ovidiu (79); S.g. 27 cl. VI Biciușcă Oana (90), Ichim Simona (80); S.g. 28 cl. V Ivan Beatris-Ana (130), Pușcanu Ramona (50), Sandu Iuliu (60), Silvaș Ana (110). **PITEȘTI** (ARGEȘ) S.g. 9 cl. VI Albu Dragoș (110). **PISCOV** (BUZĂU) S.g. cl. VII Badea Diana (120). **PLOIEȘTI** (PRAHOVA) S.g. 10 cl. VI Badiu Marius (115), Cicea Claudiu (140), Cîrtoaje Cristian (113), Florescu Costin (130), Gheoca Sever (150), Ion Raluca (100), Man Marius (56), Mîndrilă Dumitru (200), cl. VII Lutică Mihai (148), Petre Mihail (120), Popescu Andra (120); S.g. 20 cl. VII Angelescu Iulia (100), Mănescu Carmen (100). **PODENI-VALE** (MEHEDINȚI) S.g. cu cls. I—VIII cl. VI Dirpeș Jan (280). **RĂDĂUȚI** (SUCEAVA) S.g. 3 cl. VI Rusu Emanuela (120). **RIMNICU SĂRAT** (BUZĂU) S.g. 1 cl. VII Ioniță Dan (280); S.g. 5 cl. VII Alexandru Stela (125), Bratosin Sorin (130), Iacob Liliana (135), Istudor Rozica (125), Oprișan Relu (130). **RIMNICU VILCEA** (VÎLCEA) S.g.cl. VI Alvizache Dragoș (80); Lic. ind.

Scanned with OKEN Scanner

7 cl. VI Bălcșu Viorel (100), Curuia Mihaela (79), Dubinciuc Ciprian (90), Nicolau George (100), Popescu Valentin (180); Lic. „N. Bălcescu" cl. V Ianache Andrei (150). **ROMAN (NEAMȚ)** S.g. 11 cl. VIII Damian Anca (80), Hriscu Mihaela (110), Sava Daniela (180). **ROȘIORI DE VEDE** (TELEORMAN) S.g. 4 cl. VI Arsene Cristina (100), Cimpoeru Cristian (110).

SATU MARE (SATU MARE) S.g. 14 cl. VI Biro Raul (60), Dobran Cristina (140), Olah Stefania (160), Pakai Otto (150), Pașcu Adrian (150), Silaghi Mirela (160), Zevedei Angelica (160); Lic. ind. 6 cl. V Șandor Mihai Szabolcs (50), Todoran Vlad (81). **SCĂRIȘOARA** (ALBA) S.g. 1 cl. III Matei Marian (260), cl. VII Giaju Delia (85). **SEACA DE PĂDURE** (DOLJ) Ramona Constanța (250) cl. VII Beck Richard Wumer (100). **SFINTU GHEORGHE** (COVASNA) Lic. mat-fiz. cl. VI Lazăr (MARAMUREȘ) S.g. 3 cl. V Cotîrlă Ion (81), Schmidt Erich (100). **SINAIA** (PRAHOVA) S.g. 2 cl. V Oancea Gabriela (63). **SIBIU** (SIBIU) Lic. „Gh. Lazăr" cl. IX Dancu Zoița (85), Dumitrașcu Ella (68), Orlea Gina Lucia (120); Lic. mat-fiz. 1 Trifan Sanda (90), Veseli Bogdan (120), cl. XI Damian Claudia (100), Niculescu Virginia (88), Niță Casian (120), Petrișor Marian (110), cl. XII Vasilescu Elena (150). **SLATINA** (OLT) S.g. 3 cl. V Pădurețu Daniela (80), Ursu Lenuța (80), cl. VI Știrbu Marius (100); S.g. 4 cl. V Dincă Florin (100), Giurea Gigel (100), Ilie Gabriela (85); S.g. 5 cl. VI Apostolescu Andreea (78), Mitu Ruxandra (62), cl. VII Dumitru Marian (100); S.g. 8 cl. V Bircă Violeta (50), Geaucă Ionuț (100), Terteleanu Elena (50, cl. VI Bobeanu Sorina (120), Căcăleșeanu Paula (120), Dinu Cerasela (80), Ionescu Mearmela (180), Necă Laurențiu (100), Pîrvan Adela (170), Radu Loredana (110), Rădulescu Adriana (110), cl. VIII Stoica Victoria (230). **STREMȚ** (ALBA) S.g. cl. VI Rusu Mihai (90). **SUCEAVA** (SUCEAVA) S.g. 3 cl. VI Băițan Daniela (80), Corduneanu Alina (90), Iliescu Bogdan (90). **ȘOMUȚA MARE** (MARAMUREȘ) S.g. 1 cl. V Gherman Ligia (120), Mărieș Cornelia (80), cl. VI Ardelean Crina (120), Prună Ioan (150). **ȘTEFĂNEȘTI** (ARGEȘ) S.g. 2 cl. IV Vidan Diana (80), cl. V Arsene Dumitru (80).

TECUCI (GĂLAȚI) S.g. 2 cl. V Popescu Cezarina (100); S.g. 5 cl. V Ciorici Beatrice(75), Cornea Cătălin (50), Tonea Laura (80), cl. VI Petică Răzvan (76), Roșu Marian (120), cl. VII Bujor Elpida (90); S.g. 10 cl. V Ghica Dragoș (54). **TIGRENI** (ARGEȘ) S.g. cl. VII Coiocaru Mihai (80). **TITU-GARĂ** (DÎMBOVIȚA) S.g. cl. VI Soare Diana (78). **TIMIȘOARA** S.g. 10 cl. V Căruntu Eugen (67), Ghilezan Mirela (70); S.g. 18 cl. V Vințan Viorel (80); Lic. „C.D. Loga" cl. V Ciotescu Ion (160). **TIRGU JIU** (GORJ) S.g. 1 cl. V Popescu Marilena (110). **TG. MUREȘ** (MUREȘ) S.g. 9 cl. VII Stan Ileana (200). **TULCEA** (TULCEA) Lic. „Spiru Haret" cl. VII Largu Mihaela (90). **TURDA** (Cluj) S.g. 2 cl. V Nemeș Gabriela (85), cl. VI Bainocsi Anna (80), Rus Daniela (100); S.g. 6 cl. V Sîrbu Dorin (85). **TURNU MĂGURELE** (TELEORMAN) S.g. 5 cl. VI Ichim Ana Maria (90).

VATA DE JOS (VASLUI) S.g. 3 cl. VI Alexandru Doriana (120), Egorov Ana (110), Ghiur Luciana (100), Horduna Mariana (120), Ilaș Ana Maria (120), Nechifor Dumitru (110), Popa Geta (120), Tiplea Mihaela (120), Vrinceanu Adina (120), Zurba Alina (100), cl. VII Apostol Corina (100), Crețu Cornel (100), Dorobăț Cătălina (110), Lăluci Melania (160), Ungureanu Adrian (100), Zaharia Mihaela (90); S.g. 5 cl. V Calancia Silviu (79), Filipeanu Mihaela (80), cl. VI Vieru Ioana (118); S.g. 8 cl. V Bîță Meda (70), Birleanu Marius (80), Dragomanu Florin (70), Iordache Irina (85), Lungu Alina (80), Lupeș Cristian (70), Pînzariu Eduard (70), Popa Corina (70), Popica Ionela (70), Porumboiu Corneliu (73), Preda Vlăduț (75), Spînu Mirela (75), Șorea Mirela (75), Velișcu Corina (70), cl. VIII Țibulcă Cezar (65). **VULCAN** (HUNEDOARA) S.g. 4 cl. V Vass Alexandru (75).

ALBA IULIA (ALBA) S.g. 1 cl. V Popovici Raluca (70), cl. VI Popovici Roxana (137); S.g. 2 cl. VII Crișan Marius (90); S.g. 7 cl. VI Luca Angela (55); S.g. 8 cl. VII Duca Alina (55); Lic. „Horia, Cloșca și Crișan" cl. IX Crainic Mariuc Nicolae (239). **AIUD** (ALBA) Lic. ind. „Avram Iancu" cl. XI Pădurean Mircea (30). **ALEȘD** (BIHOR) S. g. cl. V Bekesi Lajos (41), Bodoni Zsolt (46), Fejes Milelos (60), Gyorgy Reka (74), Koti Eva (50), cl. VI Hononnai Andreea (72), cl. VIII Domian Csilla (88), Gyorgy Ildiko (98), Klman Jozsef (101), Torok Timea (100). **ALEXANDRIA** (TELEORMAN) S.g. 2 cl. VI Catană Aida (85), Nenu Isabella (80); S.g. 3 cl. V Vladu Claudia (99), cl. VI Dumitrescu Sorana Dana (121), cl. VII Bățăuș Florin (41), Căldăraru Luigi (87), Gițoi Adrian (164); S.g. 5 cl. II Burtea Claudia(82), cl. VII Rizeanu Cornelia-Lucica (86). **ALMAȘU** (SĂLAJ) S.g. cu cls. I—X cl. VI Petruș Marius (125). **ARAD** (ARAD) S.g. 4 cl. VII Cheta Alina (100); S.g. 6 cl. V Nornoș Florentina(68); Lic. ind. 13 cl. VII Cadar Cosmin Adrian (88). **AZUGA** (PRAHOVA) S.g. cu cls. I—X cl. VII Bădilă Cornelia (59), Dumitrescu Cristiana (60), Glesnea Monica (66).

BACĂU (BACĂU) S.g. 1 cl. V Iacob Violeta Gabriela (62): S.g. 10 cl. VI Jalbă Dan Constantin (21), Nistor Horia (87); S.g. 18 cl. V Druțu Alina (49), Enea Georgiana Narcisa (67), Lungu Dana (48), Manciu Diana Gabriela (58), Petcu Anna-Maria (116), Raba Adrian (40), Severin Diana (107), Zaharia Laura (74), cl. VI Ciceu Cornelia (119), Cristea Anamaria (107), Donciu Cristina (93), Gădioi Ionel (49). Roșu Diana (56), Sandru April (79), Trandafir

Scanned with OKEN Scanner

Almării Lucian (90) ; S.g. 2 cl. VIII Palcu Laura (105). **MOVILENI** (GALAȚI) S.g. cl. V Ioniță Mândița (80), Rădăcină Marcela (102).

NĂSĂUD (BISTRIȚA-NĂSĂUD) S.g. 1 cl. V Damian Luminița (54). **NEGREȘTI-OAȘ** (SATU MARE) S.g. 3 cl. VI Dale Gabriel (100). **NEHOIU** (BUZĂU) S.g. cl. VIII David Adrian (18). **NICULIȚEL** (TULCEA) S.g. cl. IV Plihgé Nicoleta (170).

ODORHEIU-SECUIESC S.g. 6 cl. V Deak Tunde (38). **OLTENI** (TELEORMAN) S.g. cl. VIII Bărlteanu Daniela (69+110 = 179). **ORADEA** (BIHOR) S.g. 9 cl. VII Șerban Adriana (143). **ORȘOVA** (MEHEDINȚI) S. g. cl. V Murariu Lucian Horia (39). **PIATRA NEAMȚ** (NEAMȚ) S.g. 1 cl. V Leonte Cătălin (54). **PITEȘTI** (ARGEȘ) S.g. 3 cl. VI Roman Diana (76) ; S.g. 15 cl. V Miron Elena Gabriela (23), cl. VI Popescu Adrian Liviu (200) ; S.g. 16 cl. IV Ivan Loredana (218) ; Lic. „N. Bălcescu" cl. IX Drăgușin Marius (177). **PIRSCOV** (BUZĂU) S.g. cl. VI Banu Camelia (133). **PLOIEȘTI** (PRAHOVA) S.g. 3. cl. III Demian Liviu (113) ; S.g. 10 cl. VI Bercia Aura (88), Cicea Claudiu (78), Ilie Carmen Cristina (90), Pascaru Mihai (175), Zecheru Corina (91), cl. VII Bercia Robert (66), Cristache Costin (59), Popescu Andra (51) ; S.g. 14 cl. VI Carp Cristina Ana (59) : S.g. 17 cl. V Banariu Mirela (53), Petricioiu Bianca (51) ; S,g, 21 cl. IV Măndoiu Adrian Virgiliu (235) ; S.g. 24 cl. VI Victoria Gabriel (120) ; S.g. 29 cl. V Popescu Bogdan-George (80) ; Lic. „M. Viteazu" cl. IX Fuerea Laura Elena (82) ; Lic. pedagogic cl. VI Cocârlă Corina (98), Grigore Mihaela Monica (51), Răduță Georgeta (67), cl. VII Drogou Cristian (70). **PLOȘTINA** (GORJ) S.g. cl. VI Nobunu Corina (110). **PODENI** (MEHEDINȚI) S.g. cl. VI Dîrpeș Jan (114). **POIANA** (DÎMBOVIȚA) S. g. 1 cl. VI Croitoru Virginia (4). **PUCIOASA** (DÎMBOVIȚA) S.g. 1 cl. V Rusu Cristina (87), cl. VI Dinu Cristina (87), cl. VII Hera Laura Daniela (90).

RĂDĂUȚI (SUCEAVA) S.g. 3 cl. VI Cucerca Marius (70) ; Lic. „Eudoxiu Hurmuzache" cl. XI Trufin Valentin (83). **REȘIȚA** S.g. 1 cl. IV Olariu Anca (55). **RM. SĂRAT** (BUZĂU) S.g. 5 cl. VII Buga Ion (112) Surdu-Valentin (102). **RM. VILCEA** (VÎLCEA) S.g. 1 cl. VII Matei Raluca (86) ; S.g. 5 cl. VII Sogor Robert (93) ; Lic. ind. 7 cl. V Stan Florin Leonard (14), cl. VI Vlădescu Ionuț (87), cl. IX Popescu Octavian (38) ; Lic. mat. — fiz. „N. Bălcescu" cl. IX Ivașcu Ady Lucian (119). **RIȘNOV** (BRAȘOV) S.g. 2 cl. VI Bartesch Betina (64), Boltres Andreea (61). **ROMAN** (NEAMȚ) S.g. 3 cl. VII Tălâmbă Ingrid Simona (90) ; S.g. 7 cl. VI Smit Mădălina (102) ; S.g. 11 cl. VI Dulharu Eduard (142). **RONA DE SUS** (MARAMUREȘ) S.g. cl. IV Oprișan Alexandra (67). **ROȘIORI DE VEDE** (TELEORMAN) S.g. 4 cl. V Dobrin Mimi (59), Manolea Marian (52).

SATU MARE (SATU MARE) Lic. fil.-ist. cl. VI Averescu Nicoleta Iulia (57), Pinte Mirela (52), cl. VII Maxim Voichiță (63). **SĂRMAȘU** (MUREȘ) S.g. cl. VII Burian Sergiu (72). **SĂRMĂȘAG** (SĂLAJ) S.g. 1 cl. V Balint Andre (56), Kereczi Monica (65). **SEBIȘ** (ARAD) S.g. cl. V Moanca Loredana (19), Pui Adriana (34). **SERVENIA** (TELEORMAN) S.g. cu cls. I—X cl. VI Polea Monica (28). **SFINTU GHEORGHE** (COVASNA) Lic. ind. 2 cl. VI Danciu Claudia (70) ; Lic. mat. fiz. cl. VII Stancu Alin Adrian (150). **SIBIU** (SIBIU) S.g. 12 cl. VI Marcu Cristina (97) ; S.g. 15 cl. VI Armenciu Florin (140) ; Lic. mat.-fiz. 1 cl. IX Tritean Sanda (63). **SIGHETU MARMAȚIEI** (MARAMUREȘ) S.g. 3 cl. V Cotârlă Ion (77), Vălean Carmen Daniela (45), cl. VII Chindriș Monica (50), cl. VIII Chindriș Claudia (57). **SIMERIA** (HUNEDOARA) S.g. 2 cl. VII Poenar Cosmin (118). **SINGEORGIU DE MUREȘ** (MUREȘ) S.g. cl. IV Neculescu Ovidiu (179). **SINMIHAIU DE CIMPIE** (BISTRIȚA-NĂSĂUD) S.g. cl. VI Cocan Mircea Valer (66). **SLATINA** (OLT) S.g. 4 cl. VI Topală Simona Magdalena (94) ; S.g. 5 cl. VIII Dumitru Marian (64) ; S.g. 8 cl. V Ciobanu George (115), cl. VI Criveanu Silvia (117), Ghidănac Lucreția (152) ; Lic. de științe ale naturii „Radu Greceanu" cl. IX Giurescu Remus (169). **SLOBOZIA** (IALOMIȚA) S.g. 7 cl. VIII Stoica Victoriță (354) ; Lic. mat.-fiz. cl. IX Vasile Daniel (90). **SUCEAVA** (SUCEAVA) S.g. 1 cl. V Grămadă Marius (73) ; S.g. 4 cl. VI Mihăilă Iris Mihaela (32).

TĂTĂRANU (VRANCEA) S. g. 2 cl. VII Popa Veronica (210), Stan Stela Alina (244). **TECUCI** (GALAȚI) S.g. 8 cl. VI Borș Viorel Cristinel (60) ; S.g. 10 cl. V Monea Ciprian (24). **TEREMIA MARE** (TIMIȘ) S.g. cl. V Cucu Aurica (64). **TIMIȘOARA** (TIMIȘ) S. g. 7 cl. VI Vrănianțu Anca (100) ; S.g. 22 cl. IV Valea Alina (147) ; Lic. pedagogic cl. III Aconi Valentin Mihai (63) ; Lic. mat.-fiz. „C.D. Loga" cl. VI Ciatescu Ion Raul (330), Hartweg Andreea (20), Isac Paula (143). **TITU** (Dîmbovița) S.g. cl. VI Lazăr Elena Raluca (110). **TIRGOVIȘTE** (DÎMBOVIȚA) S.g. 5 cl. V Nedelcu Daiana (52) ; S.g. 8 cl. V Postelnicu Daniel (265), cl. VI Postelnicu Livia Nicoleta (150) ; Lic. „Ienăchiță Văcărescu" cl. IX Tănase Andreea (90). **TIRGU JIU** (GORJ) S.g. 1 cl. VI Lupu Oana Maria (62) ; S.g. 12 cl. III Cociu Cristian Ion (59), Pera Carolina Luiza (75) ; Lic. „T. Vladimirescu" cl. IX Stoian Sorin Mirel (37). **TIRGU MUREȘ** (MUREȘ) S.g. 9 cl. VII Stan Ileana (90) ; S.g. 16 cl. V Novacovschi Ruxandra (40) ; S.g. 18 cl. VII Neculescu Horațiu (185). **TIRGU NEAMȚ** (NEAMȚ) S.g. 3 cl. IV Cozma Vasile (227), cl. V Gheorghiu Oana (90), cl. VII Popa Iulia (114). **TIRGU OCNA** (BACĂU) S.g. 1 cl. cl. VI Bejenaru Ioan (65). **TULCEA** (TULCEA) Lic. „Spiru Haret" cl. V Sulugiuc

Cristian Gelu (65), cl. VIII Tănase Otilia Simona (110). **TURDA** (CLUJ) S.g. 2 cl. V Bunbăreanu Bianca (9), Ciortea Claudia (9), Copolovici Lucian (19), Grama Mihaela (18), Ianc Petruța (19), Lup Ciprian (19), Mic Simona (19), Popa Sebstian (28), Toth Iulia Eva (10), Urdă Sanda (8), cl. VI Cordiș Cristina (25), Costișor Monica (15); S.g. 6 cl. V Sîrbu Dorin (103). **TURNU MĂGURELE** (TELEORMAN) S.g. 5 cl. VII Potecaru Adrian (87). **TURȚ** (SATU MARE) S.g. 1 cl. VI Zimbru Cristina (52).

UNGHENI (ARGEȘ) S.g. cl. VII Pană Adela (29). **UNIREA** (CĂLĂRAȘI) S.g. cl. VII Belu Ionel (28), Ștefan Dana (113).

VASLUI (VASLUI) S.g. 3 cl. VII Lăluci Melania (170); S.g. 4 cl. VI Bojoargă Iulian (100); S.g. 5 cl. V Aftimescu Bogdan (67), Moisescu Laura (80); S.g. 8 cl. VI Arsene Petru Daniel (79), Bosna Georgel (72), Carabaș Cristian (61), Carp Liliana (72), Cârceanu Claudia (64), Chirica Dan (67), Ciobanu Cristian (75), Ciubotaru Iulia (69), Dogaru Florin (64), Doltu Nicoleta (72), Donci Anca Monica (72), Filip Daniela (67), Hălgiug Gelu (60), Iordache Emanuela (71), Lica Genovel (72), Manea Luiza (67), Miron Lenuța Loredana (71), Moldovean Neli Cristina (79), Moscu Vasile (74), Penișoară Simona (65), Popa Roxana(69), Postolache Mihaela Alina (69), Pricop Nicoleta (69), Rusu Florin (86), Scintei Luiza (72), Sîrbu Lauren (64), Spătaru Gabi (68), Stoina Ana Ramona (64), Țăpoi Daniela (69), Tuțu Vasilică (67). **VĂLENI** (VASLUI) S.g. cl. V Hutanu Bogdan (60), Popa Ciprian (60), cl. VI Beligan Dragoș (100), Pintilie Ion (80). **VĂLENII DE MUNTE** (PRAHOVA) S.g. 3 cl. V Florescu Răzvan (66). **VIȘINEȘTI** (DÎMBOVIȚA) S.g. cl. IV Codreanu Diana Elena (90). **VINĂTORI** (NEAMȚ) S.g. 1 cl. V Tănase Elena (91).

AIUD (ALBA) S.g. 1 cl. IV Sas Ioan-Cătălin (227); S.g. 3 cl. VI Mihoc Cristina (80); Lic. ind „A. Iancu" cl. XI Păduran Mircea (48). **ALBA-IULIA** (ALBA) S.g. 1cl. V Gabinat Ana-Maria (155), Popovici Raluca (96); S.g. 2 cl. VII Crișan Marius (100); S.g. 6 cl. VII Urian Monica (100); S.g. 7 cl. V Păun Cristina (34); S.g. 8 cl. VII Rusan Claudiu (180); Lic. mat fiz. „Horia, Cloșca și Crișan" cl. IX Ilie Cosmin (107). **ALEȘD** (BIHOR) S.g. cl. V Gyorgy Reka (103), Koti Eva (40), cl. VI Homonnai Andreea (114), Szilagyi Noiemi (77), cl. VII Csibi Maria (165); **ALEXANDRIA** (TELEORMAN) S.g. cl. II Burtea Claudia (129), cl. VII Frăsineanu Amalia (92); S.g. 3 cl. VI Calmuschi Alexandru (90), Caraveteanu Dragoș Cristian (140), Căpran Beatrice (93), Ionescu Alina-Corina (227), Stoica Claudia (110). **ANINA** (CARAȘ-SEVERIN) S.g. Steierdorf V. Tischliar Ronald (170). **ARAD** (ARAD) S.g. cl. VI Moisescu Aldiona (207); S.g. 6 cl. V Buftea Alin (90), Cristea Artur (100), Tirlea Flavius (100); S.g. 18 cl. V Neacșu Orlando (65); Lic. ind. 12 cl. VI Ciupav Livia (80), Lucuța cl. V Virag Mihai (100), cl. VI Păișan Andreea (90); Lic. „I. Slavici" cl. VII Verzea Onorina (137), cl. IX Verzea Valentin (77). **ARBORE** (SUCEAVA) S.g. cl. VII Tabarcea Mirela (40).

BACĂU (BACĂU) S.g. cl. VII Munteanu Corina Daniela (30); S.g. 4 cl. V Butcaru Ana (135), cl. VI Ionesci Radu Ionuț (230), Popa Aura (153), Secară Cătălin (202); S.g. 10 cl. VI Tanțoș Iulian Mihai (120); cl. VII Gozar Mircea (139), Popa Loredana (150); S.g. 18 cl. II Ionescu Ioan (180), cl. IV Stănculescu Andreea (30), cl. V Andrei Răzvan (160), Aniței Mihaela (173), Bernevig Aniela (116), Dăscălașu Roxana (69), Eterișmăriței Laura Etno (116), Mață Anca (36), Onciu Roxana (98), Oprea Laura (92), Pavel Mihaela (111), Pintilie Alexandru (62), Proraicu Corina (327), Rusu Radu Ionuț (219), Tudor Livia (98), cl. VI Anton Adrian Liviu (144), Bogza Irina Laura (35), Ciuhat Adrian (70), Dăniciuc Laura (47), Gherla Alina (87), Humulescu Gabriela (81), Huntiu Bogdan (125), Iancu Anca (121), Motruc Teodor (142), Pătru Codrina (91), Raceriu Radu (110), Sebe Ioana Teona (80), Severin Diana (108), Simon Laura Patricea (110), Strugariu Georgiana (104), Tindache Bogdan (185), Udreanu Simona (104), cl. VII Ghiurea Daniela (90), Rachieru Radu (120), Sova Clement (73), cl. VIII Bennat Diana (31), Bontaș Andreea Ivona (104), Iftimie Anca Elena (80), Păvălașc Marius (72), Tindache Oana Ancuța (80); S.g. 19 cl. V Ungurean Viorica (68), cl. VI Goia Cătălina (93), Huiban Emanuel (64), Ungureanu Ana-Raluca (73), cl. VII Avramescu Constantin (80), Godeanu Veronica (130), Lazăr Florin (79); S.g. 27 cl. IV Bughelea Marian (70), Păduraru Maria (78), cl. V Pavel Lavinia (110), Tutuianu Mariana (65), cl. VI Iancu Aniela Carina (109); S.g. 28 cl. IV Brebu Mădălina (209), cl. VIII Ceucă Simona (80); Lic. ped. „Ștefan cel Mare" cl. VI Toma Ramona (77), cl. VII Cosma Adrian (70), cl. VIII Cosma Gabriel (100); Lic. ec. cl. IX Cobzaru Mihaela (89). **BAIA MARE** (MARAMUREȘ) S.g. 1 cl. VI Breban Corina (75); S.g. 4 cl. VII Rotaru Cristina (94); S.g. 8 cl. V Popa Alexandru Nicolae (151), cl. VI Drule Ciprian (46), Koronka Teodora (283), Mihnea Amalia (84), Roatiș Cristian Viorel (58), cl. VII Zaharia Stancu (52), cl. VIII Zaharia Sorin Gabriel (93); S.g. 11 cl. V Rău Bianca (85); S.g. 14 cl. III Cozmuța Camelia (105), Cotuna Andreea (70), Fărcaș Daniela (175), Gal Cristina Margareta (90), Mihalca Ramona (86), Nica Ciprian (80), Pop Diana (67), Sălăgean Delia (29), Smical Vlad (70), Vasiliu Cornelia Elisabeta (74), cl. VII Ghiunca Monica (89); S.g. 15 cl. IV Merci Gențiana (100). Lic.ind. 8 cl. V Zaharia Ovidiu Marcel (80), cl. VI Cosma Cătălin (70), cl. VII Radu Anamaria (100) **BABICUI** (OLT) S.g. cl.

Scanned with OKEN Scanner

VII Bucă Nicoleta (100). **BĂILE OLĂNEȘTI (VÎLCEA)** S.g. cl. VII Nicolin Tiberiu-Ionel (60). **BĂILEȘTI (DOLJ)** S.g. 1 cl. VII Ungureanu Traian Adrian (149); S.g. 4 cl. VIII Sălceanu Leonard (127); S.g. 5 cl. VI Huțanu Alina (69). **BEIUȘ (BIHOR)** Lic. „S. Vulcan" cl. VIII Tamaș Corina (37). **BICAZ-CHEI (NEAMȚ)** S.g. 1 cl. V Oniga Cătălina (90), Săpunaru Luminița (94). **BISTRIȚA (BISTRIȚA-NĂSĂUD)** S.g. 1 cl. VIII Pintilie Lucian (77); Lic. „L. Rebreanu" cl. III Zamă Luminița (80), cl. VI Catană Oana Emilia (101). **BÎRLAD (VASLUI)** S.g. 8 cl. IV Tocan Franco (60), cl. V Vasiliu Mihaela (80); S.g. 11 cl. V Perju Sanda (30). **BOLDEȘTI-SCĂIENI (PRAHOVA)** S.g. 1 — ciclul primar: Roman Nicușor (84), Popa Carmen (78), Drăgan Georgiana (84), Ciripoiu Cornel (80), Tolomei Ionela (77), Cărnuță Laura (79). Costache Florentin (78); ciclul gimnazial: Soare Oana (73). **BOTOȘANI (BOTOȘANI)** S.g. 6 cl. V Runteanu Alina Bogdan (210); S.g. 7 cl. III Micu Ana Maria (130), cl. VII Atudosie Cristina Ioana (70), Bălan Victor Codruț (100), cl. VIII Bălan Ioana Cornelia (150), Carp Livius (98); S.g. 8 cl. V Sabie Florin (90), cl. VI Amurăriței Cristina (100), Boghițoiu Carmen (90), cl. VII Timofana Daniela (87); S.g. 12 cl. IV Ștefanache Simona Mariana (330), cl. VI Moraru Camelia (80), cl. VII Ticalo Adriana (74); S.g. 13 cl. V Baș Marius (85), Chirlca Adrian (84), Cojocaru Maria (84), Costraș Monica Maria (88), Curelaru Gela (90), Jijie Alina (90), Onofre Brindușa (75), cl. VII Bejenaru Claudiu (124), Chirlac Roberta (132), Crețu Daniela (139), Grigoriță Sorin (113), Maliș Eugenia (253), Mintici Isabela (141), Pinzaru Willi (111), Sfeclis Florin (134), cl. VIII Istrate Ramona (130); S.g. 14 cl. V Scutariu Ciprian (230), Tarabusan Florin (150), Vieru Mirela (140); Lic. „A. T. Laurian" c. IX Balan Bogdan (93), Corduneanu Radu (105).

BRAȘOV (BRAȘOV) S.g. 5 cl. V Dobrescu Oana (61), cl. VI Cușmir Eusebiu (59), Dobrescu Alina (77), Lazăr Răzvan (145), Mailat Călin (44), Păcurar Paula (84), Soda Bogdan (80), cl. VII Daia Ioana (51), Dumitru Andona (75), Leonida Gabriela (76), cl. VII Suciu Claudia (80); S.g. 6 cl. V Popovici Simona Ioana (96), cl. VII Curtu Alexandru Lucian (75); S.g. 12 cl. VI Pop Călin (56), VII Dălălău Anca (63), cl. VIII Dima Lucian (150); S.g. 13 cl. VII Criș Mihaela Cristina (53), cl. VIII Tătar Simona (65); S.g. 24 cl. VII Gherghel Alexandru (35), Tărăscle Raluca (78); S.g. 26 cl. II Zimbrean Paula (80), cl. III Măicăneanu Mariana (41), cl. IV Brandinburg Daniel (84), cl. VI Pop Cristian (58), cl. VII Bucurenciu Daniel (84) Chițea Alexandra (160), Culai Ana Maria (110), Marin Violeta (102), Stefan Veronica (80), cl. VIII Ciucleru Elena (121); S.g. 28 cl. VI Bălășoiu Ilie (80), Popescu Marius Daniel (163), cl. VII Mîndraș Cristina Maria (64), Voinescu Cătălin Dan (100); S.g. 30 cl. VI Aldea Ciprian (62); Lic. „A. Șaguna" cl. IX Chițea Cristian (111); Lic. ped. cl. V Blaj Radu (80), Cindea Dragoș (80), Marin Andreea (79), Voina Liana (110), cl. VII Bucă Anca Ioana (69), Buda Silvia (76), Cămîrzan Dan Cristian (61), Ioan Bianca (156). **BRATCA (BIHOR)** S.g. cl VI Bradea Călin (92); **BRĂILA (BRĂILA)** S.g. 10 cl. V Crăciun Georgică (76); S.g. 12 cl. V Trufaș Valeriu (230); S.g. 14 cl. IV Aptelbaum Marcel (240), cl. VI Duțu Angelica (80), Vlădilă Mariana Rodica (80), cl. VII Aptelbaum Zemy (340); S.g. 18 cl. VI Canteș Cătălin (66); S.g. 22 cl. V Gurău Florin (80), Iancu Sorin Claudiu (89); S.g. 23 cl. V Balaban Anamaria (85), Buzea Loredana (80), Constantin Aureliu (58), Dumbravă Veronica Ionela (86), Florea Mihaela Anca (90), Lazăr Alina (86), Lăzărescu Ana Maria (81), Munteanu Dana (94), Mușat Dragoș (92), Negoiță Ramona (84), Pop Nicolae (78), Radu Cristian (100), Rusescu Silvia (82), Suditu Raluca (90), cl. VI Bratosin Viorel (130), Cibu Cristian (85), Iavorschi Monica Ingrid (57), Istrate Sergiu (150), Leu Elena Otilia (140), Mogedeanu Ama (109), Nica Florina Silvia (287). Panait Nicoleta (120), Serbu Violeta (150), cl. VII Dima Bogdan (117), Mihai Daniela (140), Urdă Silviu Valentin (20); S.g. 30 cl. VI Castravăț Ana Maria (100). **BREAZA (PRAHOVA)** S.g. cl. V Drăgan Claudia (46), Kerestegian Jeanette (52), Marin Anca (50), cl. VI Murezeanu Roxana (80), Săloiu Mihaela Violeta (66), Tomescu Liliana (80). **BUCECEA (BOTOȘANI)** S.g. cl. VI Bulboană Liviu (120).

BUCUREȘTI Fără mențiune de școală: cl. III Zamfir Ioana Livia (165), cl. VIII Manea Monica (78); S.g. 1 cl. IV Paven Dan Florin (158), Teodorescu Stefan (248); S. g. 3 cl. V Ganea Tudor (190); S.g. 5 cl. V Grama Marcel George (580); S.g. 11 cl III Albu Andrei (80); S.g. 17 cl. III Florescu Dragoș (128); S.g. 20 cl. VIII Petre Cristian Șerban (100); S.g. 24 cl. VIII Savopol Alexandru Virgil (110); S.g. 30 cl. I Șerban Laura Elena (110), cl. IV Serban Viorela Maria (120), cl. VIII Alexandru Mihaela Magdalena (90); S.g. 39 cl. IV Tomofte Ioana Maria (155); S.g. 46 cl. IV Zamfir Radu Bogdan (221); S.g. 50 cl. IV Benea Ioana Tereza (119); S.g. 51 cl. IV Maftei Tudor (100); S.g. 56 cl. IV Beca Ioana Irina (60); S.g. 57 cl. IV Răpău Bogdan George (52); S.g. 59 cl. VII Constantin Alina Geta (76); S. g. 70 cl. V Badea Cătălina (114), Sava Anca Gabriela (120), cl. VI Lepădatu Adrian Constantin (140), cl. VII Dumitru Alina (109), Fomin Tamara (130), Ionescu Ioana (108); S.g. 77 cl. VI Stănescu Angelica (120); S.g. 79 cl. VII Stănoiu Mihai Alexandru (89); S.g. 82 cl. VII Luzi Serban (70); S.g. 90 cl. IV Macarie Bogdan (144), cl. VIII Manea Monica (68); S.g. 108 cl. VI Mință Gheorghe (55); S. g. 109 cl. III Girban Laurențiu (100), cl. VIII Nistor Loredana (80); S.g. 117 cl. VI Stoica Andreea (255), cl. VII Tabarcea Ioan Constantin (120); S.g. 118 cl. IV Boca Andeea (190),

Scanned with OKEN Scanner

Poloni Irina (99), cl. VI Hosu Flaviau (120), Melinte Cristina (90); S.g. 121 cl. VII Tintă Monica (180); S.g. 143 cl. IV Rizeanu Alice Andreea (160); S.g. 150 cl. VI Constantinescu Elena (20), Vlădescu Lucian (297), Zaporojan Violeta (79); S.g. 156 cl. VI Barbu Silvia (65), Călugăru Simona (70), Cernescu Carmen (161), Cramer Suzana (247), Mihai Anca (103), Mihalache Corina (40), Popa Alina (57), Romanovschi A. (127), Vasilache Daniel (133); S.g. 172 cl. III Andrei Cosmin (50), Dumitrescu, Sorin (145), cl. VI Bănică Valeria (130); S.g. 174 cl. VI Duşmanu Teodora (219); S.g. 189 cl. VII Stroe Ionel Daniel (78); S.g. 190 cl. IV Stănculescu Andrada (275). cl. VI Marian Mihaela (145), Marinescu Adrian (70), Mariţescu Carmen Beatrice (120), Mihalache Vlad (129), Neacşu Violeta (150), Niţu Adrian (80), cl. VII Banghe Ionuţ (70). Marian Mihai (83), Mihai Roxana (85), Pop Ruxandra (90), Ştefan Florin (70); S.g. 192 cl. VIII Birsan Radu (50); S.g. 193 cl. VIII Bărbulescu Monica Ioana (211); S.g. 194 cl. VII Andrei Verginica Juliana (28); S.g. 197 cl. VIII Vasiliu Ioana Cristina (283); S.g. 198 cl. VII Heling Daniel (270); S.g. 199 cl. VI Guţă Bogdan (90); S.g. 201 cl. III Apostol Oana (73), cl. V Dumitrescu Monica (90); S.g. 206 cl. V Stănescu Bianca (80), cl. VI Gheorghiu Monica (70), Pauali Mircea (80), Roman Daniel (160), Vasile Ion (50); S.g. 278 cl. IV Cornea Gabi (80); Lic. „N. Bălcescu" cl. IX Nichita Mihaela Octavia (322), cl. X Iliescu Traian (40); Lic. mat. fiz. 3 cl. X Luzi Anca (108); Lic. ind. 24 cl. V Bădună Cristian Florin (235). **BUDA-COBIŢA** (VRANCEA) S.g. cl. III Ionaşcu Silviu (296), cl. VI Ionaşcu Teodor (127). **BUFTEA** (S.A. ILFOV) S.g. 1 cl. V Constantinescu Gabriela (174). **BUGHEA DE JOS** (ARGEŞ) S.g. cl. VI Irinia Cornelia (80). **BUHUŞI** (BACĂU) S.g. 2 cl. III Maxim Ioan Marius (33). **BUZĂU** (BUZĂU) S.g. 1 cl. VI Tatu Doina Monica (60); S.g. 2 cl. III Croitoru Lucian Viorel (27); S.g. 11 cl. VI Duşmănescu Adriana (50); S.g. 15 cl. VI Buga Monica (225); S.g. 16 cl. VII Popescu Nicoleta Marinela (110); Lic. ped. „S. Haret" cl. III Andrei Vicenţiu (100), Cocîltea Laura (117), Coticiu Cristina (80), Leu Carmen (120), Mărculesc Traian Paul (120), Motoşcă Daniela (110), Paraschiv Andrei (110), Petre Roxana (146), Stana Amalia (120), Trandafirescu Laura Mihaela (150), Voicu Răzvan (110).

CARACAL (OLT) S.g. 6 cl. V Catrina Veturia (100); S.g. 7 cl. V Bocai Sorin (55), Brasfaviceanu Tiberius (31), Moraru Marius (55), Murzin Dan Alin (56), Ungureanu Elena (70), Vasilescu Florin (70), cl. VI Strolea Emanuela (105). **CARANSEBEŞ** (CARAŞ-SEVERIN) S.g. 8 cl. V Albai Ramona Loredana (56), Alexa Petru (58), Cocie Lăcrămioara (58), Cristescu Georgeta (58), Moscovici Mircea (138), Munteanu Ionuţ (62), Poenariu Dan (59), Popa Bochiş Adrian (71), Surulescu Silvia (54), Trăiculescu Marian (58), Udrea Cosmin (47); Zolotar Ciprian (37), cl. VI Iurac Fleming (40), Pipa Daria (113); **CĂLĂRAŞI** (CĂLĂRAŞI) S.g. 4 cl. IV Băiculescu Mihaela (112), cl. V Barbu Augustin (160), cl. VII Anghel Corina (77), Baicu Adina (130), Baicu Antoaneta (130), Cimpulungeanu Anca (110), Dragomir Monica (81), Drăgan Nicoleta (77). **CĂLUGĂRENI** (GIURGIU) Lic. agroind. cl. IX Albu Cristina (100), Cioboleanu Carmen (180), Ciufu Vivi (100), Dobre Daniel (200), Mihai Viorica (180), Mirea Mirela (100). **CĂŞEIU** (CLUJ) S.g. cl. VI Boldor Paula (155). **CĂZĂNEŞTI** (IALOMIŢA) S.g. 2 cl. V Simon Doina-Maria (418). **CEHU-SILVANIEI** (SĂLAJ) S.g. cl. VI Cotobea Neluţa (117), Olar Gabriel Florin (76), Panes Remus (119), cl. VII Raţiu Ancuţa (135). **CERNAVODĂ** (CONSTANŢA) S.g. 1 cl. IV Chiriac Alina (107), Rupeşac Mihaela (406); S.g. 2 cl. V Stănescu Raluca (64), cl. VI Lojniţă Lucian (40); S.g. 3 cl. V Bogdan Radu (100), Gabor Domnica (100), Irimia Laurenţiu Giani (100), Năstasă Ciprian (100), Radu Costin (60), Şerbănescu Ştefan (100), cl. VI Coadă Aurelia (90), Gabor Ana (140), Gheorghiu Mihai (100), Ghenciu Adrian (100), Guţu Mădălin (80), Hansă Ana (140). Marinescu Carmen (100), Mărculescu Cristian (100), Vlădăreanu Octavian (120). **CERVENIA** (TELEORMAN) S.g. cl. VI Palea Monica (124). **CIURULEASA** (ALBA) S.g. cl. V Morar Felicia (100). **CIMPIA TURZII** (CLUJ) S.g. 5 cl. VI Giurgiu Octavian Nicolae (118); Lic. ind. cl. IX Istrate Călin (130). **CIMPINA** (PRAHOVA) S.g. 1 cl. VI Ionescu Costin Nicolae (81); S.g. 2 cl. V Ioniţă Claudiu (70), Sterie Corina (83), cl. VII Măcelaru Mihaela (70); S.g. 4 cl. V Beldiman Andrei (90), Dragomir Iulia (76), Dudui Laura (76), Gheorghiu Cezar (67), Suteu Iulia (73), cl. VI Barbu Anca (62), Dascălu Sever (80), Ilie Cristian Alexandru (80), Lupea Iulia (108), Mircea Răzvan (80), Nicolae Andrei (80), Nicolescu Morena (80), Nuţă Gabriela (80), Pascu Daniela (78), Rizea Adrian (80), Sirbu Andreea (92), cl. VII Popovici Irina (110); S.g. 7 cl. VII Vasile Mihaela (120); Lic. ind. 5 „N. Grigorescu" cl. IX Budală Adrian (99), Ilie Mihai (130), cl. X Barbăroşie Cristian (110). **CIMPULUNG MOLDOVENESC** (SUCEAVA) S.g. 3 cl. VI Piticari Gabriela (49), Vişinari Roxana (50). **CIMPULUNG MUSCEL** (ARGEŞ) S.g. 2 cl. IV Stoicescu Iuliana (50); S.g. 5 cl. VI Tudor Camelia (62); S.g. 6 cl. VI Soare Amorina (270), cl. VII Stan Gabriel (90); Lic. ind. 3 cl. XII Stănică Daniel (180). **CLUJ-NAPOCA** (CLUJ) S.g. 6 cl. VI Listiş Ovidiu (84), Pop Codruţa Cosmina (195), Rotaru Herţa Oana (130), cl. VII Gabor Adriana (150), cl. VIII Netea Maria (145); S.g. 11 cl. V Câmpean Ramona (100), Manchiş Monica (100), cl. VI Bebu Alexandru (80), Mircean Cosmin (150), Sălăgean Sergiu (175); S.g. 15 cl. V Dulean Victoriţa (110); S.g. 17 cl. V Jimboreanu Cosmin (254); S.g. 29 cl. V Olteanu Sorin (75); Lic. „G. Barţiu" cl. IX Ceţia Andrei (110); Lic. „Naţional" cl. V Puiu Daniela (29); Lic. „N. Bălcescu" cl. VII Bologa Cristian (95); Lic. şt. ale naturii cl. IV Turcu Tudor (86), cl. V Crişan Gabriela (110), Urs Adrian (158). **COMĂNEŞTI** (BACĂU) S.g. 1 cl. V Haraba Codrin Nicolae (66); S.g. 2 cl. VI Dudău Ana

Scanned with OKEN Scanner

Maria (111); S.g. 10 cl. VI Posedaru Adina (112). CONSTANȚA (CONSTANȚA) S.g. 6 cl. VI Olteanu Marius Constantin (150); S.g. 28 cl. VI Simion Irina (80), cl. VII Ali Bianca (109); S.g. 35 cl. IV Lambă Cristina (262); S.g. 40 cl. V Ciolacu Cătălin (170), Gorgovan Cătălin (170), Trandafirescu Gilda (59), Ungureanu Dragoș (70). CORABIA (OLT) S.g. 3 cl. V Stoica Leonard (118); S.g. 4 cl. VI Puținelu Victoria (130); cichl primar: Teca Nicoleta (27). CORNU (PRAHOVA) S.g. cl. V Iorga Iuliana (127). COTEANA (OLT) S.g. cl. V Filea Florin (44), cl. VI Almăjanu Gheorghița (30), Bădescu Victoriță (79), Calcan Mădălina (50), Jilavu Paula (30), Soricilă Anița (50), Vălu Mihai (35), Vidu Valentin (30), Vilcea Mihaela (30), cl. VII Jilava Nadia (30), Vălu Ion (40).

, CRAIOVA (DOLJ) S.g. 6 cl. IV Paulon Bogdan (60), cl. V Mocioacă Ileana (150), cl. VI Bălan Laurențiu (34); S.g. 2 cl. V Gîtlan Iulia (71), cl. VII Floescu Rodica (80); S.g.9 cl. VI Basăverde Radu (100), Iordache Ovidiu (100), cl. VII Mateescu Carmen (120), Zăvălaș Ionuț (102); S.g. 19 cl. IV Ionescu Eduard Ionuț (156), cl. VI Adam Cătălin (94), Meniu Mădălin (81); S.g. 21 cl. V Crețu Anda (100), Gîrju Anda (89), Tenu Luiza (104), cl. VI Munteanu Claudiu (93), Radu Daciana (170), Răceanu Ruxandra (91), cl. VII Ciurezu Manuela (111), Dinu Cristian (147), Dumitru Amalia (114), Gligore Daniela (114), Macovei Cristina (109), Marin Catrinel (118), Mitreanu Bogdan (140), Mitroica Mihaela (120), Niculescu Laura Diana (115), Oprea Mihai (115), Preotu Iuliana Gabriela (120), Vasilescu Oana (45), Vega Tiberiu (125), cl. VIII Mitucă Laura (110); S.g. 30 cl. V Crușoveanu Mihai Leonard (500); S.g. 31 cl. V Ionescu Mirela Amalia (80), cl. VI Ioana Mihaela (160), cl. VII Broscaru Marius (57), Sandu Mihaela (73); Lic. artă cl. III Hărăbor Daniel Bogdan (140); Lic. ind. cl. V Stan Speranța (120), cl. VI Tulea Claudiu (149), Vancea Mădălina (131), cl. IX Baciu Iuliana (87), Dinu Sarmis (104), Irincă Marius (430), Pirvuleasa Robert (110), Țăicuș Tatiana (155), Trușcă Magdalena (97), Țepuș Cristi (63), cl. IX Mituc Sidonia (104); Lic. „Frații Buzești" cl. VI Burci Janina Elena (110), Pescăruș Cristinu (72), Zamfir Mirel (116), cl. VII Zamfir Eugen Cristian (100), cl. IX Preda Dumitru Felician (80); Lic. „N. Bălcescu", cl. VI Dima Alina (67), cl. VIII Savin Diana (70), cl. IX Alexandroiu Loredana (58). Deaconescu Maria Celesta (132); Lic. fil. ist. cl. V Ciobârea Cristi (64), Crișu Andreea (65), Crișu Roxana (56), Diaconu Dan (61), Militaru George (52), Stoian Adela (52), Tancu Mihail (70), cl. VII Cochină Nina (101), Mirea Nicoleta Eliza (112), Popescu Emma Cristina (99), Sarfă Nicoleta (120). CRUCEA (SUCEAVA) S.g. cl. VI Bădiliță Mirela (70), Nastuc Mariana (70), Scheuleac Marioara (80). CUDALBI (GALAȚI) S.g. 1 cl. V Guzgă Ileana (87), Irimia Natalia (92), Istrate Mihai (60), Lungu Constanța (66), Melinte Florinela (41), cl. VI Andrunache Nicolae (125), Boeru Nicoleta (117), Ceromila Liliana (179), Istrate Monica (71), Tănase Niculina (161), Tulearcă Ionică (145), Virlan Costinela (123). CUGIR (ALBA) S.g. 2 cl. VI Mașca Monica (70). CURTEA (TIMIȘ) cl. VI Moldovan Florin (65), cl. V Avrămescu Dorina (77), cl. VI Cosma Iuliana (152), Nemeșuș Nicoleta (80). CURTEA DE ARGEȘ (ARGEȘ) S.g. cl. VI Armeanu Daniel (88); S.g. 1 cl. V Chirvasiu Andreea (90); S.g. 3 cl. V Duțeanu Horațiu Daniel (50), cl. VII Nercis Mihai (71); S.g. 4 cl. VI Dică Petre (30), Urda Mihai (153), Vasilescu Irina (138); S.g. 5 cl. VIII Chiuntu Radu (115); S.g. 6 cl. III Molea Cristian (92), cl. VI Ionescu Lucian (113). CUZDRIOARA (CLUJ) S.g. cl. V Muncelean Dana (60), Săsărman Liana (62), cl. VI Mancelean Camelia Marcela (95). DAIA ROMÂNĂ (ALBA) S.g. cl. VIII Cîrstea Vasile Flavius (35). DAIABANI (BOTOȘANI) S.g. cl. V Barbacariu Silviu (81), Ciobotaru Lăcrămioara (78), Gabor Mariana (66), Iordache Liviu(60), Lazăr Răzvan (82). Plămadă Mihaela (60), Scutaru Mihaela Veronica (67), Zaharia Dan (70), cl. VIII Stoian Ciprian (80). DÂRMĂNEASA (BACĂU) S.g. cl. V Binalliu Cornelia (38), Ster Tirolu (38). DÂRMĂNEȘTI (DÎMBOVIȚA) S.g. cl. VI Dăcan Mariana (42). DĂNEȚI (DOLJ) S.g. cl. VII Manea Dănuța (40), Vasile Octavia (50). DEJ (CLUJ) S.g. 1 cl. IV Timar Camelia (261), cl. VI Bouc Nicoleta Mihaela (73), cl. VII Dragoman Liliana (144); S.g. 3 cl. VI Călimon Anamaria (210), Hodorogea Anca (203), Ungureșan Aniela (210), cl. VII Rusu Monica Ioana (102); S.g. 4 cl. VI Suteu Ramona (201), cl. VII Bogdan Alina (173). DOMNEȘTI (ARGEȘ) S.g. cl. IV Ilie Claudia (105). DRĂGĂNEȘTI OLT (OLT) S.g. 1 cl. III Dumitru Ancuța Eugenia (106), Dumitru Marcela Mihaela (200). DROBETA-TURNU-SEVERIN (MEHEDINȚI) S.g. 1 cl. VI Beze Laviniu (110); S.g. 2 cl. VI Ionică Mioara-Adriana (78); S.g. 3 cl. V Tănasie Adrian (34), cl. VI Drăghici Elena (53), Florea Marian Viorel (51), Chidel Liliana (84), Sturek Irina (74); S.g. 8 cl. V Bulucea Lavinia (160), Constantinescu Carmen (80), Fundeanu Florin (89), Motoargă Teodora (59), Sîrbu Manuela Claudia (67), cl. VI Ionică Mioara (82); S.g. 16 cl. V Rusu Cătălina (160). DR. PETRU—GROZA (BIHOR) S.g. cl. VI Drăgoi Răzvan (90), cl. VII Bora Nicoleta (72), Ungur Dorina (72). DUDEȘTI (BRĂILA) S.g. cl. IV Nelcu Iulian (252), cl. V Drăgănescu Mihaela Aurora (80), Dumitru Răzvan (60), cl. VII Potecă Luiza (130). DUMBRĂVENI (SUCEAVA) S.g. cl. VII Apopei Adrian (58), Filote Cristian (56). (Va urma)

Lei 7

Index 41601

I. Informația c. 2256

Scanned with OKEN Scanner

ISSN 0016–5441

SOCIETATEA DE ȘTIINȚE MATEMATICE
DIN REPUBLICA SOCIALISTĂ ROMÂNIA

GAZETA MATEMATICĂ

PUBLICAȚIE LUNARĂ PENTRU TINERET

7

DIN CUPRINS:

- O ANIVERSARE DEOSEBITĂ
- CONCURSUL DE MATEMATICĂ, ETAPA PE ȚARĂ, 1988
- PROBLEME REZOLVATE PENTRU GIMNAZIU, LICEU, CONCURSUL ANUAL AL REZOLVITORILOR
- PROBLEME PENTRU CICLUL PRIMAR, GIMNAZIU, PRELIMINARE DE TIP O.I.M. PENTRU ELEVII DIN GIMNAZIU, LICEU, PREGĂTITOARE PENTRU O.I.M. și O.B.M., CONCURSUL ANUAL AL REZOLVITORILOR, INFORMATICĂ

ANUL XCIII Nr. 7/1988

Scanned with OKEN Scanner

GAZETA MATEMATICĂ

SUMARUL

1. O aniversare deosebită, de *Valter Olariu* 273
2. Configurații geometrice simple în plan (II), de Acad. *N. Teodorescu* 277
3. Concursul de matematică, etapa finală (pe țară), Cluj-Napoca, 12 aprilie 1988 283
4. Barajul din 15 aprilie 1988 285
5. Premianții Concursului de matematică, etapa pe țară, Cluj-Napoca, aprilie 1988 286
6. Probleme rezolvate pentru gimnaziu (E : 9170, E : 9185, E : 9191, E : 9195, E : 9205, E : 9207, E : 9212, E : 9216) 287
7. Probleme rezolvate pentru liceu (21184, 21202, 21203). . . . 293
8. Problemă rezolvată pentru Concursul anual al rezolvitorilor (C : 674) 295
9. Probleme pentru ciclul primar (49—56) 295
10. Probleme pentru gimnaziu (E : 9467—E : 9490) 297
11. Probleme preliminare de tip O.I.M. pentru elevii din gimnaziu (O.G. : 75—O.G. : 76) 300
12. Probleme pentru liceu (21485—21512) 300
13. Probleme pregătitoare pentru O.I.M. și O.B.M. (O : 554—O : 556) . . . . . cop. III
14. Probleme pentru Concursul anual al rezolvitorilor (C : 801—C : 808) . . . . . cop. III
15. Probleme de informatică (I : 337—I : 338) . . . . . cop. IV

ANUL XCIII 7 1988

COMITETUL DE REDACȚIE

Lector univ. Dumitru Acu, Sibiu; lector univ. Toma Albu; lector univ. Horea Banea, Brașov; lector univ. Octavian Băscă; conf. univ. Dan Brânzei, Iași; prof. Constantin Cărbunaru; prof. Marcel Chiriță; prof. Pál Dályay, Tg. Mureș; lector univ. Inocențiu Drăghicescu; prof. Ioana Drăghici; înv. Alexandrina Dumitru; prof. Ilie Gheorghiță; prof. Adrian Ghioca, Sinaia; cercet. princ. Gheorghe Gussi; lector univ. Stere Ianuș; prof. Ștefan Kadar, Baia Mare; lector univ. Constantin Niță; prof. univ. Arpad Pal, Cluj-Napoca; lector univ. Laurențiu Panaitopol; prof. Olimpia Popescu, Ploiești; matem. Paul Rudovici-Măreuleșcu; lector univ. Gheorghe Sireteanu; lector univ. Ioan Tomescu; prof. Florin Vulpescu-Jalea.

REDACȚIA GAZETEI MATEMATICE

Redactor șef (delegat): Acad. N. Teodorescu; redactori principali: prof. Ilie Ilieșcu, prof. Liviu Pîrșan, prof. Marcel Țena; redactori principali onorifici: prof. C. Ionescu-Țiu, asist. univ. Eliferie Rogai; redactori: prof. Liliana Balaci, prof. Alexandru Constantinescu.

Responsabil de număr: Marcel Țena

ADRESA REDACȚIEI GAZETEI MATEMATICE

Str. Academiei nr. 14, tel. 14.46.53 — București, 1, cod. 79543.

Cititorii din străinătate se pot abona prin ROMPRESFILATELIA, Sectorul Export-Import-Presă, Calea Griviței nr. 64—66, P. O. Box 12-201, Telex 10376 Prfir, București, ROMÂNIA.

Scanned with OKEN Scanner

GAZETA MATEMATICĂ
PUBLICAȚIE LUNARĂ PENTRU TINERET
Anul XCIII nr. 7 iulie 1988

O ANIVERSARE DEOSEBITĂ

Viața socială a fiecărui popor, a fiecărei națiuni este periodic dominată de personalități deosebite, a căror activitate lasă urme adînci într-o anumită perioadă de dezvoltare a acesteia. Viața științifică și mai ales cea a matematicii românești este onorată, începînd cu anii 30, de unul din cei mai valoroși reprezentanți ai săi, Academicianul Profesor *Nicolae Victor Teodorescu*, care în 18 iulie a. c: își serbează cea de a 80-a aniversare.

Legat trup și suflet de glia străbună, mare continuator al matematicienilor români care au ilustrat începuturile acestei activități în țara noastră (*Spiru Haret, M. Davidoglu, Gh. Țițeica, Tr. Lalescu, D. Pompeiu, O. Onicescu*), înzestrat cu o rară capacitate de a intui și înțelege sensul real al dezvoltării matematicii, a contribuit decisiv la modernizarea acestei discipline, atît din punct de vedere teoretic cît și practic. Și nu numai atît : s-a integrat activ și cu dăruire în viața socială a țării, aducînd un aport substanțial în cunoașterea și prețuirea realizărilor României în aproape toate colțurile lumii. Este astfel, prețuit și ca matematician și ca om democrat-comunist, căruia actuala generație de matematicieni îi datorează mult.

Născut în București, a urmat cursurile liceului Spiru Haret, bacalaureatul trecîndu-l în 1926 la seminarul pedagogic Titu Maiorescu, unde a promovat și ultima clasă de liceu. În anul 1929 este licențiat al facultății de științe din București, secția matematică ; pleacă apoi la Paris unde, la 25 aprilie 1931, își susține, cu strălucire, teza de doctorat intitulată „La derivée aréolaire et ses applications à la Physique mathématique" în fața unei comisii formată din *Henri Villat* (mare specialist în mecanica fluidelor) — președinte, iar membrii au fost *Arnaud Denjoy* (reprezentant de frunte al școlii franceze de teoria funcțiilor), și *H. Beghin*, la care, în mod excepțional, a fost invitat și profesorul român *Dimitrie Pompeiu*. Deși i s-a oferit un post de profesor în imperiul francez de la acea dată, s-a întors în țară, unde începe o activitate universitară care a continuat pe o perioadă de 47 ani. Astfel, a fost asistent la catedra de mecanică a facultății de științe din București pînă în noiembrie 1937, dată la care a fost numit conferențiar suplinitor de mecanică la Academia de arhitectură din București. Între 1 octombrie 1942 și 15 septembrie 1948 este numit, prin chemare, profesor titular de geometrie descriptivă și stereotomie la facultatea de arhitectuă a Politehnicii din București. În acest interval a fost profesor de matematică la Școala de conducători desenatori (1934—1937), profesor de calcul operațional la Institutul de statistică, actuariat și calcul și l-a suplinit pe prof. *Gr. C. Moisil*, plecat în misiune peste hotare, predînd cursul de Analiză superioară la secția mate-

Scanned with OKEN Scanner

matici a facultății de științe din București. Imediat după Reforma Învățămîntului din 1948, *N. Teodorescu* a fost numit șef de catedră la trei unități de învățămînt superior din București: la Universitate (la facultatea de Matematică și fizică) la Institutul Politehnic (la facultatea de Electrotehnică unde a predat cursul de Matematici speciale) și La Institutul de Construcții (unde a predat tot Matematici speciale). Din anul 1953 și pînă în momentul pensionării (1 iulie 1978) a fost șeful catedrei de Ecuații diferențiale (devenită în 1970 catedra de Analiză aplicată) unde a predat cursuri de Ecuații diferențiale, Ecuațiile fizicii matematice, Calculul variațiilor, Capitole speciale din teoria ecuațiilor cu derivate parțiale, contribuind la formarea unei liste apreciabile de profesori de matematică, cadre didactice universitare și cercetători matematicinei, răspîndiți în toate colțurile țării. Pentru pregătirea la nivelul cel mai înalt posibil a folosit un limbaj matematic modern, în care a introdus permanent cele mai noi dezvoltări pe plan mondial din teoria ecuațiilor diferențiale și cu derivate parțiale. Mărturie în acest sens stau cele cinci ediții succesive ale cursului de Ecuațiile fizicii matematice apărute în perioada 1960—1978 în Editura didactică și pedagogică și Editura Tehnică; aceste cărți sînt comparabile cu cele mai reușite realizări din acest domeniu pe plan mondial. Aceste rezultate sînt o consecință firească a excepționalei pregătiri științifice a Acad. Prof. *N. Teodorescu* care, înzestrat cu un spirit analist pătrunzător, a intuit de fiecare dată care erau direcțiile viitoare de dezvoltare a matematicii; de aceea, a tratat problemele sub aspectul perspectivei, cu o logică fină și pătrunzătoare utilizînd totodată o tehnică matematică modernă și de mare finețe. În acest sens, să amintim faptul că prof. *N. Teodorescu* a înlocuit definiția clasică a derivatei arcolare, dată de *D. Pompeiu* în 1912, care limitează considerabil posibilitățile de aplicare ale acestei noțiuni, printr-o definiție independentă de noțiunea de derivată clasică, în care teoria integralei *Lebesgue* joacă un rol esențial; în acest mod sînt posibile aplicații ale acestei noțiuni în mecanică, geometrie diferențială, precum și diverse generalizări. De asemenea, avînd ca punct de plecare teoria lui *J. Hadamard* privind soluția elementară și rezolvarea problemei *Cauchy* pentru ecuații liniare cu derivate parțiale de tip hiperbolic normal și de ordinul al doilea, a generalizat această metodă la sisteme liniare de ecuații cu derivate parțiale de tip hiperbolic, ceea ce permite aplicarea metodei lui *Hadamard* la ecuații hiperbolice liniare de ordin superior și la unele sisteme de ecuații care intervin în aplicații (cum ar fi cazul sistemului lui *Dirac* pentru electronul magnetic). Aceste probleme îl conduc în mod natural la teoria geometrizării teoriei ecuațiilor liniare cu derivate parțiale, utilizînd în acest scop un instrument geometric cu totul nou: teoria spațiilor *Finsler* (care în momentul de față cunoaște o dezvoltare amplă). În acest context, *N. Teodorescu* adîncește conceptele de bază ale teoriei propagării undelor indicînd rolul determinant pe care-l ocupă în această teorie singularitățile soluțiilor pe caracteristicile ecuațiilor în cauză, un punct de vedere larg utilizat azi în probleme practice și teoretice. Toate aceste rezultate care par teoretice, au fost însă aplicate la ecuații din practica efectivă, avînd drept scop ridicarea tehnicii românești la un nivel superior. Amintim și lucrările privind teoria elasticității, a hidrodinamicii, a mecanicii mediilor continue, probleme de echilibru elastic, teoria geodezicelor, teoria obiectelor geometrice, a mărimilor și operațiilor, teoria invariantă a propagării undelor, teoria undelor de șoc, teoria operatorilor diferențiali etc. Nu este lipsit de sem-

Scanned with OKEN Scanner

nificație să amintim că noțiunile introduse în teza de doctorat de Acad. *N. Teodorescu* au generat multe lucrări în țară (teze de doctorat, lucrări de specialitate, monografii) și au fost reluate și amplificate în alte țări (de ex. lucrările lui *Vekua* și *Bitzadze* din U.R.S.S.).

Acad. *N. Teodorescu* a participat prin comunicări, conferințe, referate la extrem de numeroase reuniuni științifice din țară și străinătate, făcînd cunoscute rezultatele obținute în activitatea științifică, atît de el cît și de școala matematică română. În urma activității științifice remarcabile și a rezultatelor deosebite obținute, a obținut în anul 1953 Premiul de Stat pentru lucrarea în două volume intitulată „Metode vectoriale în fizica matematică"; a fost ales membru corespondent al Academiei Române în 1955 iar în anul 1963 devine membru titular al acestui înalt for științific.

Activitatea științifică a academicianului *Nicolae Teodorescu* a fost apreciată și în afara granițelor țării, domnia sa fiind doctor honoris causa al Universității din Caen din anul 1967, membru străin al academiilor din Palermo și Messina din anul 1967, membru de onoare al Uniunii Asociațiilor de Societăți Științifice din R. P. Bulgaria, membru de onoare al Uniunii Balcanice a Matematicienilor și este decorat cu Ordinul Metodiu și Chiril clasa I (R. P. Bulgaria).

Profesorul *N. Teodorescu* s-a dovedit un conducător și organizator dotat cu o energie inepuizabilă, care a muncit cu rîvnă, deosebită pricepere și multă imaginație, aducînd o contribuție esențială la progresul matematicii în țara noastră. Astfel în perioada 1949—1975 este șeful secției de Ecuații diferențiale și cu derivate parțiale de la Institutul de Matematică al Academiei; între 27 mai și 4 iunie 1956 are loc la București al patrulea congres al matematicienilor români, care s-a bucurat de un mare succes de participare românească și străină datorită faptului că principalul organizator al congresului și totodată secretar general al acestuia a fost Acad. *N. Teodorescu*. Apoi timp de 12 ani prof. *N. Teodorescu* a fost decanul facultății de matematică din București (1960—1972), din 1965 este membru în biroul executiv al Consiliului Național al cercetării științifice și președinte al secției I de științe matematice și fizice. În aceste funcții a depus o muncă eficientă și stăruitoare pentru realizări românești de prestigiu, punînd astfel bazele progresului actual în aceste discipline. A organizat în august 1968 Colocviul național de ecuații funcționale iar în 1969, la încheierea mandatului în care România a condus Uniunea matematicienilor de expresie latină, al cărei secretar general a fost, a organizat congresul acestei instituții, congres care s-a bucurat de o participare record și a avut un mare succes internațional. Ca decan al facultății de Matematică, a devenit și director al Centrului de Calcul al Universității din București, funcție pe care o deține și în prezent; a avut o contribuție decisivă la organizarea și înzestrarea acestei unități, care a devenit un etalon în activitatea instituțiilor similare din țară.

Din anul 1967 este secretar General al Uniunii Balcanice a Matematicienilor, o instituție științifică care a beneficiat în mod substanțial de competența și energia deosebită a Acad. *N. Teodorescu*; amintim că el este organizatorul Balcaniadelor de matematică care au început în anul 1971 la București și au continuat apoi la Atena, Sofia, Belgrad, Ankara, Pitești, Sofia și la care tinerii studenți și cercetători din țările balcanice și-au dovedit talentul și la care nu de puține ori studenții români și-au însușit majoritatea premiilor. De asemenea, a organizat numeroase congrese ale acestei organizații internaționale (Varna, Rethimnon, Sofia,

Scanned with OKEN Scanner

Belgrad) care s-au bucurat, tocmai datorită străduinței sale, de condiții optime de desfășurare. A fost o perioadă de timp vicepreședinte al Asociației Oamenilor de Știință, devenind ulterior președintele ei, funcție pe care o ocupă și acum; și în această calitate și-a dovedit pricoperea și competența contribuind la ridicarea prestigiului științei românești în activitatea internațională. Acad. *N Teodorescu* s-a angajat activ și total în activitatea de ridicare socială a întregii țări, fiind membru al Partidului Comunist Român; a fost ales în diverse foruri conducătoare, fiind și membru al Comitetului Central al P.C.R (1970—1980).

Dar activitatea cea mai îndelungată, de peste 65 ani a desfășurat-o în cadrul Societății de Științe Matematice din România. Începutul, ca orice început în această direcție, l-a realizat prin rezolvarea problemelor propuse prin Gazeta Matematică și a continuat prin elaborarea de probleme. Din anul 1948 este vicepreședinte al S.S.M. responsabil cu publicațiile acestei instituții, iar din anul 1975 este președintele ei. În această calitate a depus eforturi susținute pentru desfășurarea în condiții optime de activității S.S.M. Rezultatele deosebite ale acestei instituții, obținute în ultima vreme, sînt nemijlocit legate de activitatea neobosită și permanentă a președintelui ei Acad. *Nicolae Teodorescu*. Astfel, încît de la înființarea S.S.M., Acad. *N. Teodorescu* coordonează revista „Bulletin Mathématique" iar din anul 1975 toate publicațiile periodice și neperiodice ale Societății. În anul 1980 înființează „Gazeta Matematică metodică și metodologică" pentru profesori și studenți.

Retructurează conținutul vechii Gazete, adăugindu-i rubrici noi (Informatică, Concurs, Recenzii, Probleme comentate etc).

Se înființează, sub egida domniei sale, Concursul Gazetei Matematice, continuîndu-se astfel tradiția vechii Gazete Matematice, sub numele de „Concursul anual al rezolvitorilor".

Coordonează pînă în 1980 Olimpiadele naționale de matematică și militează pentru introducerea olimpiadelor locale pentru învățămîntul primar și naționale pentru învățămîntul gimnazial, al căror președinte este de la înființarea lor.

A organizat sub egida Societății de matematică consfătuiri cu învățătorii și profesorii de matematică din învățămîntul gimnazial, liceal și universitar care au un caracter metodic, metodologic și științific. Acad. *N. Teodorescu* reorganizează, în 1975, Societatea de Științe Matematice și participă activ la Sesiunile de comunicări ale diverselor filiale, folosind aceste prilejuri și pentru a ține lecții și conferințe elevilor din învățămîntul liceal și gimnazial. Datorită abnegației sale astăzi Societatea de Matematică numără 88 de filiale și subfiliale. Sub egida Societății de Matematică iar sub coordonarea Acad. *N. Teodorescu* au apărut în ultimii ani numeroase culegeri de probleme și publicații metodico-științifice adresate elevilor și profesorilor, care s-au bucurat de un binemeritat succes. Este organizatorul cursurilor de vară ale profesorilor de matematică de la Predeal, ajunse acum la a 27-a ediție.

Este evident greu să cuprinzi într-un spațiu restrins o activitate atît de prodigioasă ca Acad. Prof. *N. Teodorescu*.

Noi, foștii studenți, actualii colaboratori, toți cei care ne-am folosit în activitatea noastră de experiența și competența profesorului *N. Teodorescu*, ne exprimăm cele mai alese sentimente de prețuire și respect față de activitatea depusă și îi dorim aceeași vigoare și tinerețe și în viitor.

Prof. dr. V. Olaru, Inst. Polit. București

Scanned with OKEN Scanner

CONFIGURAȚII GEOMETRICE SIMPLE ÎN PLAN (II)

DREPTUNGHIURI ÎNSCRISE ÎN TRIUNGHIURI

de Acad. Nicolae Teodorescu

§.1. Dreptunghiuri în geometria triunghiurilor

Înscrierea unor poligoane convexe în alte poligoane convexe este o sursă interesantă de probleme geometrice, care pot angaja și alte discipline ca analiza matematică, algebra sau trigonometria, ultima fiind socotită ca un capitol al geometriei, modelatoare a proprietăților unei categorii esențiale de funcții elementare, prezente pretutindeni în analiză și aplicațiile acesteia, funcțiile circulare, adesea salutare în rezolvarea unor probleme din cele mai variate domenii ale matematicii.

Înscrierea unor triunghiuri în altele, cum sînt cele mediane sau ortice, conduce la proprietăți din geometria triunghiului, care se multiplică prin considerarea unor configurații mai complexe în care intervin și cercuri, de exemplu, cum ar fi cercul circumscris sau cercul celor nouă puncte.

Înscrierea unor poligoane cu mai multe laturi în triunghiuri poate fi făcută pînă la exagoane. Exemplul pătratului înscris într-un triunghi oarecare a pus cîteva probleme de relații între laturile acestuia și cele ale triunghiului, de existență și unicitate etc.(*)

În cele ce urmează, vom studia cazul dreptunghiurilor înscrise în triunghiuri, care pune și alte probleme, dintre care unele pot îmbogăți cu aspecte noi geometria triunghiului, pledînd în favoarea perenității acesteia. De obicei, cazurile particulare oferă mai multe proprietăți specifice decît cele mai generale, însă în problema înscrierii dreptunghiurilor în triunghiuri vom constata contrariul.

§.2. Teoreme de inscriptibilitate, existență și unicitate

Fiind dat un triunghi oarecare ABC, un dreptunghi înscris în acest triunghi trebuie, în baza lemei 1 și a observației 2, ca acesta să aibă două vîrfuri pe una din laturile triunghiului, celelalte fiind pe cele două laturi ale acestuia. Intuiția ne conduce și avem certitudinea că în orice triunghi poate fi înscris un dreptunghi și chiar o infinitate; rămîne să precizăm însă această certitudine prin stabilirea de condiții de existență convenabile, ceea ce formează obiectul următoarei teoreme:

Teorema 1. *În orice triunghi ABC pot fi înscrise dreptunghiuri asemenea unui dreptunghi dat, în următoarele condiții necesare și suficiente:*

1) *Dreptunghiul considerat să aibă două vîrfuri pe una din laturile triunghiului, celelalte două fiind pe celelalte două laturi ale triunghiului;*

2) *Unghiurile pe care latura triunghiului pe care se găsesc cele două vîrfuri ale dreptunghiului, le face cu laturile adiacente în triunghi să fie ambele ascuțite sau unul ascuțit și celălalt drept.*

Demonstrație: 1) Fie k raportul între laturile dreptunghiului cu care dreptunghiurile înscrise în triunghiul ABC trebuie să fie asemenea. Putem considera totdeauna $k \geqslant 1$, deoarece putem încerca să așezăm dreptunghiul înscriptibil fie cu latura cea mare, fie cu cea mică pe latura considerată în triunghiul ABC.

Lema 1 arată că dacă înscrierea dreptunghiului este posibilă, acesta va fi în interiorul triunghiului cu excepția vîrfurilor care se vor găsi pe laturile lui ABC, două pe una din laturi și celelalte două, fiecare pe cîte una din celelalte două laturi ale triunghiului. Nu este posibil ca ambele să fie pe aceeași latură, deoarece aceasta ar fi paralelă cu cea care conține primele două vîrfuri și triunghiul ar fi degenerat. Condiția 1) este deci necesară.

Folosind notațiile obișnuite pentru triunghiul ABC, vom nota cu A' și D' vîrfurile pătratului $AD'B'C'$ situate pe BC, vîrfurile B' și C' fiind respectiv pe CA și AB.

Ca dreptunghiul să fie înscris în triunghiul ABC, este necesar, în baza lemei 1, ca laturile lui ABC să fie exterioare dreptunghiului cu excepția punctelor B' și C', precum și a porțiunii $A'D' \subset BC$, care este comună cu latura $A'D'$ a dreptunghiului. În consecință, B și C trebuie să fie exterioare dreptunghiului, triunghiurile $C'BA'$ și $B'CD'$ dreptunghice în A' și D', trebuind

(*) Cf. *N. Teodorescu*: Configurații geometrice simple în plan (I), G.M. Nr. 5—6, Anul 1988.

Scanned with OKEN Scanner

să aibă vîrfurile pe prelungirile laturii $A'D'$, astfel încît unghiurile $\widehat{C'BA'}$ și $\widehat{B'CD'}$ trebuie să fie ascuțite sau cel mult unul dintre ele drept. Dacă ambele ar fi drepte, triunghiul ar fi degenerat. Astfel și condiția 2) este necesară.

2) Cele două condiții sînt suficiente. Într-adevăr fie $A'_0D'_0B'_0C'_0$, dreptunghiul cu care $A'D'B'C'$ trebuie să fie asemenea. Ne putem aranja oricînd astfel că $A'_0D'_0 < BC$ și $A'_0C'_0 < AA_2$, unde A_2 este piciorul înălțimii dusă din A în triunghiul ABC.

Luînd intersecția unei paralele la BC, dusă la o distanță $d = A'_0C'_0$ cu latura AB, fixăm punctul C'_0 și apoi proiecția sa A'_0 pe BC, iar în continuare D'_0 pe BC astfel ca $A'_0D'_0$ să fie congruentă cu latura analoagă a dreptunghiului dat. Completînd figura, obținem punctul B'_0 care poate fi interior, exterior triunghiului sau chiar pe $A'C'$, caz în care construcția este terminată. În caz contrar, ducînd prin B'_0 o paralelă la CA, obținem pe BC un punct C_0 și pe AB un punct A_0, astfel încît triunghiurile ABC și A_0BC_0 sînt omotetice, centrul de omotetie fiind B. Aplicînd omotetia astfel stabilită, ducînd semidreapta BB'_0, obținem prin intersecția cu BC un punct B unic, cu ajutorul căruia putem construi dreptunghiul $AD'B'C'$ omotetic cu $A'_0D'_0B'_0C'_0$ și care este înscris în triunghiul ABC, avînd vîrfurile A' și D' pe BC, B' și C' respectiv pe CA și AB. Condițiile 1) și 2) sînt deci și suficiente.

În ceea ce privește numărul de soluții, avem următoarea teoremă:

Teorema 2. *Triunghiul ABC și dreptunghiul-test, cu care trebuie să fie asemenea dreptunghiul înscris fiind date, iar condițiile necesare și suficiente din teorema 1, satisfăcute, sînt valabile următoarele proprietăți:*

1) *Dacă latura dreptunghiului-test, care trebuie să fie așezată pe o latură a triunghiului este fixată, există un singur dreptunghi asemenea cu dreptunghiul-test, înscriptibil în triunghiul dat, corespunzător laturii triunghiului considerată;*

2) *Dacă dreptunghiul înscriptibil poate fi așezat cu oricare din laturile sale pe latura triunghiului, există două soluții corespunzătoare laturii triunghiului considerată;*

3) *Dacă triunghiul ABC este ascuțitunghic, există în total 6 dreptunghiuri asemenea dreptunghiului-test, înscriptibile în triunghi;*

4) *Dacă triunghiul ABC este dreptunghic, numărul de dreptunghiuri astfel înscriptibile se reduce la patru, iar dacă este obtuzunghic, la două;*

5) *Dacă triunghiul ABC are o axă de simetrie, dreptunghiurile corespunzătoare laturilor triunghiului simetrice în raport cu această axă, sînt simetrice în raport cu axa.*

Demonstrație: 1) Latura dreptunghiului-test fiind fixată, construcția dreptunghiului asemenea acestuia decurge printr-o omotetie care determină în mod unic vîrful dreptunghiului înscris pe latura opusă vîrfului care este centru de omotetie. Cum orice dreptunghi-test am alege, omotetia este unic determinată prin faptul că toate aceste dreptunghiuri sînt omotetice între ele, iar raza pe care se găsește vîrful căutat este unică și intersectează latura opusă centrului de omotetie, dreptunghiul astfel determinat este unic.

2) Există numai două moduri în care dreptunghiul-test poate fi așezat pe latura triunghiului considerată ca latura mare sau adiacentă cu cea mică. În baza punctului 1) fiecăreia dintre aceste așezări îi corespunde o soluție și numai una, deci fiecărei laturi, care îndeplinește condiția de a avea ca unghiuri alăturate două unghiuri ascuțite sau unul ascuțit și altul drept, îi corespund două soluții.

3) Triunghiurile ascuțitunghice îndeplinesc prin fiecare din cele trei laturi condițiile de existență a dreptunghiurilor asemenea cu un dreptunghi dat, înscriptibile în ele, deci în baza punctului 2), vom avea 6 dreptunghiuri înscriptibile în triunghi.

4) În cazul cînd triunghiul ABC este dreptunghic, de exemplu, în vîrful C, dreptunghiurile $A'D'B'C'$ avînd latura $A'D'$ pe BC, vor avea vîrful D' coincizînd cu C și deci $B'D'$ coincizînd cu $B'C$.

În acest caz soluția corespunzătoare laturii $B'D'$, așezată pe AC va coincide cu dreptunghiul $A'D'B'C'$, deci ambele soluții corespunzătoare laturilor BC și AC vor fi aceleași, ceea ce reduce numărul dreptunghiurilor înscriptibile în triunghiurile dreptunghice la 4.

În cazul triunghiurilor obtuzunghice, singura latură pe care pot fi așezate laturile dreptunghiului-test este cea care se opune unghiului obtuz, deci vor exista numai două dreptunghiuri înscriptibile.

5) Dacă triunghiul ABC are o axă de simetrie, el va fi isoscel. În acest caz dacă luăm simetricele vîrfurilor dreptunghiurilor înscrise pe una din cele două laturi congruente, în raport cu axa de simetrie, vom obține două dreptunghiuri simetrice cu acestea și avînd vîrfurile pe laturile lui ABC. În baza unicității dreptunghiurilor înscrise, cu laturi pe laturile triunghiului, acestea vor fi soluțiile relative la latura simetrică primei laturi considerate.

În cazul triunghiurilor echilaterale vor exista 6 soluții, două simetrice, în raport cu cele 3 axe de simetrie.

Scanned with OKEN Scanner

§.3. Teoreme de evaluare și comparare

Se pot evalua lungimile laturilor dreptunghiurilor asemenea cu un dreptunghi dat, înscriptibile într-un triunghi oarecare ABC, respectînd condițiile necesare și suficiente din teorema 1. Situîndu-ne în cazurile cînd acestea sînt satisfăcute pe fiecare latură, are loc următoarea *teoremă de evaluare*:

Teorema 3. *Într-un triunghi ascuțitunghic sau dreptunghic ABC, dacă notăm cu l_a, l_b, l_c lungimile laturilor dreptunghiurilor înscrise în triunghi și așezate cu latura mică respectiv pe laturile a, b, c și prin l'_a, l'_b, l'_c lungimile laturilor dreptunghiurilor înscrise și așezate cu latura mare de lungime kl_a, kl_b, kl_c, respectiv pe a, b, c, avem următoarele evaluări, presupunînd $k \geqslant 1$:*

1) $$l_a = \frac{a}{1 + k(\operatorname{ctg} B + \operatorname{ctg} C)}; \quad l_b = \frac{b}{1 + k(\operatorname{ctg} C + \operatorname{ctg} A)};$$

$$l_c = \frac{c}{1 + k(\operatorname{ctg} A + \operatorname{ctg} B)}.$$

2) $$l'_a = \frac{a}{k + \operatorname{ctg} B + \operatorname{ctg} C}; \quad l'_b = \frac{b}{k + \operatorname{ctg} C + \operatorname{ctg} A};$$

$$l'_c = \frac{c}{k + \operatorname{ctg} A + \operatorname{ctg} B}.$$

3) *Relațiile 1) și 2) se completează cu $l_a = l'_b$; $l'_a \geqslant l_b$ în cazul triunghiurilor dreptunghice în C.*

Demonstrație: 1) Notînd prin $A'D'B'C'$ dreptunghiul înscris în triunghiul ABC, avînd vîrfurile A' și D' pe BC, B' și C' pe CA, respectiv AB, teorema 1 asigură existența iar teorema 2 unicitatea dreptunghiului $A'D'B'C'$ pentru orice $k > 0$, în ipoteza că $A'D' = B'C' = l_a$, $A'C' = D'B' = kl_a$. Așezînd pe BC o latură a dreptunghiului de lungime kl_a, obținem în baza teoremei 2 o a doua soluție. Dacă presupunem $k \geqslant 1$, această latură va fi cea mare, iar pentru $k < 1$ cea mică, iar soluțiile luate împreună vor fi aceleași în ambele cazuri. Prin urmare, vom putea presupune de la început $k \geqslant 1$, în această teoremă de evaluare.

Unghiurile $\hat{B}$ și $\hat{C}$ fiind ascuțite, vom avea

$$BA' = A'C' \operatorname{ctg} B = kl_a \operatorname{ctg} B; \quad D'C = D'B' \operatorname{ctg} C = kl_a \operatorname{ctg} C;$$

$$BC = a = B'A' + A'D' + D'C = kl_a \operatorname{ctg} B + l_a + kl_a \operatorname{ctg} C,$$

de unde

$$l_a = \frac{a}{1 + k(\operatorname{ctg} B + \operatorname{ctg} C)}.$$

Prin permutări circulare, mutînd dreptunghiul-test pe laturile CA și AB, cu aceeași așezare a laturii mici, obținem și expresiile lungimilor laturilor l_b și l_c din 1).

2) Permutînd latura dreptunghiului care este așezată pe BC cu cea perpendiculară pe aceasta, înseamnă să permutăm l_a cu kl_a în formula care dă expresia lui BC. Vom nota noile lungimi ale laturilor, corespunzînd aceluiași raport $k \geqslant 1$ prin l'_a, kl'_a etc. și vom avea

$$BC = a = B'A' + A'D' + D'C = l'_a \operatorname{ctg} B + kl'_a + l'_a \operatorname{ctg} C,$$

de unde

$$l'_a = \frac{a}{k + \operatorname{ctg} B + \operatorname{ctg} C}.$$

Prin permutări circulare, mutînd dreptunghiul pe celelalte două laturi obținem și celelalte expresii l'_b și l'_c.

Scanned with OKEN Scanner

3) Dacă triunghiul ABC este dreptunghic în C, formulele se reduc astfel:

1) $$l_a = \frac{a}{1 + k \operatorname{tg} A}; \quad l_b = \frac{b}{1 + k \operatorname{cotg} A}; \quad l_c = \frac{c}{1 + k(\operatorname{tg} A + \operatorname{cotg} A)}$$

deoarece $B = \frac{\pi}{2} - A$, $C = \frac{\pi}{2}$.

2') $$l'_a = \frac{a}{k + \operatorname{tg} A}, \quad l'_b = \frac{b}{k + \operatorname{cotg} A}, \quad l'_b = \frac{c}{k + \operatorname{tg} A + \operatorname{cotg} A}$$

și vom avea

3') $$l_a = l'_b; \quad l'_a = l_b.$$

Într-adevăr, putem scrie:

$$l_b = \frac{b}{1 + k \operatorname{cotg} A} = \frac{b \operatorname{tg} A}{\operatorname{tg} A + k} = \frac{b \sin A}{(k + \operatorname{tg} A) \cos A} = \frac{a \sin B}{(k + \operatorname{tg} A) \cos A} = \frac{a}{k + \operatorname{tg} A} = l'_a,$$

unde am aplicat teorema sinusurilor $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$ și am ținut seama că $\operatorname{tg} A \neq 0$.

În mod analog se obține și relația $l_a = l'_b$.

Relațiile 3') confirmă și precizează punctul 4) al teoremei 2, privind numărul de dreptunghiuri înscriptibile într-un triunghi dreptunghic.

Evaluarea lungimilor laturilor dreptunghiurilor înscriptibile într-un triunghi ABC, în condițiile teoremei 3, ne permite ordonarea acestor lungimi în raport cu ordonarea lungimilor laturilor triunghiului pe care sînt așezate, prin următoarea *teoremă de comparare*:

Teorema 4. *Fiind dat triunghiul ascuțitunghic sau dreptunghic ABC în care $a \geq b \geq c$, avem următoarele ordonări ale lungimilor laturilor dreptunghiurilor asemenea cu un dreptunghi-test dat, înscriptibile în triunghiul considerat:*

I. *Cazul laturilor mici l_a, l_b, l_c așezate respectiv pe a, b, c, în ipoteza $k > 1$:*

$$l_a \leq l_b \leq l_c, \text{ dacă } a \geq b \geq c,$$

semnele de egalitate corespunzînd-se în fiecare dintre inegalitățile privitoare la laturile dreptunghiurilor și triunghiului.

II. *Cazul laturilor mari kl'_a, kl'_b, kl'_c așezate respectiv pe a, b, c în aceeași ipoteză $k > 1$ și inegalităților stricte:*

$$\sin A < \frac{1}{k} \Rightarrow \sin B < \frac{1}{k}, \quad \sin C < \frac{1}{k}; \quad \text{dacă } a > b > c \Rightarrow l'_b < l'_b < l'_a;$$

$$\sin A > \frac{1}{k}, \quad \sin B > \frac{1}{k}, \quad \sin C > \frac{1}{k}; \quad \text{dacă } a > b > c \Rightarrow l'_c > l'_b > l'_a;$$

$$\sin A > \frac{1}{k}, \quad \sin B > \frac{1}{k}, \quad \sin C < \frac{1}{k}; \quad \text{dacă } a > b > c \Rightarrow l'_c < l'_a < l'_b;$$

$$\sin A > \frac{1}{k}, \quad \sin B < \frac{1}{k}, \quad \sin C < \frac{1}{k}; \quad \text{dacă } a > b > c \Rightarrow l'_a < l'_a < l'_b.$$

III. *Cazul laturilor mari kl'_a, kl'_b, kl'_c, așezate respectiv pe a, b, c, în ipoteza $k > 1$, $a \geq b \geq c$ și inegalitățile nestricte pentru* $\sin A \geq \frac{1}{k}$, $\sin B \leq \frac{1}{k}$, $\sin C \leq \frac{1}{k}$:

$$\sin A > \frac{1}{k}, \quad \sin B > \frac{1}{k}, \quad \sin C = \frac{1}{k} \Rightarrow a > b > c \text{ și } l'_a < l'_a = l'_b;$$

Scanned with OKEN Scanner

$$\sin A > \frac{1}{k},\ \sin B = \frac{1}{k},\ \sin C < \frac{1}{k} \Rightarrow a > b > c \text{ și } l'_a = l'_c < l'_b;$$

$$\sin A > \frac{1}{k},\ \sin B = \frac{1}{k},\ \sin C = \frac{1}{k} \Rightarrow a > b = c \text{ și } l'_a = l'_b = l'_c;$$

$$\sin A = \frac{1}{k},\ \sin B < \frac{1}{k},\ \sin C < \frac{1}{k} \Rightarrow a > b > c \text{ și } l'_a < l'_b = l'_c;$$

$$\sin A = \frac{1}{k},\ \sin B = \frac{1}{k},\ \sin C < \frac{1}{k} \Rightarrow a = b > c \text{ și } l'_a = l'_b = l'_c;$$

$$\sin A = \frac{1}{k},\ \sin B = \frac{1}{k},\ \sin C = \frac{1}{k} \Rightarrow a = b = c \text{ și } l'_a = l'_b = l'_c;$$

IV. *Cazul $k = 1$, în care dreptunghiul-test devine pătrat cu laturile așezate respectiv pe a, b, c:*

$$\sin A < 1 \Rightarrow \sin B < 1,\ \sin C < 1;\ \text{dacă } a \geqslant b \geqslant c \Rightarrow l_a \leqslant l_b \leqslant l_c,$$

triunghiul fiind ascuțitunghic, semnele de egalitate corespunzîndu-se;

$$\sin A = 1,\ \sin B < 1,\ \sin C < 1 \Rightarrow a > b \geqslant c \text{ și } l_a < l_b = l_c,$$

triunghiul fiind dreptunghic în A.

Demonstrație: I. Pentru a compara laturile l_a, l_b și l_c, vom considera în baza formulelor 1) din teorema 3 raportul:

$$\frac{l_a}{l_b} = \frac{a}{b} \cdot \frac{1 + k\operatorname{cotg} C + k\operatorname{cotg} A}{1 + k\operatorname{cotg} B + k\operatorname{cotg} C} = \frac{k\sin B + \sin C \sin A}{k\sin A + \sin B \sin C},$$

unde am ținut seama că triunghiul este ascuțitunghic și am aplicat convenabil teorema sinusului în triunghiul ABC.

Impunînd condiția $\frac{l_a}{l_b} \leqslant 1$ sau $\frac{l_a}{l_b} \geqslant 1$ sîntem conduși la inegalitatea

$$(\sin C - k)(\sin A - \sin B) \leqslant 0, \text{ în primul caz,}$$

(4)

$$(\sin C - k)(\sin A - \sin B) \geqslant 0, \text{ în cel de-al doilea.}$$

Întrucît $k > 1$ și $\hat{A} \geqslant \hat{B}$, cea de-a doua inegalitate nu este posibilă și din prima deducem: $l_a \leqslant l_b$ pentru $\hat{A} \geqslant \hat{B}$ sau $a \geqslant b$, semnele de inegalitate și egalitate corespunzîndu-se în ambele inegalități.
Prin permutări circulare în inegalitățile 4) și ținînd seama de condiția $a \geqslant b \geqslant c$, obținem inegalitățile I.

II. Pentru a compara laturile l'_a, l'_b, l'_c vom considera raportul $\frac{l'_b}{l'_c}$ în baza formulelor 2) din teorema 3 și analoagele $\frac{l'_b}{l'_a}$, $\frac{l'_c}{l'_a}$.

Vom avea:

$$\frac{l'_b}{l'_c} = \frac{b}{c} \cdot \frac{k + \operatorname{cotg} A + \operatorname{cotg} B}{k + \operatorname{cotg} C + \operatorname{cotg} A} = \frac{k\sin A \sin B + \sin C}{k\sin C \sin A + \sin B},$$

Scanned with OKEN Scanner

prin aplicarea teoremei sinusului în triunghiul ascuțitunghic ABC. Din condițiile de comparare $\frac{l_b'}{l_c'} \leqslant 1$ sau $\frac{l_b'}{l_c'} \geqslant 1$ deducem

$$\begin{matrix} (k \sin A - 1)(\sin B - \sin C) \leqslant 0, \text{ în primul caz,} \\ (k \sin A - 1)(\sin B - \sin C) \geqslant 0, \text{ în cel de-al doilea,} \end{matrix} \tag{5}$$

precum și analoagele, prin permutări circulare. Cum $k > 1$, ambele inegalități sînt posibile în ipoteza $a \geqslant b \geqslant c$. Putem avea pe rînd:

$$k \sin A - 1 < 0,\ k \sin A - 1 = 0,\ k \sin A - 1 > 0, \tag{5'}$$

toate cele trei cazuri trebuind considerate în inegalitățile (5). Avem

$$k \sin A - 1 < 0 \Rightarrow \sin A < \frac{1}{k} \Rightarrow \sin B < \frac{1}{k} \Rightarrow \sin C < \frac{1}{k}.$$

Dacă $a > b > c$, revenind la inegalitățile (5), vom avea $\sin B - \sin C > 0$ și va fi valabilă prima inegalitate strictă (5); cea de-a doua fiind contrarie, nu este posibilă.
Vom deduce deci $l_b' < l_c'$ și prin permutări circulare asupra inegalităților (5), $l_a' < l_b' < l_c'$, deci primul șir de inegalități II.
Considerînd în continuare $k \sin A - 1 > 0$ în inegalitățile (5') cum $\sin B - \sin C > 0$, are loc a doua inegalitate strictă (5), din care vom deduce $l_b' > l_c'$.

În ipoteza $\sin A > \frac{1}{k}$, $\sin B > \frac{1}{k}$, $\sin C > \frac{1}{k}$ și $a > b > c$, prin permutări circulare obținem $l_c' < l_a' < l_b'$, avînd în vedere că $\sin C - \sin A < 0$ și deci are loc prima inegalitate strictă (5). Astfel am obținut și cel de al doilea șir de inegalități II. Raționamentele pentru următoarele două șiruri fiind analoage, lăsăm verificarea în seama cititorului, cu folosirea inegalităților (5) și a analoagelor acestora.

III. Admițînd pentru $\sin A$, $\sin B$, $\sin C$ inegalități nestricte, acestea vor implica ordonări atît pentru laturile dreptunghiului cît și pentru cele ale triunghiului, astfel încît vom avea în vedere și cazurile triunghiurilor isoscele sau echilaterale. În ipoteza $\sin A \geqslant \frac{1}{k}$, $\sin B \geqslant \frac{1}{k}$, $\sin C = \frac{1}{k}$, deducem din inegalitățile (5), $l_b' \geqslant l_c'$ și $l_c' < l_a'$, $a \geqslant c$ și $b \geqslant c$, iar

$$(k \sin C - 1)(\sin A - \sin B) = 0 \Rightarrow l_a' = l_b'$$

fără nici o restricție pentru $\sin A - \sin B$. Cum însă $a \geqslant b \geqslant c$, deducem $l_c' < l_a' = l_b'$, cu $a \geqslant b > c$.

Din $\sin A > \frac{1}{k}$, $\sin B = \frac{1}{k}$, $\sin C < \frac{1}{k}$ deducem folosind inegalitățile (5), $l_b' > l_c'$, $l_c' = l_a'$, $\hat{A} > \hat{B}$, deci $a > b$ și $l_a' < l_b'$, $b > c$, prin urmare $a > b > c$ și $l_a' = l_c' < l_b'$.

Din $\sin A > \frac{1}{k}$, $\sin B = \frac{1}{k}$, $\sin C = \frac{1}{k}$, deducem, cu folosirea inegalităților (5): $l_b' = l_c'$ fiindcă $\hat{B} = \hat{C}$, $l_c' = l_a'$ și $l_a' = l_b'$ și $\hat{A} > \hat{B} = \hat{C}$, deci $a > b = c$ și $l_a' = l_b' = l_c'$.

Raționamente analoage conduc la stabilirea următoarelor trei șiruri de inegalități.

IV. Presupunînd $k = 1$ în inegalitățile (4) și $a \geqslant b \geqslant c$, dacă $\sin A < 1$, ceea ce implică $\sin B < 1$, $\sin C < 1$, deducem ca la punctul I inegalitatea $l_a \leqslant l_b \leqslant l_c$.
Dacă $\sin A = 1$, $\sin B < 1$, $\sin C < 1$, vom avea $a > b \geqslant c$ și prin aplicarea acelorași inegalități, $l_a < l_b = l_c$, triunghiul fiind dreptunghic.

Comentarii: Cazul pătratului înscriptibil într-un triunghi a fost tratat în Problema 1 și Problema 2 din partea I a acestui articol * și reluat în rezumat la punctul IV al teoremei 4.

---

* *N. Teodorescu:* Configurații geometrice simple (I), G.M. nr. 5–6/1988.

Scanned with OKEN Scanner

Din contextul teoremelor 3 și 4 reiese clar că înscrierea dreptunghiurilor asemenea cu dreptunghiuri-test într-un triunghi dat pune în evidență mai multe proprietăți decît cea a pătratului, atît în evaluarea cît și în compararea laturilor cu cele ale triunghiului.

În orice caz, configurațiile formate din triunghiuri și dreptunghiuri înscrise în acestea au proprietăți simple și sugestive, care pot fi adîncite și extinse, ceea ce vom încerca în partea a III-a a acestui articol, făcînd legătura cu geometria triunghiului.

CONCURSUL DE MATEMATICĂ, ETAPA FINALĂ (PE ȚARĂ) CLUJ-NAPOCA, 12 APRILIE 1988

Clasa a IX-a

1. Se consideră un triunghi echilateral ABC de latură 1 și punctele $A_1 \in (BC)$, $B_1 \in (AC)$, $C_1 \in (AB)$. Să se arate că:

$$A_1B_1^2 + B_1C_1^2 + C_1A_1^2 \geqslant \frac{3}{4}.$$

* * *

2. Fie un triunghi ABC și punctele $M \in (AB)$, $N \in (AC)$ astfel încît lungimile tangentelor duse din B și C la cercul circumscris triunghiului AMN să fie egale. Să se arate că mijloacele segmentelor $[AB]$, $[AC]$, $[BN]$, $[CM]$, sînt puncte conciclice.

L. Panaitopol

3. Fie m și n numere naturale, $n \geqslant 1$. Să se determine numerele reale x pentru care:

$$[x+1] + \left[x + \frac{1}{2}\right] + \left[x + \frac{1}{3}\right] + \ldots + \left[x + \frac{1}{n}\right] = m.$$

M. Becheanu

4. a) Să se arate că nu există funcții $f : \mathbf{Z} \to \mathbf{Z}$ astfel încît

$$(f \circ f)(x) = x + 1, \qquad (\forall)\, x \in \mathbf{Z}.$$

b) Să se arate că există o infinitate de funcții $g : \mathbf{Z} \to \mathbf{Z}$ astfel încît

$$(g \circ g)(x) = -x, \qquad (\forall)\, x \in \mathbf{Z}.$$

C. Năstăsescu, S. Dăscălescu

Clasa a X-a

1. Să se demonstreze că dacă a și b sînt două numere complexe astfel încît $tb + (1-t)a \neq 0$ pentru orice $t \in [0, 1]$ și $\operatorname{Re}\frac{a}{b} \geqslant 0$, atunci $\operatorname{Re}\frac{ab}{(tb + (1-t)a)^2} \geqslant 0$, oricare ar fi $t \in (0,1)$.

(Cu $\operatorname{Re} z$ s-a notat partea reală a numărului complex z).

Gh. Mocanu

Scanned with OKEN Scanner

2. Să se arate că un șir neconstant de numere naturale nenule $(x_n)_{n>0}$ este o progresie aritmetică dacă și numai dacă există $a > 0$ astfel încît $x_{n+1} = x_n + \left[\frac{x_n}{n+a}\right]$.
(Cu $[x]$ s-a notat partea întreagă a numărului real x).

L. Panaitopol

3. Pentru $n \in \mathbf{N}^*$ se consideră numerele $C_{2^n}^k$, $k = 1, 2, \ldots, 2^n - 1$. Să se arate că:
a) Toate aceste numere sînt pare;
b) Unul singur dintre numerele considerate nu este multiplu de 4.

I. Tomescu

4. Fie o piramidă regulată de vîrf V și bază $[ABCD]$. Se consideră punctele $A' \in (VA)$, $B' \in (VB)$, $C' \in (VC)$, $D' \in (VD)$ și se notează cu M și N mijloacele segmentelor $(A'C')$, respectiv $(B'D')$. Să se arate că punctele V, A', B', C', D' se află pe o sferă dacă și numai dacă dreapta MN este paralelă cu planul bazei.

L. Panaitopol

Clasa a XI-a

1. Fie $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbf{R})$ cu $a + d > 2$. Să se arate că oricare ar fi $n \in \mathbf{N}^*$, $A^n \neq I_2$.

L. Panaitopol, I. Tomescu

2. Fie un triunghi ABC și un punct M în planul său. Notăm cu $s(M)$ suma pătratelor distanțelor punctului M la laturile triunghiului și cu $S(M)$ suma pătratelor distanțelor punctului M la vîrfurile triunghiului. Să se demonstreze că următoarele afirmații sînt echivalente:
a) $4\,s(M) \geqslant S(M)$, pentru orice punct M din plan;
b) Triunghiul ABC este echilateral.

L. Panaitopol

3. Fie șirul $(a_n)_{n\geqslant 2}$ definit prin $a_n = \max_{k\in\{1,2,\ldots,n\}} (k-1)^{n-k}$.

a) Să se arate că ecuația $x + (x-1)\ln(x-1) = n$ (unde $n \in \mathbf{N}$, $n \geqslant 2$) admite o unică soluție x_n și $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n}{\frac{n}{\ln n}} = 1$;

b) Să se arate că $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{a_n}}{\frac{n}{\ln n}} = \frac{1}{e}$.

I. Tomescu

4. Se consideră șirurile $(x_n)_{n\geqslant 1}$ și $(y_n)_{n\geqslant 1}$ cu proprietatea $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} y_n = 1$. Notînd $z_n = \frac{x_1y_n + x_2y_{n-1} + \ldots + x_ny_1}{n}$, pentru orice $n \geqslant 1$, să se demonstreze că $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = 1$.

* * *

Scanned with OKEN Scanner

Clasa a XII-a

1. Fie $n \geq 2$ un număr natural. Să se calculeze partea întreagă a numărului:

$$\sum_{k=1}^{2^n} k^{\frac{1}{n}-1}.$$

* * *

2. Fie $f : [0, 1] \to \mathbf{R}$ o funcție continuă cu proprietatea $\int_0^1 f(t)\,dt = 0$.

Să se arate că există $x_0 \in [0, 1]$, astfel încît:

$$\int_0^{x_0} f(t)\,dt = (f(x_0))^2.$$

Jenică Cringanu

3. Fie G un grup finit de ordin n și $f : G \to G$ un morfism cu proprietățile $f \circ f = 1_G$ și $f(x) = x \Rightarrow x = e$. Să se arate că:

a) $\{f(x)x^{-1} \mid x \in G\} = G$;

b) G este abelian;

c) n este impar.

* * *

4. Să se demonstreze că dacă polinomul $P \in \mathbf{R}[X]$, de grad n, are n rădăcini reale, atunci oricare ar fi $a \in \mathbf{R}$, polinomul $Q_a(X) = P(X + ia) + P(X - ia)$ are, de asemenea, n rădăcini reale.

* * *

BARAJUL DIN 15 APRILIE 1988, CLUJ-NAPOCA, ÎN VEDEREA ALCĂTUIRII ECHIPEI ROMÂNIEI CARE A PARTICIPAT LA CEA DE-A CINCEA OLIMPIADĂ BALCANICĂ DE MATEMATICĂ DIN CIPRU

1. Se consideră o sferă și un plan α. Pentru orice punct variabil $M \in \alpha$, exterior sferei, se consideră conul cu vîrful în M tangent sferei. Se cere locul geometric al centrului cercului de tangență al sferei cu conul.

Octavian Stănășilă

2. Fie $Oxyz$ un triedru, $m(\widehat{yOz}) = \alpha$, $m(\widehat{zOx}) = \beta$ și $m(\widehat{xOy}) = \gamma$, $\alpha + \beta + \gamma = \pi$. Să se arate că dacă P este un punct interior triedrului și P_1, P_2, P_3 sînt proiecțiile lui P pe fețele triedrului, atunci $OP \geq PP_1 + PP_2 + PP_3$.

C. Cocea

Scanned with OKEN Scanner

3. Fie $n \geq 3$ un număr natural. Se consideră toate poligoanele regulate convexe sau stelate, cu n laturi, înscrise într-un cerc dat de centru O. Spunem că două astfel de poligoane aparţin aceleiaşi clase dacă se obţin unul din celălalt printr-o rotaţie în jurul lui O. Cîte astfel de clase de poligoane există?

Mircea Becheanu

4. Să se arate că oricare ar fi numerele naturale $0 < a_1 < a_2 < \ldots < a_n$ are loc inegalitatea

$$(a_1 + a_2 + \ldots + a_n)^2 \leq a_1^3 + a_2^3 + \ldots + a_n^3.$$

Viorel Vâjâitu

5. Se consideră o tablă de şah cu 11 linii şi 11 coloane, ale cărei pătrăţele se colorează cu cîte o culoare dintr-o mulţime fixată de trei culori. Să se demonstreze că există un dreptunghi de dimensiuni m şi n, $(2 \leq m \leq 11, 2 \leq n \leq 11)$ reuniune de pătrăţele ale tablei pentru care cele patru pătrăţele situate în colţurile dreptunghiului au aceeaşi culoare.

Ioan Tomescu

PREMIANŢII CONCURSULUI DE MATEMATICĂ, ETAPA PE ŢARĂ, CLUJ-NAPOCA, APRILIE 1988

Clasa a IX-a

Premiul I al M.E.I. şi U.T.C.
Moroianu Sergiu — Lic. matem.fizică nr. 1 Bucureşti
Premiul II al M.E.I. şi U.T.C.
Ionescu Alexandru — Lic. matem.fizică nr. 1 Bucureşti
Premiul III al M.E.I. şi U.T.C.
Roman Cosmin — Lic. „Gh. Şincai" Baia Mare
Premiile S.S.M. şi menţiuni ale M.E.I.
Popescu-Pampu Patrik — Lic. matem.fizică nr. 1 Bucureşti
Teodorescu Adrian — Lic. „N. Bălcescu" Craiova
Menţiuni ale M.E.I.
Fucrea Laura — Lic. „M. Viteazul" Ploieşti
Ştefănică Dan — Lic. ind. nr. 36 Bucureşti
Crainic Marius
Stănescu Felicia
Trăistaru Daniel — Lic. „N. Bălcescu" Craiova

Clasa a X-a

Premiul I al M.E.I. şi U.T.C.
Iftimie Dragoş — Lic. ind. nr. 32 Bucureşti
Premiul II al M.E.I. şi U.T.C.

Scanned with OKEN Scanner

Belgin Florin — Lic. „N. Bălcescu" București
Premiul II al M.E.I. și premiul III al U.T.C.
Dobra Adrian — Lic. „Vlaicu-vodă" Curtea de Argeș
Premiul III al M.E.I. și premiile S.S.M.
Halmaghi Octavian — Lic. „Gh. Lazăr" Sibiu
Pascovici Dana — Lic. „N. Bălcescu" București
Mențiune a M.E.I.
Cașcaval Radu — Lic. „Național" Iași

Clasa a XI-a

Premiul I al M.E.I. și U.T.C.
Rădulescu-Banu Andrei — Lic. „M. Viteazul" București
Premiul II al M.E.I. și U.T.C.
Bădulescu Alexandru — Lic. „N. Bălcescu" București
Premiul III al M.E.I. și U.T.C.
Barbu Adrian — Lic. „Gh. Șincai" Baia Mare
Premiul III al M.E.I. și premiul S.S.M.
Beltiță Daniel — Lic. „Traian" Drobeta-Tr. Severin
Premiul S.S.M. și mențiune a M.E.I.
Ionescu Mihai — Lic. matem.fizică nr.1 București
Mențiuni ale M.E.I.
Șlicaru Sebastian — Lic. „N. Bălcescu" București
Păun Mihai — Lic. matem.fizică Zalău
Radu Adrian — Lic. „Mircea cel Bătrîn" Constanța
Moroianu Andrei — Lic. matem.fizică București

Clasa a XII-a

Premiul II al M.E.I. și U.T.C.
Istrate Gabriel — Lic. „V. Alecsandri" Galați
Premiul III al M.E.I. și U.T.C.
Fărcășanu Octavian — Lic. „N. Bălcescu" Craiova
Premiul III al M.E.I. și premiul S.S.M.
Catrina Florin — Lic. ind. nr. 4 Brăila
Premiul S.S.M. și mențiune a M.E.I.
Vasiu Adrian — Lic. matem.fizică nr. 2 Cluj-Napoca
Mențiuni ale M.E.I.
Constantin Adrian — Lic. „N. Lenau" Timișoara
Deaconu Daniel Liviu — Lic. ind. nr. 3 Rm. Vîlcea
Mihăilă Emil — Lic. „B. P. Hașdeu" Buzău

PROBLEME REZOLVATE PENTRU GIMNAZIU

Clasa a V-a

Problema E : 9179* (G. M. 7—8/1987, pag. 276)
Să se afle cel mai mic număr de forma $\overline{23x35y}$ *divizibil cu* 18.

Cristina Stoicescu, elevă, Pitești

Scanned with OKEN Scanner

Soluție. Numărul din enunț trebuie să fie divizibil cu 2 și cu 9 simultan. Din condiția de divizibilitate cu 2 a numărului din enunț rezultă că $y \in \{0, 2, 4, 6, 8\}$.

Dacă $y = 0$ obținem numărul $\overline{23x350}$. Punînd condiția ca acest număr să se dividă cu 9 (adică suma cifrelor sale să fie un număr divizibil cu 9) rezultă că $x = 5$. Deci un număr de forma din enunț divizibil cu 18 este 235350.

În mod asemănător se obțin numerele:
233352, 231354, 238356, 236358.
Dintre acestea cel mai mic este 231354.

Soluție bună au dat: *Grădeanu Ioana*, cl. a V-a, Șc. gen. 19 Bacău; *Toma Mihai*, cl. a V-a, Șc. gen. 12 București.

Problema E : 9185* (G. M. 7—8/1987, pag. 277)

Să se arate că fracția:

$$F = \frac{11^n + 11^{n+1} + 11^{n+2} + 11^{n+3}}{7^n + 7^{n+1} + 7^{n+2} + 7^{n+3}}$$

se poate simplifica cu 8, dacă $n \in \mathbf{N}$.

Mădălina Pavel, elevă, Craiova

Soluție. Numărătorul fracției se scrie succesiv:

$$11^n + 11^{n+1} + 11^{n+2} + 11^{n+3} = 11^n(1 + 11 + 11^2 + 11^3) =$$

$$= 11^n(1 + 11 + 121 + 1331) = 11^n \cdot 1464 = 11^n \cdot 183 \cdot 8.$$

Deci numărătorul fracției se divide la 8.

Numitorul fracției se scrie succesiv:

$$7^n + 7^{n+1} + 7^{n+2} + 7^{n+3} = 7^n(1 + 7 + 7^2 + 7^3) = 7^n(8 + 49 \cdot 8) =$$

$$= 7^n \cdot 8 \cdot 50.$$

Deci numitorul fracției se divide la 8.

Rezultă că fracția se poate simplifica cu 8.

Soluție bună au dat: *Stan Claudia*, cl. a V-a, Șc. gen. 24 București; *Tița Floarea*, cl. aV-a, Șc. gen. 7 Caracal.

Clasa VI-a

Problema E : 9191* (G.M. 7—8/1987, pag. 278)

Se dă dreptunghiul ABCD. Perpendiculara în D pe BD taie prelungirea lui BA în F. Fie DE bisectoarea unghiului $\widehat{BDA}$, *unde* $E \in AB$. *Construim de aceeași parte a lui EF paralelele* $EG \| DF$ *și* $FG \| DE$ (*unde* $\{G\} = EG \cap FG$). *Să se arate că:*

a) *Triunghiul EDF este isoscel;*

b) *Dacă* $CD = 2FD - AF$, *atunci patrulaterul EDFG este romb.*

Romeo Cernat, profesor, Ciurea, Iași

Scanned with OKEN Scanner

Soluție. a) Fie $EG \cap BD = \{H\}$. Deoarece $EG \| FD$ și $FD \perp BD$ rezultă că $EH \perp BD$, deci triunghiul DEH este dreptunghic în H. Triunghiurile dreptunghice DAE și DHE sînt congruente (caz I.U.) de unde rezultă că $\widehat{DEH} \equiv \widehat{DEA}$. Dar $\widehat{DEH} = \widehat{FDE}$ (alterne interne formate de paralelele DF și EH, tăiate de secanta DE). Prin urmare $\widehat{FDE} \equiv \widehat{DEA}$, deci triunghiul FDE este isoscel cu $FD \equiv FE$.

b) Ținînd seama că $CD \equiv AB$ și $FD \equiv FE$, relația din enunț $CD = 2FD - AF$ devine succesiv :

$$AB = 2FE - AF = FE + FE - AF = FE + AE, \qquad (1).$$

Dar $AB = BE + AE$, (2). Din (1) și (2) deducem că $EB \equiv FE$, deci DE este mediană în triunghiul dreptunghic BDF ($\widehat{BDF} = 90^\circ$), prin urmare $DE \equiv FE \equiv EB$.

Din $DE \equiv FE$ și $FE \equiv FD$ obținem $DE \equiv FD$; dar $DEGF$ este paralelogram (din construcție), deci $DEGF$ este romb.

Problema E : 9195* (G. M. 7—8/1987, pag. 278)

Fie A mulțimea tuturor resturilor care se pot obține prin împărțirea unui pătrat perfect la 13 și $B = \{2, 5, 6, 7, 8, 11\}$. Să se arate că $A \cap B = \emptyset$.

Ioan Bran, inginer, Botoșani

Soluție : Din punct de vedere al împărțirii la 13 orice număr întreg este de forma $k = 13q + r$, unde $q \in Z$ și $0 \leqslant r < 13$.
Avem $k^2 = (13q + r)^2 = \mathcal{M}13 + r^2$, deci restul împărțirii lui k^2 la 13 va fi egal cu restul împărțirii lui r^2 la 13.
Din $r \in \{0, 1, 2, 3, \ldots, 10, 11, 12\}$ obținem $r^2 \in \{0, 1, 4, 9, \ldots, 100, 121, 144\}$. Mulțimea tuturor resturilor care se obțin prin împărțirea lui r^2 la 13 va fi $A = \{0, 1, 3, 4, 9, 10, 12\}$, prin urmare
$A \cap B = \{0, 1, 3, 4, 9, 10, 12\} \cap \{2, 5, 6, 7, 8, 11\} = \emptyset$.

Clasa a VII-a

Problema E: 9205* (G. M. 7—8/1987, pag. 279)

Să se rezolve în $\mathbf{N} \times \mathbf{N}$ ecuația : $x + y + a = xya + 2$, a fiind un parametru natural nenul.

Teodor Bănică, elev, București

Soluție : Deoarece $a \in \mathbf{N}^*$ putem înmulți ecuația cu a, apoi adunăm în ambii membri + 1 și obținem succesiv :

$$x + y + a = xya + 2 \Leftrightarrow ax + ay + a^2 = a^2xy + 2a \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a^2xy - ax - ay + 1 = a^2 - 2a + 1 \Leftrightarrow$$

Scanned with OKEN Scanner

$$\Leftrightarrow ax(ay-1)-(ay-1)=(a-1)^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (ax-1)(ay-1)=(a-1)^2, \qquad (1)$$

I. Presupunem că $x \geqslant y$ de unde $ax \geqslant ay$ și $ax-1 \geqslant ay-1$, (2). Dacă $y>1$ atunci $ay-1>0$, deci putem înmulți inegalitatea (2) cu $(ay-1)$. Obținem:

$$(ax-1)(ay-1) \geqslant (ay-1)^2, \qquad (3).$$

Din (1) și (3) avem:

$$(a-1)^2 \geqslant (ay-1)^2 \Rightarrow |a-1| \geqslant |ay-1|, \qquad (4).$$

Deoarece $a \in \mathbf{N}^*$ și $y \geq 1$ avem $a-1 \geqslant 0$ și $ay-1>0$ deci (4) se poate scrie $a-1 \geqslant ay-1$, de unde $a \geqslant ay$, adică $1 \geqslant y$, ceea ce contrazice ipoteza că $y>1$. Prin urmare $y \leqslant 1$; dar $y \in \mathbf{N}$, deci $y \in \{0, 1\}$.

Cazul 1: Pentru $a=1$ ecuația (1) devine:

$$(x-1)(y-1)=0.$$

i) Pentru $y=0$ rezultă $1-x=0$, de unde $x=1$, deci avem soluție perechea $(1, 0)$.

ii) Pentru $y=1$ rezultă $(x-1)\cdot 0=0$, de unde $x \in \mathbf{N}^*$, deci avem o infinitate de soluții de forma $(m, 1)$ cu $m \in \mathbf{N}^*$.

(Observăm că pentru $m=0$, perechea $(0,0)$ înlocuită în ecuația (1) ne conduce la $a=2$, ceea ce contrazice condiția pusă că $a=1$).

Cazul 2: Pentru $a \neq 1$ avem cazurile:

j) Pentru $y=0$ ecuația (1) devine:

$$(ax-1)(-1)=(a-1)^2 \Leftrightarrow -(ax-1)=(a-1)^2, \qquad (5).$$

Cum $(a-1)^2>0$ (pentru $a \neq 1$) din (5) rezultă că trebuie să avem $ax-1<0$ de unde $ax<1$. Cum a și x sînt numere naturale rezultă că $ax=0$; dar $a \neq 0$, deci obținem $x=0$, adică soluția $(0, 0)$. Dar perechea $(0, 0)$ nu este soluție decît pentru $a=2$.

jj) Pentru $y=1$ ecuația (1) devine:

$$(ax-1)(a-1)=(a-1)^2, \qquad (6).$$

Dar $a \neq 1$, deci $a-1 \neq 0$, deci din (6) obținem

$$ax-1=a-1 \Leftrightarrow ax=a \Leftrightarrow a(x-1)=0, \qquad (7).$$

Cum $a \neq 0$, rezultă $x-1=0$, de unde $x=1$. Deci în acest caz avem ca soluție perechea $(1,1)$ pentru orice $a \neq 1$.

II. Pentru $x \leqslant y$ ecuația se rezolvă în mod asemănător, fiind simetrică în x și y. Deci în acest caz vom obține soluțiile:

pentru $a=1$ soluții de forma $(1, n)$ cu $n \in \mathbf{N}^*$ și $(0, 1)$;

Scanned with OKEN Scanner

pentru $a = 2$ două soluții : (0, 0) și (1, 1);
pentru $a > 2$ o soluție : (1, 1).

În final, soluțiile ecuației sînt :

pentru $a = 1$, o infinitate de soluții, de forma : $(m, 1)$ și $(n. 1)$ cu $m, n \in N$;

pentru $a = 2$, două soluții : (0, 0) și (1, 1);

pentru $a > 2$, o soluție : (1, 1).

Soluție bună au dat :

Problema E : 9207* (G. M. 7—8/1987, pag. 280)

Să se arate că raza r a cercului înscris în triunghiul ascuțitunghic de laturi a, b, c satisface inegalitatea :

$$3r < \frac{a^2 + b^2 + c^2}{a + b + c}.$$

Mariana Mirică, profesoară, Costești, Argeș

Soluție : Notăm cu S aria triunghiului și cu p semiperimetrul său. Ținînd seama de formulele :

$$r = \frac{S}{p}\ ;\ p = \frac{a + b + c}{2}\ ;\ S = \frac{ab \sin C}{2} = \frac{ac \sin B}{2} = \frac{bc \sin A}{2},$$

obținem :

$$r = \frac{S}{p} = \frac{3S}{3p} = \frac{\frac{ab \sin C}{2} + \frac{ac \sin B}{2} + \frac{bc \sin A}{2}}{3 \cdot \frac{a + b + c}{2}} =$$

$$= \frac{ab \sin C + ac \sin B + bc \sin A}{3(a + b + c)}.$$

Dar $0 < \sin A < 1$, $0 < \sin B < 1$, $0 < \sin C < 1$. Rezultă

$$r < \frac{ab + ac + bc}{3(a + b + c)}.$$

Folosind inegalitatea $ab + ac + bc < a^2 + b^2 + c^2$, obținem inegalitatea din enunț.

Problema E : 9212* (G. M. 7—8/1987, pag. 280)

În trapezul $ABCD$ ($AB \parallel CD$, $AB > CD$), $AC \perp BD$, $AC = MN = a$, unde MN este linia mijlocie a trapezului. Să se calculeze în funcție de a lungimea diagonalei BD și aria trapezului.

Nistor Budescu, profesor, Dalboșeț, Caraș-Severin

Scanned with OKEN Scanner

Soluție. Fie $AC \cap BD = \{O\}$ și să notăm $CD = 2x$, $AB = 2y$. Deoarece MN este linie mijlocie, avem $MN = \frac{AB + CD}{2} = x + y$, deci $AC = x + y = a$.

Prelungim CD cu segmentul $DE \equiv AB$. Rezultă că $ABDE$ este paralelogram, deci $AE \parallel BD$, $AE \equiv BD$ și $\widehat{ABD} \equiv \widehat{DEA}$.

Din $AE \parallel BD$ și $BD \perp AC$, rezultă că $AE \perp AC$, adică $\widehat{CAE} = 90°$. Cum $AC = x + y$ și $EC = 2x + 2y$, adică $AC = \frac{EC}{2}$, din triunghiul dreptunghic CAE deducem că $\widehat{DEA} = 30°$, de unde rezultă că $\widehat{ACD} = 60°$ și $\widehat{ABD} = 30°$.

Din triunghiul dreptunghic AOB ($\widehat{O} = 90°$) cu $\widehat{ABO} = 30°$ avem: $AO = \frac{AB}{2} = y$ și $OB = y\sqrt{3}$.

Din triunghiul dreptunghic COD ($\widehat{O} = 90°$) cu $\widehat{ODC} = 30°$ avem

$$CO = x \text{ și } DO = x\sqrt{3}.$$

Deci $BD = BO + OD = \sqrt{3}(x + y)$ și cum $x + y = a$, rezultă că $BD = a\sqrt{3}$.

Deoarece $AC \perp BD$, aria trapezului va fi:

$$S_{ABCD} = \frac{AC \cdot BD}{2} = \frac{a^2\sqrt{3}}{2}.$$

Clasa a VIII-a

Problema E: 9216* (G. M. 7—8/1987, pag. 281)

Fie p un număr prim și A o mulțime formată din p numere întregi consecutive. Să se arate că nu există două mulțimi disjuncte B și C astfel încît $A = B \cup C$ iar produsul elementelor mulțimii B să fie egal cu produsul elementelor mulțimii C.

Cristina Rădulescu, profesoară, Caracal

Soluție. Fie x respectiv y produsul elementelor mulțimii B respectiv C. Dar din p numere consecutive, unde p este prim, numai un singur număr se divide cu p, restul fiind relativ prime cu p. Prin urmare, unul și numai unul din numerele x și y se divide cu p, ceea ce face imposibilă relația $x = y$.

Scanned with OKEN Scanner

PROBLEME REZOLVATE PENTRU LICEU

Clasa a XI-a

Problema 21184 * (G. M. 7–8/1987, pag. 294)

Să se afle limita șirului $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *dat de*

$$a_n = \frac{[\sqrt{1}] + [\sqrt{3}] + [\sqrt{5}] + \ldots + [\sqrt{4n^2+4n-1}]}{n^3}.$$

Cornelia Neagu, profesoară, Bacău

Soluție. Avem $a_n = \frac{1}{n^3}\cdot\sum_{k=1}^{2n^2+2n}[2k-1]$. Dar $[2k-1]=p\in\mathbb{N}^*$ dacă

$p \leqslant \sqrt{2k-1} < p+1$, ceea ce se scrie echivalent succesiv:

$$p^2 \leqslant 2k-1 < (p+1)^2 \Leftrightarrow \frac{p^2+1}{2} \leqslant k < \frac{(p+1)^2+1}{2}, \quad (1)$$

Dacă p este par, $p=2q$, ținînd seama că numărul k este natural, inegalitatea (1) se scrie:

$$2q^2+1 \leqslant k \leqslant 2q^2+2q, \quad (2)$$

iar dacă p este impar, $p=2q-1$, inegalitatea (1) se scrie:

$$2q^2-2q+1 \leqslant k \leqslant 2q^2, \quad (3)$$

Dacă în (2) facem $q=1, 2, \ldots, n$ (căci $2q^2+2q \leqslant 2n^2+2n$ implică $q\leqslant n$) deducem că în suma $\sum_{k=1}^{2n^2+2n}[\sqrt{2k-1}]$ avem 2 termeni egali cu 2, 4 termeni egali cu 4, 6 termeni egali cu 6, . . . , $2q$ termeni egali cu $2q$, . . . , $2n$ termeni egali cu $2n$. Dacă în (3) facem $q=1, 2, \ldots, n$ (căci $2q^2\leqslant 2n^2+2n$ implică $q^2\leqslant n(n+1)$, deci $q\leqslant\sqrt{n(n+1)}$, adică $q\leqslant n$), obținem faptul că în suma $\sum_{k=1}^{2n^2+2n}[\sqrt{2k-1}]$ avem 2 termeni egali cu 1, 4 termeni egali cu 3, 6 termeni egali cu 5, . . . , $2q$ termeni egali cu $2q-1$, . . . , $2n$ termeni egali cu $2n-1$. În concluzie suma respectivă este:

$$\sum_{k=1}^{2n^2+2n}[\sqrt{2k-1}] = \sum_{q=1}^{n}(2q)(2q) + \sum_{q=1}^{n}(2q)(2q-1) = \sum_{q=1}^{n}(2q)(4q-1) =$$

$$= 8\sum_{q=1}^{n}q^2 - 2\sum_{q=1}^{n}q = \frac{4n(n+1)(2n+1)}{3} - n(n+1).$$

Rezultă $a_n = \frac{4(n+1)(2n+1)}{3n^2} - \frac{n+1}{n^2}$ și deci $\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{8}{3}$.

Soluție bună au dat: *Stamate Dan*, cl. a XI-a, Lic. „N. Bălcescu" Pitești; *Suleo Ovidiu*, cl. a XI-a, Lic. „G. Coșbuc" Năsăud.

Clasa a XII-a

Problema 21202* (G. M. 7–8/1987, pag. 296)

Dacă $f_1 : [0, 1] \to \mathbb{R}$ *este continuă și*

$$60\int_0^1 f(x)\,dx = 12a + 15b + 20c + 30d + 60e,$$

Scanned with OKEN Scanner

atunci există $u \in (0,1)$ *așa încît*

$$f(u) = au^4 + bu^3 + cu^2 + du + e.$$

D. M. Bălineț-Giurgiu, profesor, București

Soluție. Fie $g : [0,1] \to \mathbb{R}$, $g(x) = 60(f(x) - ax^4 - bx^3 - cx^2 - dx - e)$. Evident g este o funcție continuă, deci integrabilă și

$$\int_0^1 g(x)\mathrm{d}x = 60\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x - 60\int_0^1 (ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e)\mathrm{d}x =$$

$$= 60\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x - 60\left(\frac{ax^5}{5} + \frac{bx^4}{4} + \frac{cx^3}{3} + \frac{dx^2}{2} + ex\right)\Bigg|_0^1 =$$

$$= 60\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x - (12a + 15b + 20c + 30d + 60e) = 0.$$

Conform teoremei de medie există $u \in (0,1)$ astfel încît $g(u) = \int_0^1 g(x)\mathrm{d}x = 0$, deci rezultă că

$$f(u) = au^4 + bu^3 + cu^2 + du + e.$$

Soluție bună au dat: *Tufă Diana*, cl. a XII-a, Lic. „Vlaicu Vodă" Curtea de Argeș; *Sîrbu Dan*, cl. a XII-a, Lic. „Al. I. Cuza" Focșani.

Problema 21203* (G. M. 7–8/1987, pag. 296)

Calculați:

$$\int_0^1 \frac{\operatorname{arctg} x}{\operatorname{arctg}\dfrac{1}{x^2 - x + 1}}\,\mathrm{d}x.$$

Călin Burduşel, profesor, Tîrgoviște

Soluția autorului: În general putem calcula $\int_0^a \frac{f(x)}{f(x) + f(a-x)}\,\mathrm{d}x$ unde f este continuă pe $[0, a]$ și $f(x) + f(a - x) \neq 0$ pentru $x \in [0, a]$. Într-adevăr, dacă notăm:

$$I_1 = \int_0^a \frac{f(x)}{f(x)+f(a-x)}\,\mathrm{d}x \text{ și } I_2 = \int_0^a \frac{f(a-x)}{f(a-x)+f(x)}\,\mathrm{d}x,$$

Scanned with OKEN Scanner

observăm că $I_1 + I_2 = \int_0^a 1 \cdot dx = a$ și efectuînd schimbarea de variabilă $a - x = y$ în I_2 avem că:

$$I_1 = -\int_a^0 \frac{f(a-y)}{f(a-y)+f(y)}\,dy = I_2. \text{ Deci } I_1 = I_2 = \frac{a}{2}.$$

Integrala propusă se obține considerînd $f(x) = \operatorname{arctg} x$, $a = 1$ și folosind faptul că

$$\operatorname{arctg}\frac{1}{x^2-x+1} = \operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg}(1-x).$$

Deci $\int_0^1 \frac{\operatorname{arctg} x}{\operatorname{arctg}\frac{1}{x^2-x+1}}\,dx = \frac{1}{2}$.

PROBLEMĂ REZOLVATĂ PENTRU CONCURSUL ANUAL AL REZOLVITORILOR

Problema C: 674 (G.M. 3/1987, pag. 124)

Prin punctul $M \in \text{Ext}\,\mathcal{C}(O, r)$ se duce o secantă care taie cercul în punctele A și B. Să se arate că oricare ar fi coarda $[A'B']$ a cercului $\mathcal{C}(O, r)$, paralelă cu $[AB]$, avem $MA + MB < MA' + MB'$.

Emil C. Popa, profesor, Sibiu

Soluție dată de *Andrei Căldăraru*, elev cl. a X-a, Lic. „N. Bălcescu" București și *Marius Cavachi*, profesor, Constanța.

Fie P, P' mijloacele coardelor $[AB]$, respectiv $[A'B']$, iar M' proiecția ortogonală a punctului M pe dreapta $A'B'$. Avem $PO \perp AB$, $OP' \perp A'B'$ și cum $AB \parallel A'B'$, deducem că punctele P, O, P' sînt coliniare. Patrulaterul $MPP'M'$ este un dreptunghi și de aici rezultă $MP = M'P'$, (1). Deoarece P este mijlocul lui $[AB]$, vom avea $MA + MB = (MP - PA) + (MP + PB) = 2MP$, (2) și analog $M'A' + M'B' = 2M'P'$, (3). Din triunghiurile dreptunghice $MM'A'$, $MM'B'$ avem respectiv $MA' > M'A'$, $MB' > M'B'$. Adunînd aceste inegalități și ținînd seama de (1), (2), (3) rezultă:

$$MA' + MB' > M'A' + M'B' = 2M'P' = 2MP = MA + MB.$$

PROBLEME PENTRU CICLUL PRIMAR

49. Să se afle două numere știind că un număr este de 42 ori mai mare decît celălalt iar diferența lor este 205.

Clement Șova, elev, Bacău

Scanned with OKEN Scanner

50. Să se afle numerele a, b, c știind că:

$$a + b + c = 130;$$

$$b = a + (130 : 2 - 5);$$

$$c = b - (130 - 10) : 6.$$

Ionuț Sârbu, elev, Bacău

51. Arătați că dacă se adună 1 la produsul a două numere naturale a căror diferență este 2, se obține pătratul unui număr natural.

Ioan Bran, inginer, Botoșani

52. Să se afle numărul a din egalitatea următoare:

$$879 - (930 : 3 + (837 - 622) + 254) + a = 500.$$

Andrei Ioan Circu, învățător, Rebra, Bistrița-Năsăud

53. Făcînd produsul tuturor numerelor naturale de la 1 la 100 se obține un număr natural. În cîte zerouri se termină acest număr natural?

* * *

54. Lotul școlar are formă de dreptunghi. Suma dimensiunilor sale este de 3 ori mai mare decît diferența lor, iar lățimea are 100 m. Știind că de pe un hectar de teren se obțin 200 kg cartofi, să se afle cîte kilograme cartofi s-au obținut de pe lotul școlar?

Eliana Indricău, elevă, Drăgănești-Olt

55. Ca să aibă 200 kg plante medicinale, elevii clasei a IV-a aveau nevoie încă de 8 kg de plante medicinale.

Știind că în prima zi ei au adunat o parte din cantitate, în a doua zi de 3 ori mai mult decît în prima zi, iar în a treia zi de două ori mai mult decît în prima și a doua zi la un loc, să se afle ce cantitate de plante medicinale au adunat în total elevii clasei a IV-a și cît au adunat în fiecare zi?

Andrei Ioan Circu, învățător, Rebra, Bistrița-Năsăud

56. Să se determine numerele x, y, z știind că:

$$\begin{cases} x \cdot 2 \cdot 3 - 2y = z; \\ z = 6 \cdot 5 + 2x; \\ 4x = 44. \end{cases}$$

Traian Cătălin Guran, elev, Cîmpulung, Argeș

Scanned with OKEN Scanner

PROBLEME PENTRU GIMNAZIU

Clasa a V-a

E : 9467. Arătați că fracția $\frac{4n-5}{32}$ este ireductibilă, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$.

Maria Vizuroiu, Nicolae Vizuroiu, profesori, Pitești

E : 9468*. Să se găsească toate numerele naturale de două cifre, (scrise în baza zece), care adunate cu răsturnatele lor să dea pătrate perfecte.

Ioan Bran, inginer, Botoșani

E : 9469. Fiind date numerele prime a și b mai mici ca 10, să se determine numerele naturale n, știind că are loc egalitatea $\overline{ab} = a + nb$.

Radu Ghenghiu, profesor, Oradea

E : 9470. Să se demonstreze că un număr de trei cifre se divide cu 7 dacă și numai dacă dublul numărului determinat de prima cifră, adunat cu numărul determinat de ultimele două cifre este un număr divizibil cu 7.

Ion Pătrașcu, profesor, Băilești, Dolj

E : 9471*. Să se determine numerele prime de trei cifre cu proprietatea că ultima cifră este egală cu suma primelor două cifre.

Ion Pătrașcu, profesor, Băilești, Dolj

E : 9472*. Să se determine toate numerele naturale, scrise în baza 10, de forma $\overline{xxyz}$, divizibile cu 36, știind că $(\overline{xyz} + \overline{yzx} + \overline{zxy})$ se divide cu 57.

Maria Vizuroiu, Nicolae Vizuroiu, profesori, Pitești

Clasa a VI-a

E : 9473*. Să se determine toate perechile de numere naturale (x, y) care satisfac condiția $x^2 - y^2 = 143$.

Petre Cîrstea, profesor, Tina-Livezi, Vîlcea

E : 9474. Să se arate că fracțiile

$$\frac{1987n - 1982}{25} \quad \text{și} \quad \frac{1988n - 1983}{75}$$

nu pot fi ambele numere întregi pentru un același număr întreg n.

Nicolae Sevelcan, profesor, Sibiu

Scanned with OKEN Scanner

E : 9475. Să se afle numărul soluțiilor ecuației $\overline{abc9} + \overline{xyz8} = 45\text{€}7$.

Dinu Constantin, profesor, Zătreni, Vilcea

E : 9476. Să se determine numerele raționale x și y care verifică simultan relațiile :

1) $\frac{y}{x} = 0{,}5$; 2) $2x + 3y = 6$.

Traian Galea, profesor, Gurahonț, Arad

E : 9477*. a) Dacă înmulțim un număr natural n cu 5 obținem un număr p. Dacă înmulțim numărul n cu 6 obținem răsturnatul numărului p. Să se afle p știind că are 3 cifre.

b) Aceeași problemă în cazul cînd p are 4 cifre.

Nicolae Secelean, profesor, Sibiu

E : 9478*. Fie triunghiul ABC, dreptunghic în A și punctele D, E pe ipotenuza triunghiului astfel încît $m(\widehat{CAD}) = m(\widehat{DAE}) = m(\widehat{EAB})$ (AD și AE se numesc trisectoarele unghiului A).

a) În ce caz una din trisectoare coincide cu mediana corespunzătoare ipotenuzei ?

b) În ce caz lungimile trisectoarelor sînt egale ?

Constantin Schiteanu, profesor, Brezoi, Prahova

Clasa a VII-a

E : 9479*. Fie $ABCD$ un trapez ($AB \| CD$) și O punctul de intersecție al digaonalelor sale. Să se arate că pentru orice dreaptă MN care trece prin O, ($M \in AD$, $N \in BC$) și nu este paralelă cu bazele, segmentele OM și ON nu sînt congruente.

Irina Albu, elevă, București

E : 9480. Necunoscutele fiind x și y, să se rezolve în $\mathbf{N}$ ecuația :

$$x^2y - 2ax(y + 2) = a(1 - 8a)$$

unde a este un număr natural prim.

Maria Vizuroiu și *Nicolae Vizuroiu*, profesori, Pitești

E : 9481*. Fie triunghiul PBA ($PB \equiv PA$) și H ortocentrul său. Fie $BH \cap PA = \{S\}$, $PH \cap AB = \{M\}$. Fie $Q \in BS$ astfel încît H și Q să fie de o parte și de alta a dreptei PA și $\widehat{APQ} = \widehat{BSM}$.

Să se demonstreze relația : $2HM \cdot PA = AQ \cdot BA$.

Nora Mihălțan, profesoară, Ocna-Mureș

Scanned with OKEN Scanner

E : 9482. Într-un cerc de centru O considerăm coarda AC pe care este situat punctul P și diametrul MN perpendicular pe această coardă. Dreptele MP și NP taie a doua oară cercul în B și D. Considerăm patrulaterul $ABCD$ și să se arate că bisectoarele unghiurilor opuse A și C se intersectează într-un punct situat pe diagonala BD.

Dumitru Verzeanu, profesor, Rm. Vîlcea

E : 9483*. În triunghiul ABC, fie AA' mediană ($A' \in BC$), o semidreaptă $BN (N \in AC)$ și $BN \cap AA' = \{M\}$.

Dacă $\frac{MB}{MN} = \frac{BC}{AB} + 1$, atunci $\widehat{ABN} \equiv \widehat{CBN}$.

Florea Puican, profesor, Rm. Vîlcea

E : 9484. Fie M un punct interior arcului $\overset{\frown}{BC}$ al cercului circumscris triunghiului isoscel ABC $(AB = AC)$.

a) Dacă $MA \cap BC = \{P\}$, să se arate că $\frac{A_{ABP}}{A_{ACP}} = \frac{MB}{MC}$.

b) Dacă, în plus, $\overset{\frown}{BC} = 120°$, $AM = 9$ cm și $PC = 2 \cdot PB$, să se calculeze lungimile segmentelor MB și MC.

Gh. Gându, profesor, Bacău

Clasa a VIII-a

E : 9485*. Fie două cercuri tangente exterioare situate în planul α, notate $\mathcal{C}(O_1, R)$, $\mathcal{C}(O_2, r)$. A fiind punctul de tangență, notăm cu B punctul diametral opus lui A în $\mathcal{C}(O_1, R)$ și cu C punctul diametral opus lui A în $\mathcal{C}(O_2, r)$. Fie d o tangentă comună exterioară cercurilor, avînd ca puncte de tangență $E \in \mathcal{C}(O_1, R)$ și $D \in \mathcal{C}(O_2, r)$. Ducem în A perpendiculara pe planul α și fie O un punct pe această dreaptă, $O \neq A$.

Să se demonstreze că dreapta comună planelor (OBE) și (OCD) este perpendiculară pe dreapta O_1O_2.

Cosmin Grigorescu, elev, Slatina

E : 9486. Cîte numere de forma $\overline{xyzx}$ în baza zece există, astfel încît $\overline{xyzx} = \overline{yz}^2 - \overline{zy}^2 + (x+1)yz$? $(1 \leqslant x+1 \leqslant 9, 1 \leqslant y \leqslant 9, 1 \leqslant z \leqslant 9)$.

Daniel Cojocaru, profesor, Slatina

E : 9487. Să se arate că numărul

$$2^{39} \cdot 3^{15} - 2^{34} \cdot 3^{11} + 2^{29} \cdot 3^{10} - 2^{22} \cdot 3^{9} + 1402$$

este divizibil cu 23.

Florin Cîrjan, profesor, Botoșani

Scanned with OKEN Scanner

E : 9488. Să se rezolve sistemul :

$$x - 3 = \left\{\frac{3x - 2}{13}\right\}$$
$$y + 3 = \left\{\frac{2x - 3}{11}\right\}$$

unde $\{a\}$ înseamnă partea fracționară a numărului real a.

Ionel Atanasiu, Focșani

E : 9489*. Fie $a, b > 0$ cu $a^2 + b^2 = 1$. Să se demonstreze că :

$$a + b + \frac{1}{ab} \geq 2 + \sqrt{2}.$$

Vasile Zidaru, profesor, Sfintu Gheorghe

E : 9490*. Să se demonstreze că în orice piramidă cu baza dreptunghi și piciorul înălțimii într-unul din vîrfurile bazei, puterea a patra a măsurii celei mai lungi muchii laterale este cel puțin egală cu de șase ori suma pătratelor ariilor fețelor laterale, iar pătratul ariei bazei este de patru ori mai mare decît modulul diferenței pătratelor ariilor secțiunilor diagonale.

Maria Vizuroiu și *Nicolae Vizuroiu*, profesori, Pitești

PROBLEME PRELIMINARE DE TIP O.I.M. PENTRU ELEVII DIN GIMNAZIU

O.G : 75. Pentru ce numere naturale n, numărul $5^n - 2^n$ se divide cu 9 ?

* * *

O.G : 76. Găsiți condiția care există între numerele a, b, c știind că x, y satisfac simultan egalitățile :

$$x + \frac{1}{x} = a,\ y + \frac{1}{y} = b,\ xy + \frac{1}{xy} = c.$$

* * *

PROBLEME PENTRU LICEU

Clasa a IX-a

21485*. În triunghiul ABC considerăm înălțimea AD, $D \in BC$. Diametrul cercului circumscris triunghiului, care trece prin A, taie latura BC în E. Să se arate că :

$$\frac{AD}{AE} \cdot \frac{BE}{DC} = \frac{AB}{AC}.$$

Tiberiu Trif, student, Cluj-Napoca

Scanned with OKEN Scanner

21486. Pe laturile $[BC]$ și $[CD]$ ale pătratului $ABCD$ se consideră respectiv punctele M și N. Se notează $\{P\} = AM \cap BD$ și $\{Q\} = AN \cap BD$. Să se arate că $m(\widehat{MAN}) = 45°$ dacă și numai dacă $\sigma[APQ] = \sigma[MPQN]$.

Marcel Chiriță, profesor, București

21487*. Într-un triunghi dreptunghic ABC cu $m(\hat{A}) = 90°$, se consideră $D \in (BC)$ și se notează cu r_1 și r_2 razele cercurilor înscrise în triunghiurile ABD, respectiv ACD. Să se arate că:

$$r_1 + r_2 < p - AD,$$

unde p este semiperimetrul triunghiului ABC.

Emil O. Popa, profesor, Sibiu

21488. Să se rezolve în numere întregi ecuația:

$$3\pi x + \frac{1}{2}\arccos\frac{2x}{x^2+1} = 6\pi + \operatorname{arctg}\frac{1}{3}.$$

Nicolae Crainic, profesor, Alba-Iulia

21489*. Cercul înscris în triunghiul ABC este tangent laturii $[BC]$ în punctul D. Să se arate că $BD \cdot DC \geqslant r^2$.

Gheorghe Oniciuc, profesor, Botoșani

21490. Să se rezolve sistemul:

$$\begin{cases} \dfrac{-2x+3y+5z}{a} = \dfrac{2x-3y+5z}{b} = \dfrac{2x+3y-5z}{c} \\ xyz = d^3 : 30 \end{cases}$$

unde $a, b, c \in \mathbf{R}^*$, $d \in \mathbf{R}$.

Anghel A. Petre, profesor, Bistrița

21491. Se consideră triunghiul ascuțitunghic isoscel BAC ($BA \equiv BC$) și se notează cu M mijlocul laturii $[BC]$. Să se demonstreze că:

1°. $AM > \dfrac{BC}{2}$;

2°. $AM - MC < \dfrac{AC}{2}$;

3°. $AC^2 = 2(MA^2 - MC^2)$.

E. Dobre și *G. Dobre*, profesori, Curtea de Argeș

Scanned with OKEN Scanner

Clasa a X-a

21492. Să se demonstreze că în orice triunghi ABC avem inegalitatea:

$$\frac{\cos\frac{A-B}{2}\cos\frac{B-C}{2}\cos\frac{C-A}{2}}{\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{B+C}{2}\cos\frac{C+A}{2}} \geq 8.$$

C. Gîdea, profesor, Buzău

21493*. Se consideră ecuația $3x^3 - 3x^2 + px - q = 0$, cu $p, q \in \mathbf{R}$. Știind că această ecuație are toate rădăcinile reale și pozitive, arătați că:

$$600 < p - q < 1000.$$

Lucian Buliga, profesor Dealu Lung, Vrancea

21494. Fie p un număr prim impar și a, b, c numere întregi. Dacă $a^p + b^p + c^p$ se divide cu p^2, să se arate că $(a+b)^p + (b+c)^p + (c+a)^p$ se divide cu p^2.

Florin Rotaru, matematician, Focșani

21495. Fie ABC un triunghi și $f(M) = \max\left(\frac{MA'}{AA'}, \frac{MB'}{BB'}, \frac{MC'}{CC'}\right)$, unde M este un punct interior triunghiului ABC, iar $\{A'\} = AM \cap BC$, $\{B'\} = BM \cap CA$, $\{C'\} = CM \cap AB$. Determinați $\inf f(M)$, cînd M parcurge interiorul triunghiului ABC.

Vilia Bauță, profesoară, Gălbinași, Călărași

21496*. Fie ABC un triunghi și G centrul de greutate al acestuia. Să se demonstreze că

$$MA^2 + MB^2 + MC^2 \geq \frac{a^2+b^2+c^2}{3},$$

unde M este un punct arbitrar în interiorul triunghiului, iar a, b, c sînt lungimile laturilor sale.

Mihaela Predescu, profesoară, Pitești

21497. Să se rezolve în mulțimea numerelor reale sistemul:

$$\begin{cases} x^{10} + y^5 = 2 \\ x^8y + x^6y^2 + x^4y^3 + x^2y^4 = 4. \end{cases}$$

Ioan Crișan, profesor, Arad

21498*. Fie mulțimea $M = \{1, 2, 3, \ldots, n(n-1)\}$ unde $n \in \mathbf{N}$, $n > 2$ și familia de ecuații $x^2 - 2px + q = 0$, unde $p, q \in M$. Cîte ecuații din această familie au soluții reale și cîte din ele au soluții imaginare?

George Manole, inginer, Oradea

Scanned with OKEN Scanner

21499*. Fiind dată elipsa de ecuație $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, să se arate că pentru orice două numere reale strict pozitive p, q există un punct $M(\alpha, \beta)$ pe elipsă astfel încît $\frac{(p+q)^2\alpha^2\beta^2}{pq}=a^2b^2$.

Ion Voicu, profesor, Brazii, Ialomița

21500*. Fie $n \geqslant 2$, mulțimea $A_n=\{1, 2, 3, \ldots, n\}$ și σ, τ, α, β patru permutări oarecare ale mulțimii A_n.

a) Să se arate că nu există $k \geqslant 2$ astfel încît să aibă loc egalitatea:

$$\sum_{i=1}^{n}\sigma(i)\,\tau(i)=k\sum_{i=1}^{n}\alpha(i)\,\beta(i);$$

b) Să se determine valoarea minimă a lui n pentru care există permutările α, β, σ, τ ale lui A_n astfel ca

$$\sum_{i=1}^{n}\sigma(i)\tau(i)=1{,}9\cdot\sum_{i=1}^{n}\alpha(i)\,\beta(i).$$

Marcel Chiriță, profesor, București.

21501*. Fie matricile A, $B \in \mathcal{M}_2(\mathbf{R})$ astfel încît $\det A=\det B=\frac{1}{4}\det(A+B) \geqslant 0$. Atunci $(\forall)\ x, y \in \mathbf{R}$, $\det(xA+yB) \geqslant 0$. Generalizare.

Călin Ovidiu, elev, București

21502. Dacă $(x_n)_{n\geqslant 1}$ este un șir de numere naturale cu limita $+\infty$, să se arate că:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n^2}{(x_n)!}=0.$$

Florin Rotaru, matematician, Focșani

21503. Să se arate că $(\forall)\ x \in \mathbf{R}_+^*-\{1\}$, există $q \in \mathbf{R}_+^*$ și $p \in \mathbf{R}$ astfel încît $x^p-\sin qx=0$.

Silviu Stossel, profesor, București

21504. Fie $a_i \in \mathbf{R}_+$, $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, $a_1+a_2+\ldots a_n=1$. Să se calculeze limita șirului:

$$x_n=\frac{\sqrt{4a_1+1}+\sqrt{4a_2+1}+\ldots+\sqrt{4a_n+1}}{n^2},\quad n \in \mathbf{N}^*.$$

Ioan Crișan, profesor, Arad

21505. Arătați că oricare ar fi $n \geqslant 2$, $n \in \mathbf{N}$, este satisfăcută inegalitatea

$$(\sqrt[n]{n}-\sqrt[n]{n-1})(\sqrt[n]{n}+\sqrt[n]{n-1}-1)<\frac{2}{n}.$$

Petre Simion, profesor, București

Scanned with OKEN Scanner

21506. Să se calculeze limitele șirurilor de termeni generali:

$$a_n = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} k\left(\operatorname{arctg}\frac{k}{n}\right)^2 \text{ și } b_n = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} k\left(\operatorname{arcctg}\frac{k}{n}\right)^2.$$

Gh. Marghescu, București

21507*. Să se calculeze integralele:

$$I = \int_0^1 \arcsin\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\,dx \text{ și } J = \int_0^1 \arccos\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\,dx.$$

Gh. Marghescu, București

21508. Să se demonstreze că grupul $(G, \circ)$ este comutativ dacă și numai dacă oricare ar fi surjecția $f: G \to G$ există $a \in G$ și endomorfismul injectiv $g: G \to G$ astfel încît $(g \circ g \circ f)(x) \cdot (g \circ f)(x) = a$, oricare ar fi $x \in G$.

D. M. Bătinețu-Giurgiu, profesor, București

21509. Fie numerele complexe $z_0, z_1, \ldots, z_n$ astfel încît are loc egalitatea

$$\frac{C_n^2}{(z-z_0)^2} = \sum_{1\le i<j\le n} \frac{1}{(z-z_i)(z-z_j)},$$

oricare ar fi $z \in \mathbb{C} \setminus \{z_0, z_1, z_2, \ldots, z_n\}$.
Să se arate că $z_0 = z_1 = z_2 = \ldots = z_n$.

Florin Rotaru, matematician, Focșani

21510*. Se dă șirul $a_n = \int_1^e \ln^{2n} x\,dx$, $n \ge 1$.

1°. Să se arate că $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$;

2°. Folosind rezultatul de la punctul 1° să se arate că:

$$\lim_{n\to\infty} e \cdot \sum_{k=0}^{2n} (-1)^k \cdot A_{2n}^k - (2n)! = 0.$$

Györfi László, profesor, Sighișoara

21511. Să se calculeze

$$\int \left(2\operatorname{arctg} x + \arcsin\frac{2x}{1+x^2}\right)^{\frac{x-2}{x+2}} \cdot \frac{1}{(x+2)^3}\,dx,\ x \in (1, \infty).$$

D. Acu, lector dr., Sibiu

21512*. Demonstrați inegalitatea: $e - \sqrt{e-1} \le \int_0^1 e^{x^2}\,dx \le \frac{3}{5}e$.

Radu Gramatovici, elev, București

Scanned with OKEN Scanner

PROBLEME PREGĂTITOARE PENTRU O. I. M. ŞI O. B. M.

O : 554. Se consideră un triunghi echilateral ABC de latură 1 şi M un punct în planul său. Să se demonstreze că numerele MA, MB, MC sînt întregi dacă şi numai dacă $M \in \{A, B, C\}$.

L. Panaitopol

O : 555. Să se calculeze suma $\sum_{k=1}^{n} \left[\frac{n}{k}\right] \varphi(k)$, unde φ este indicatorul lui *Euler* ($\varphi(k)$ semnifică numărul numerelor naturale nenule cel mult egale cu k şi relativ prime cu k).

* * *

O : 556. Fie a, b numere reale strict pozitive şi x, y numere complexe astfel încît $|ax + by| < |ab + x\bar{y}|$. Să se arate că $|x| < b$ dacă şi numai dacă $|y| < a$.

Virgil Nicula, profesor, Bucureşti

PROBLEME PENTRU CONCURSUL ANUAL AL REZOLVITORILOR

Clasele a IX-a şi a X-a

C : 301. Fie $ABCD$ un patrulater convex. Să se arate că următoarele afirmaţii sînt echivalente:

1°. Cercurile înscrise în triunghiurile ABC şi ADC sînt tangente în acelaşi punct la dreapta AC;

2°. Cercurile înscrise în triunghiurile ABD şi CBD sînt tangente în acelaşi punct la dreapta BD.

Virgil Nicula, profesor, Bucureşti

C : 302. Fie $a_1 \geq a_2 \geq a_3 > 0$ astfel încît $a_1 < a_2 + a_3$. Să se demonstreze inegalitatea:

$$\frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_3} + \frac{a_3}{a_1} > \frac{1}{2}(a_1 + a_2 + a_3)\sqrt{\frac{1}{a_1^2} + \frac{1}{a_2^2} + \frac{1}{a_3^2}}.$$

Mircea Lascu, profesor, Zalău

C : 303. Poligonul regulat $A_1A_2 \ldots A_n$ se translatează după un vector de lungime egală cu latura sa, obţinîndu-se un poligon $B_1B_2 \ldots B_n$. Să se arate că dreptele A_1B_2, A_2B_3, $\ldots$, A_nB_1 sînt concurente într-un punct.

Călin Costian, student, Bucureşti

C : 304. Fie $a, b \in \mathbf{R}^*$. Să se determine polinoamele omogene $f \in \mathbf{R}[X, Y]$ care au proprietatea că

$$f(x + a, y + b) = f(x + b, y + a), \quad (\forall) x, y \in \mathbf{R}.$$

Florin Vulpescu-Jalea, profesor, Bucureşti

Clasele a XI-a şi a XII-a

C : 305. Fie $(G, \cdot)$ un grup cu proprietatea că din $x^2 = y^2$ rezultă $x = y$. Să se arate că grupul $(G, \cdot)$ este comutativ dacă şi numai dacă

Scanned with OKEN Scanner

există $a \in G$ și un morfism injectiv (sau surjectiv) $f : G \to G$ astfel încît $f(x)^2 \cdot ((f \circ f)(x))^2 = a$, oricare ar fi $x \in G$.

D. M. Bătineţu-Giurgiu

C : 806. Fie $(G, \cdot)$ un grup, astfel încît există $a, b, c \in G$, $a \neq b \neq c \neq a$, cu proprietatea că $G \setminus \{a, b, c\}$ este un subgrup al său. Arătaţi că $(G, \cdot)$ este izomorf cu unul din grupurile : $(\mathbb{Z}_4, +)$, grupul lui *Klein*, $(\mathbb{Z}_6, +)$ sau $(S_3, \circ)$.

(În legătură cu problema C : 384 G.M.2/1984).

Costel Chiteş, profesor, Bacău

C : 807. Să se calculeze : $\lim\limits_{n \to \infty} \left(\frac{n}{2} - \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{n^2}{(n+k)^2} \right)$.

Marcel Chiriţă, profesor, Bucureşti

C : 808. Dacă $(A, +, \cdot)$ este un inel unitar cu $0 \neq 1$, vom numi caracteristica lui A numărul natural

$$\min\{n \in \mathbb{N}^* \mid n \cdot 1 = 0\}.$$

Să se demonstreze că dacă singurele elemente idempotente (adică soluţii ale ecuaţiei $x^2 = x$) ale lui A sînt 0 şi 1, atunci caracteristica lui A este o putere a unui număr prim.

Silviu Stossel, profesor, Bucureşti

PROBLEME DE INFORMATICĂ

I : 337. Pentru n suficient de mare ($n > 15$) să se utilizeze calculatorul electronic pentru a verifica următoarele relaţii :

$$\frac{4^n}{\sqrt{\pi(n+1)}} < C_{2n}^n < \frac{4^n}{\sqrt{\pi n}} \text{ şi } \frac{4^n}{\sqrt{\pi + \frac{1}{4} + \frac{1}{32n}}} < C_{2n}^n < \frac{4^n}{\sqrt{\pi\left(n + \frac{1}{4}\right)}}.$$

Aplicaţie pentru $n = 9000$. (A se vedea articolul „O rafinare a formulei lui *Stirling*", de *L. Panaitopol*, G. M. nr. 9/1985).

M. Vlada, cercetător, Univ. Bucureşti

I : 338. Fie un triunghi echilateral ABC de latură $2l$. Să se alcătuiască un program care să reprezinte grafic triunghiul faţă de un sistem de coordonate convenabil ales şi să se traseze locul geometric al punctelor M care verifică relaţia $MA^2 - MB^2 + MC^2 = k^2$, unde k este un număr real fixat.

Silviu Crăciunaş, matematician, C. C. U. B.

I.P. Informaţia — 2330 | Index 41 601 | Lei 3,50

A 14 - 8 - 34

Scanned with OKEN Scanner

ISSN 0016–5441

SOCIETATEA DE ȘTIINȚE MATEMATICE
DIN REPUBLICA SOCIALISTĂ ROMÂNIA

GAZETA MATEMATICĂ

PUBLICAȚIE LUNARĂ PENTRU TINERET

8

DIN CUPRINS:

— CONSTRUCȚII ELEMENTARE DE INELE ȘI CORPURI
— ASUPRA UNEI PROPRIETĂȚI A SERIEI ARMONICE
— SOLUȚIILE PROBLEMELOR DATE LA CONCURSUL DE MATEMATICĂ PENTRU GIMNAZIU, ETAPA PE ȚARĂ, 1988 (I)
— PROBLEME REZOLVATE PENTRU GIMNAZIU ȘI LICEU
— PROBLEME PENTRU CICLUL PRIMAR, GIMNAZIU, PRELIMINARE DE TIP O.I.M. PENTRU ELEVII DIN GIMNAZIU, PENTRU LICEU, PREGĂTITOARE PENTRU O.I.M. ȘI O.B.M., PENTRU CONCURSUL ANUAL AL REZOLVITORILOR, DE INFORMATICĂ

ANUL XCIII nr. 8/1988

Scanned with OKEN Scanner

GAZETA MATEMATICĂ

SUMARUL

1. Construcții elementare de inele și corpuri comutative (I), de *Toma Albu* 305
2. Asupra unei proprietăți a seriei armonice, de *I. Sandor* 311
3. Soluțiile problemelor date la Concursul de matematică pentru gimnaziu, etapa finală (pe țară), Brașov, 1988, (I), de Acad. *N. Teodorescu, I. Mitrache, L. Pîrșan, P. Radovici-Mărculescu* . . 312
4. Probleme rezolvate pentru gimnaziu (E : 9229, E : 9193, E : 9196, E : 9198, E : 9210, E : 9213, E : 9245) 318
5. Probleme rezolvate pentru liceu (21206, 21212, 21217, 21224, 21231) 323
6. Probleme pentru ciclul primar (57—64) 327
7. Probleme pentru gimnaziu (E : 9491—E : 9514) 328
8. Probleme preliminare de tip O.I.M. pentru elevii din gimnaziu (O.G. 77, O.G. 78) 332
9. Probleme pentru licen (21513—21540) 332
10. Probleme pregătitoare pentru O.I.M. și O.B.M. (O : 557—O : 559) 336
11. Probleme pentru Concursul anual al rezolvitorilor (C : 809—C : 816) . . . . . cop. III
12. Probleme de informatică (I : 339, I : 340) . . . . . cop. IV

ANUL XCIII | 8 | 1988

COMITETUL DE REDACȚIE

Lector univ. Dumitru Acu, Sibiu; lector univ. Toma Albu; lector univ. Horea Banea, Brașov; lector univ. Octavian Băsă; conf. univ. Dan Brânzei, Iași; prof. Constantin Cărbunaru; prof. Marcel Chiriță; prof. Pal Dalyay, Tg. Mureș; lector univ. Inocențiu Drăghicescu; prof. Ioana Drăghici; înv. Alexandrina Dumitru; prof. Ilie Gheorghiță; prof. Adrian Ghioca, Sinaia; cercetător principal Gheorghe Gussi; lector univ. Stere Ianuș; prof. Ștefan Kadar, Baia Mare; lector univ. Constantin Niță; prof. univ. Arpad Pal, Cluj-Napoca; lector univ. Laurențiu Panaitopol; prof. Olimpia Popescu, Ploiești; matemat. Paul Radoviei-Mărculescu; lector univ. Gheorghe Șirețchi; lector univ. Ioan Tomescu; prof. Florin Vulpescu-Jalea.

REDACȚIA GAZETEI MATEMATICE

Redactor șef (delegat): Acad. N. Teodorescu; redactori principali: prof. Ilie Iliescu, prof. Liviu Pîrșan, prof. Marcel Țena; redactori principali onorifici: C. Ionescu-Țiu, asist. univ. Elifteria Rogai; redactori: prof. Liliana Baiaci, prof. Alexandru Constantinescu.

Responsabil de număr: prof. Alexandru Constantinescu.

ADRESA REDACȚIEI GAZETEI MATEMATICE

Str. Academiei nr. 14, tel. 14.46.53 — București, 1, cod. 79543.

Cititorii din străinătate se pot abona prin ROMPRESFILATELIA, Sectorul Export-Import- Presă, Calea Griviței nr. 64—66, P.O. Box 12—294, Telex 10376 Prafir București ROMÂNIA.

Scanned with OKEN Scanner

GAZETA MATEMATICĂ
PUBLICAȚIE LUNARĂ PENTRU TINERET
ANUL XCIII nr. 8 august 1988

CONSTRUCȚII ELEMENTARE DE INELE ȘI CORPURI COMUTATIVE (I)

de lector dr. Toma Albu

În algebră este important a se cunoaște cît mai multe procedee de a fabrica noi inele și corpuri pornind de la cele existente.

În manualul de Algebră în vigoare de clasa a XII-a se indică asemenea procedee, unele generale și altele particulare. Ca metode generale apar : construcția inelului de polinoame $A[X]$ și construcția inelului de matrici pătrate $M_n(A)$ de ordin dat n, plecîndu-se de la un inel comutativ dat A.

Printre procedeele particulare din manual, de fabricare a noi inele și corpuri pe baza inelelor uzuale $\mathbf{Z}$, $\mathbf{Q}$, $\mathbf{R}$, menționăm : construcția inelului $\mathscr{R}_n$ al resturilor modulo n și a inelului (izomorf cu acesta) $\mathbf{Z}_n$ al claselor de resturi modulo n, plecînd de la $\mathbf{Z}$ și de la un număr natural $n \geqslant 1$ dat, construcția corpului pătratic $\mathbf{Q}(\sqrt{d})$ plecînd de la $\mathbf{Q}$ și de la un număr $d \in \mathbf{Z} \setminus \{0, 1\}$ liber de pătrate, construcția matricială a unui corp cu 4 elemente și a altuia cu 9 elemente pe baza corpurilor $\mathbf{Z}_2$ și respectiv $\mathbf{Z}_3$; ca și variante matriciale pentru corpurile $\mathbf{Q}(\sqrt{2})$ și $\mathbf{C}$. Într-o ediție mai veche a manualului de Algebră de clasa a XII-a figura și un exercițiu care propunea o descriere a corpului $\mathbf{C}$ al numerelor complexe sub forma resturilor de polinoame din $\mathbf{R}[X]$ modulo polinomul $X^2 + 1$. Un procedeu de construcție a corpurilor cu p^2 elemente, p număr prim, inspirat de construcția corpului cu 9 elemente din manual este indicat în [4].

Scopul articolului de față este de a îngloba construcțiile particulare mai sus menționate în două tipuri mari de construcții generale și de a găsi totodată o explicație simplă a mecanismului conform căruia o mare parte a inelelor și corpurilor cunoscute beneficiază, modulo un izomorfism, de o descriere matricială.

O primă construcție generală de inele și corpuri este dată în §.1 și ea este întru totul analoagă construcției inelului $\mathscr{R}_n = \{0, 1, \ldots, n-1\}$ al resturilor modulo n, $n \geqslant 1$. Definiția lui $\mathscr{R}_n$ evită noțiunile de relație de echivalență, clasă de echivalență și deci implicit de inel factor și se bazează esențialmente pe teorema de împărțire cu rest în $\mathbf{Z}$. Or, o asemenea teoremă de împărțire cu rest funcționează și în inelul $K[X]$, K corp comutativ, ceea ce permite să executăm „mutatis mutandis" o construcție similară înlocuind pe $\mathbf{Z}$ cu $K[X]$ și pe n cu un polinom nenul f din $K[X]$. Se obține în acest mod un inel notat K_f; analog cu ceea ce se întîmplă în $\mathscr{R}_n$, inelul K_f este un corp dacă și numai dacă f este un polinom ireductibil. Dacă K este corpul finit $\mathbf{Z}_p$ și f are gradul n, atunci inelul K_f are exact p^n elemente, ceea ce permite în particular, construirea efectivă a unor inele cu p^n elemente, care sînt corpuri doar dacă polinoamele considerate f sînt ireductibile în $\mathbf{Z}_p[X]$. Construcția prezentată în §.1 este de fapt ușor mai generală : pentru orice inel comutativ A și orice polinom $f \in A[X]$ avînd coeficientul dominant element inversabil în inelul A, se poate construi un inel A_f constituit din toate polinoamele din $A[X]$ de grad $\leqslant n-1$, numit *inelul resturilor lui* $A[X]$ *modulo* f, inel care include pe A ca subinel unitar. Construcția se bazează în esență pe o variantă mai generală a teoremei de împărțire cu rest (vezi 0.1). O proprietate remarcabilă a inelului A_f este că X, considerat ca element al lui A_f, este rădăcină a polinomului f. De aici rezultă într-un mod cu totul elementar că, pentru orice corp comutativ K și orice polinom $f \in K[X]$ de grad $\geqslant 1$, există un corp $\overline{K}$ care include pe K drept subcorp și în care f posedă toate rădăcinile.

O a doua construcție generală de inele prezentată în articolul de față, de data aceasta intrinsecă, are la bază noțiunea de A-algebră, explicată în detaliu în §.2. Dacă B este o A-algebră și $u \in B$, atunci se poate defini inelul $A[u]$ format din valorile tuturor polinoamelor din $A[X]$ în elementul $u \in B$. Un caz important este acela cînd inelul A este un corp K.

Scanned with OKEN Scanner

Se introduce după [3] noțiunea de element algebric al unei K-algebre și de polinom minimal al unui asemenea element algebric și se arată că dacă f este polinomul minimal al unui element algebric u dintr-o K-algebră B, atunci inelele K_f și $K[u]$ sînt izomorfe.

Un caz particular remarcabil este acela cînd K-algebra B este K-algebra $M_n(K)$ a matricilor pătrate de ordin n peste corpul K, caz studiat în §.3. Rezultatul cheie al acestui paragraf este următorul: pentru orice polinom unitar $f \in K[X]$ de grad $n \geqslant 1$ există o matrice $U_f \in M_n(K)$ precis determinată, astfel încît polinomul minimal al lui U_f să fie exact f, ceea ce permite stabilirea următorului rezultat: orice inel de tipul $K[u]$, unde u este un element algebric al unei K-algebre arbitrare B, se poate descrie izomorf ca un subinel al unui inel de matrici $M_n(K)$. În particular, orice corp de numere algebrice și orice corp finit beneficiază de o asemenea descriere matricială.

După ce în §.4 se prezintă într-o manieră cu totul elementară noțiunea de caracteristică a unui inel și simbolul lui *Legendre*, în ultimul paragraf se descrie complet structura inelelor cu p^2 elemente, p număr prim. În particular, rezultă aproape toate proprietățile generale ale corpurilor finite în cazul corpurilor cu p^2 elemente: orice corp cu p^2 elemente este comutativ, orice două corpuri cu p^2 elemente sînt izomorfe etc.

Trebuie precizat de la bun început că s-a încercat ca prezentarea materialului de față să fie făcută într-un limbaj cît mai elementar, astfel încît să fie accesibilă unui cerc cît mai larg de cititori. La o analiză mai atentă, se poate conchide că la baza construcțiilor expuse în acest articol stă în ultimă instanță teorema de împărțire cu rest pentru polinoame.

§.0. PRELIMINARII

Peste tot în acest articol vom înțelege prin inel un inel cu element unitate 1, $1 \neq 0$. A va desemna întotdeauna un asemenea inel. Uneori, pentru a nu confunda elementul unitate 1 din inelul A cu numărul 1 din Z, vom nota elementul unitate al inelului A cu e.

Prin $U(A)$ notăm grupul elementelor inversabile din inelul A, numit și grupul *unităților* lui A:

$$U(A) = \{a \in A \mid (\exists) b \in A \text{ cu } a \cdot b = b \cdot a = 1\},$$

iar prin A^* notăm mulțimea $A \setminus \{0\}$.

Dacă M este o mulțime finită, $|M|$ desemnează numărul de elemente al mulțimii M.

Prin *subinel* al inelului A înțelegem o submulțime nevidă A' a lui A îndeplinind următoarele condiții:

(i) $(\forall) a, b \in A' \Rightarrow a + b \in A'$;

(ii) $(\forall) a \in A' \Rightarrow -a \in A'$;

(iii) $(\forall) a, b \in A' \Rightarrow a \cdot b \in A'$.

Direct din definiție rezultă că dacă A' este un subinel al lui A, atunci A' este o parte stabilă a lui A atît în raport cu adunarea cît și cu înmulțirea din inelul A și A' este inel (în general fără element unitate) față de operațiile algebrice pe A' induse de operațiile inelului A. Dacă elementul unitate 1 din A aparține subinelului A', atunci A' se numește *subinel unitar*.

De exemplu, mulțimea $2Z$ a numerelor întregi pare este un subinel al inelului Z, dar nu este subinel unitar. În schimb, Z este un subinel unitar al inelului Q.

Prin *subcorp* al unui corp K înțelegem un subinel unitar K' al lui K satisfăcînd în plus următoarea condiție:

$$(\forall)\ x \in K',\ x \neq 0 \Rightarrow x^{-1} \in K'.$$

Este ușor de văzut că dacă K' este un subcorp al corpului K, atunci K' are o structură de corp în raport cu operațiile algebrice pe K' induse de adunarea și înmulțirea din K.

Noțiunile de subinel și de subcorp nu figurează în manualul de Algebră în vigoare de clasa a XII-a, cu toate că același manual prezintă noțiunea înrudită de subgrup. În opinia noastră includerea în manual a acestor noțiuni, de altfel foarte simple, ar avea un efect benefic considerabil, prin aceea că ar permite o simplificare în rezolvarea și o economie în redactarea multor exerciții care sînt în manual sau sînt propuse la diverse examene și care sînt de următorul tip: să se arate că o anumită submulțime a unui inel familiar rezolvitorului (de exemplu Q, R, C, $C[X]$, RR, $M_n(C)$ etc.) este inel sau corp.

Fapt util în articolul de față este următorul rezultat:

0.1. Propoziție. *Fie A un inel comutativ arbitrar și f un polinom din $A[X]$ având coeficientul dominant element inversabil în A adică*

$$f = a_n X^n + \ldots + a_1 X + a_0 \text{ și } a_n \in U(A).$$

Atunci, oricare ar fi $g \in A[X]$ există q, $r \in A[X]$ unice determinate, numite câtul respectiv restul împărțirii lui g prin f astfel încît

$$g = f \cdot q + r \text{ și } \deg(r) < \deg(f),$$

unde prin $\deg(f)$ am notat gradul polinomului f.

Demonstrație. Analizînd cu atenție demonstrația teoremei de împărțire cu rest în $C[X]$ dată în manualul de Algebră de clasa a X-a constatăm că ea se bazează esențialmente pe următoarele două fapte: C este un inel comutativ și coeficientul dominant al polinomului împărțitor este inversabil în acest inel. Cu această observație, demonstrația pentru $A[X]$ se obține „mutatis mutandis" din demonstrația pentru $C[X]$.

0.2. Corolar. (Teorema lui Bézout). *Fie A un inel comutativ arbitrar, $f \in A[X]$ și $a \in A$. Atunci $X - a$ divide pe f (adică există $g \in A[X]$ cu $f = (X - a) \cdot g$) dacă și numai dacă $f(a) = 0$.*

Demonstrație. Conform lui 0.1, există q, $r \in A[X]$ astfel încît

$$f = (X - a) \cdot q + r \text{ și } \deg(r) < \deg(X - a) = 1.$$

Așadar, $r \in A$, deci

$$f(a) = ((X - a) \cdot q + r)(a) = (a - a) \cdot q(a) + r(a) = r(a) = r.$$

Dacă $(X - a) | f$, atunci, din unicitatea lui r deducem $r = 0$ adică $f(a) = 0$ și reciproc dacă $f(a) = 0$ atunci $r = 0$, deci $f = (X - a) \cdot q$, adică $(X - a) | f$.

Observăm că, dacă inelul A este un corp comutativ K, condiția din 0.1 impusă asupra polinomului împărțitor f nu este alta decît $f \neq 0$, deoarece $U(K) = K^*$. Se regăsește în acest mod teorema clasică de împărțire cu rest din inelul $K[X]$, K corp comutativ. În schimb, dacă inelul A nu este corp și asupra lui f se pune doar restricția $f \neq 0$, rezultatul din 0.1 nu mai este valabil, după cum arată următorul exemplu:

$$A = Z,\ f = 2X + 1,\ g = X + 1.$$

În practică sînt numeroase situațiile (cazul $A = Z$ este cel mai întîlnit) care reclamă imperios folosirea rezultatului formulat în 0.1. De aceea, sugerăm includerea acestuia în manualul de Algebră de clasa a XII-a și prezentarea teoremei de împărțire cu rest în $K[X]$, K corp comutativ, ca un caz particular al său.

§.1. INELUL RESTURILOR INELULUI $A[X]$ MODULO UN POLINOM $f \in A[X]$

În paragraful de față se arată în principal că pentru orice inel comutativ dat A și orice număr natural $n \geq 1$ dat, mulțimea polinoamelor din $A[X]$ de grad cel mult $n - 1$ se poate organiza în mod natural cu o structură de inel comutativ depinzînd de fixarea unui polinom de grad n, unitar, din $A[X]$. Instrumentul de bază utilizat în acest scop îl constituie propoziția 0.1.

Peste tot în acest paragraf A va desemna un inel comutativ și

$$f = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \ldots + a_1 X + a_0$$

un polinom fixat din $A[X]$, cu $n \geq 1$ și $a_n \in U(A)$.
Dacă $a_n = 1$, atunci f se numește polinom *unitar*.
În particular, dacă A este un corp, atunci $a_n \in U(A) \Leftrightarrow a_n \neq 0 \Leftrightarrow \deg(f) = n$.

Conform lui 0.1, pentru orice $g \in A[X]$ există q, $r \in A[X]$ unice determinate astfel încît

$$g = fq + r \text{ și } \deg(r) < n.$$

Vom nota prin $g \bmod f$ restul r al împărțirii lui g la f.

1.1. Lemă. *Fie $g_1, g_2 \in A[X]$. Atunci, oricare ar fi $h_1, h_2 \in A[X]$ avem:*

$$((g_1 + h_1 f) \cdot (g_2 + h_2 f)) \bmod f = (g_1 g_2) \bmod f;$$

$$((g_1 + h_1 f) + (g_2 + h_2 f)) \bmod f = (g_1 + g_2) \bmod f.$$

Scanned with OKEN Scanner

Demonstrație. În bază lui 0.1, există $q, r \in A[X]$, astfel încît

$$g_1 g_2 = f \cdot q + r, \ \deg(r) < n;$$

deci

$$(g_1 + h_1 f)(g_2 + h_2 f) = g_1 g_2 + f(g_1 h_2 + g_2 h_1 + h_1 h_2 f) =$$
$$= f(g_1 h_2 + g_2 h_1 + h_1 h_2 f + q) + r.$$

Ținînd cont de unicitatea restului deducem că:

$$(g_1 g_2) \bmod f = r = ((g_1 + h_1 f) \cdot (g_2 + h_2 f)) \bmod f.$$

Analog se probează și cealaltă egalitate din enunț.

În cele ce urmează vom folosi următoarea notație:

$$A_f = \{b_0 + b_1 X + \ldots + b_{n-1} X^{n-1} \mid b_i \in A, \ i = \overline{0, n-1}\} =$$
$$= \{g \in A[X] \mid \deg(g) < n\}.$$

Este clar că A_f este o parte stabilă a lui $A[X]$ în raport cu operația algebrică „+" de adunare a polinoamelor, deci putem considera operația algebrică indusă de aceasta pe A_f notată tot cu „+".

Întrucît pentru orice $g \in A[X]$, $g \bmod f \in A_f$, are sens să definim o altă operație algebrică pe A_f, notată „$*$", astfel:

$$g_1 * g_2 := (g_1 \cdot g_2) \bmod f, \ (\forall) g_1, \ g_2 \in A_f.$$

1.2. Propoziție. *Operațiile algebrice „+" și „$*$" mai sus definite conferă mulțimii A_f o structură de inel comutativ.*

Demonstrație. Dacă $g \in A_f$, atunci evident $-g \in A_f$, deci A_f este un subgrup al grupului aditiv $(A[X], +)$ subiacent inelului $A[X]$: așadar $(A_f, +)$ este un grup abelian.

Fie $g_1, g_2, g_3 \in A_f$. Deoarece $g_1 * g_2$ este restul împărțirii lui $g_1 \cdot g_2$ la f, rezultă că există $q \in A[X]$ astfel încît

$$g_1 \cdot g_2 = f \cdot q + g_1 * g_2,$$

deci

$$(g_1 * g_2) * g_3 = ((g_1 * g_2) \cdot g_3) \bmod f = ((g_1 g_2 - fq) \cdot g_3) \bmod f = ((g_1 \cdot g_2) \cdot g_3) \bmod f,$$

conform lui 1.1.

Analog se arată că:

$$g_1 * (g_2 * g_3) = (g_1 \cdot (g_2 \cdot g_3)) \bmod f,$$

deci

$$(g_1 * g_2) * g_3 = g_1 * (g_2 * g_3), \text{ deoarece } (g_1 \cdot g_2) \cdot g_3 = g_1 \cdot (g_2 \cdot g_3).$$

Invocînd din nou 1.1, obținem:

$$(g_1 + g_2) * g_3 = ((g_1 + g_2) \cdot g_3) \bmod f = (g_1 \cdot g_3 + g_2 \cdot g_3) \bmod f =$$
$$= (g_1 \cdot g_3) \bmod f + (g_2 \cdot g_3) \bmod f = g_1 * g_3 + g_2 * g_3.$$

Deoarece evident $1 \in A_f$ și „$*$" este o operație algebrică comutativă, concluzionăm că $(A_f, +, *)$ este un inel comutativ.

Inelul A_f se numește *inelul resturilor inelului* $A[X]$ *modulo polinomul* f.

Cititorul familiarizat cu noțiunea de inel factor va recunoaște imediat că inelul A_f nu este altceva decît o copie izomorfă a inelului factor $A[X]/(f)$ al inelului $A[X]$ modulo idealul principal al lui $A[X]$ generat de polinomul f, tot așa cum inelul $\mathcal{R}_n$ al resturilor lui Z modulo n nu este decît o copie izomorfă a inelului Z_n al claselor de resturi modulo n.

1.3. Observații. 1) Dacă $g_1, \ g_2 \in A_f$ și $\deg(g_1 \cdot g_2) < n$, atunci evident $g_1 \cdot g_2 = g_1 * g_2 \in A_f$. În particular, pentru orice $a, \ b \in A$, avem $a * b = a \cdot b \in A$, deci A este un subinel unitar al lui A_f, cu alte cuvinte, inelul A_f construit mai sus este o extindere comutativă a inelului A. În general, un inel comutativ C se numește *extindere comutativă* a inelului A dacă $A \subseteq C$ și A este subinel unitar al lui C. Să notăm că $A = A_f \Leftrightarrow \deg(f) = 1$ și că dacă $\deg(f) \geq 2$, atunci A_f nu este un subinel al lui $A[X]$, cu toate că $A_f \subseteq A[X]$.
Cu alte cuvinte, $A[X]$ nu este o extindere a inelului A_f decît în cazul cînd $\deg(f) = 1$.

Scanned with OKEN Scanner

2) Dacă $g \in A_f$ și $m \in \mathbf{N}^*$, atunci vom nota:

$$g^{*m} = \underbrace{g * g * \ldots * g}_{m \text{ ori}}.$$

Conform celor de mai sus, deducem că pentru orice $g \in A_f$ există $b_0, b_1, \ldots, b_{n-1} \in A$ unic determinate astfel încît

$$g = b_0 * 1 + b_1 * X + b_2 * X^{*2} + \ldots + b_{n-1} * X^{*(n-1)}.$$

3) Cum $f = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \ldots + a_1 X + a_0$,

deducem că

$$a_n X^n = f \cdot 1 + (-a_{n-1} X^{n-1} - a_{n-2} X^{n-2} - \ldots - a_1 X - a_0)$$

deci

$$(a_n X^n) \bmod f = -a_{n-1} X^{n-1} - \ldots - a_1 X - a_0 = -a_{n-1} * X^{*(n-1)} - \ldots - a_1 * X - a_0 * 1.$$

Pe de altă parte, conform definiției operației „$*$", avem:

$$a_n * X^{*n} = (a_n X^n) \bmod f$$

deci

$$a_n * X^{*n} = -a_{n-1} * X^{*(n-1)} - \ldots - a_1 * X - a_0 * 1,$$

adică

$$a_n * X^{*n} + a_{n-1} * X^{*n-1} + \ldots + a_1 * X + a_0 * 1 = 0,$$

cu alte cuvinte, elementul X, considerat în inelul A_f, este o *rădăcină* a polinomului $f \in A[X]$.

4) Dacă g este un alt polinom din $A[X]$ de grad n avînd coeficientul dominant inversabil, unde n este gradul polinomului fixat $f \in A[X]$, atunci inelele A_f și A_g au grupurile abeliene subiacente identice, însă operațiile de înmulțire din cele două inele diferă în general dacă $n \geqslant 2$ (pentru $n = 1$ avem evident $A_f = A_g = A$). Mai mult, inelele A_f și A_g nu sînt izomorfe în general, cu toate că există situații cînd ele sînt izomorfe (vezi 3.7.).

Să notăm că dacă $g = v \cdot f$ unde $v \in U(A)$, atunci inelele A_g și A_f sînt identice. Într-adevăr, pentru orice $h \in A[X]$ avem

$$h = f \cdot q + h \bmod f$$

pentru un anumit $q \in A[X]$, deci

$$h = (f \cdot v) \cdot (v^{-1} q) + h \bmod f = g \cdot (v^{-1} q) + h \bmod f$$

de unde rezultă că $h \bmod f = h \bmod g$ pentru orice $h \in A[X]$. În particular, luînd $v = a_n^{-1}$, unde a_n este coeficientul dominant al lui f, deducem că $A_f = A_{f_1}$ unde $f_1 = vf$ și f_1 este un polinom unitar, cu alte cuvinte, puteam presupune de la început polinomul f ca fiind unitar.

Dacă B este o extindere comutativă a inelului A, atunci un element $b \in B$ este *rădăcină* a polinomului

$$f = a_n X^n + \ldots + a_1 X + a_0 \in A[X]$$

dacă $f(b) = 0$, unde prin $f(b)$ am notat elementul din B numit *valoarea* polinomului f în elementul b și obținut prin înlocuirea lui X cu b și prin efectuarea operațiilor respective din inelul B, adică

$$f(b) = a_n b^n + \ldots + a_1 b + a_0.$$

În paragraful următor vom considera o noțiune mai generală și anume noțiunea de valoare a unui polinom într-un element dintr-o A-algebră.
Am obținut astfel următoarea

1.4. Propoziție. *Pentru orice inel comutativ A și orice polinom $f \in A[X]$ de grad $n \geqslant 1$ avînd coeficientul dominant element inversabil din A, există o extindere comutativă $\bar{A}$ a lui A, anume inelul A_f, care conține o rădăcină a lui f.*

1.5. Observație. Teorema lui *Bézout* și un simplu raționament prin inducție matematică arată că pentru orice inel comutativ A și orice polinom $f \in A[X]$ ca în 1.4 există o extindere comutativă $\bar{A}$ a lui A, astfel încît, f considerat ca polinom cu coeficienți în $\bar{A}$, să fie un produs dintre coeficientul dominant a_n al lui f și n polinoame unitare de gradul 1.

Scanned with OKEN Scanner

Vom încheia acest paragraf considerînd cazul cînd inelul A este un corp comutativ K. În acest caz, polinomul fixat

$$f = a_n X^n + \ldots + a_1 X + a_0 \in K[X]$$

este supus doar condiției $\deg(f) = n \geqslant 1$.

Rezultatul care urmează este analog cu cel cunoscut din liceu : inelul $\mathcal{R}_n$ este corp $\Leftrightarrow \mathcal{R}_n$ este domeniu de integritate $\Leftrightarrow n$ este număr ireductibil (sau prim).

1.6. Propoziție. *Următoarele afirmații sînt echivalente pentru un corp comutativ K și un polinom $f \in K[X]$ cu $\deg(f) = n \geqslant 1$:*

(1) K_f este corp ;

(2) K_f este domeniu de integritate ;

(3) f este un polinom ireductibil.

Demonstrație. Implicația (1) $\Rightarrow$ (2) este evidentă.

(2) $\Rightarrow$ (3). Presupunem că f nu este un polinom ireductibil. Există atunci $g_1, g_2 \in K[X]$ cu $\deg(g_1) < n$ și $\deg(g_2) < n$ astfel încît $f = g_1 \cdot g_2$.

Deci $g_1, g_2 \in K$, $g_1 \neq 0$, $g_2 \neq 0$ și

$$g_1 * g_2 = (g_1 g_2) \bmod f = 0,$$

ceea ce contrazice faptul că inelul K_f este domeniu de integritate.

(3) $\Rightarrow$ (1). Avem de probat că dacă f este un polinom ireductibil, atunci pentru orice $g \in K_f$, $g \neq 0$, există $h \in K_f$ astfel încît $g * h = 1$. Fie d cel mai mare divizor comun în $K[X]$ al polinoamelor f și g. Atunci $d \mid f$ și cum f este un polinom ireductibil rezultă că fie $d = 1$, fie $d = f$ (am considerat că d este un polinom unitar). Dacă $d = f$, atunci, cum $d \mid g$ rezultă că $f \mid g$, în contradicție cu faptul că $\deg(f) = n > \deg(g)$ (aici intervine ipoteza $g \neq 0$). Rămîne deci că $d = 1$, de unde rezultă că există $f_1, g_1 \in K[X]$ astfel încît

$$1 = g \cdot g_1 + f \cdot f_1.$$

Fie $h = g_1 \mod f$. Atunci $g_1 = f \cdot q + h$ pentru un anumit $q \in K[X]$, deci, în baza lui 1.1, obținem

$$(g \cdot g_1) \bmod f = (g \cdot (fq + h)) \bmod f = (gh) \bmod f = g * h.$$

Pe de altă parte,

$$g \cdot g_1 = f(-f_1) + 1$$

deci $(g \cdot g_1) \bmod f = 1$.

În concluzie, $g * h = 1$, adică K_f este corp.

1.7. Observație. Dacă $g \in K[X]$ este un polinom neconstant, atunci putem exprima pe g ca un produs de polinoame ireductibile

$$g = f_1 f_2 \ldots f_m.$$

Conform lui 1.6, K_{f_1} este o extindere comutativă a lui K, care este un corp, iar conform lui 1.4, corpul K_{f_1} conține o rădăcină a lui f_1.

Aplicînd teorema lui *Bézout* și un raționament prin inducție după gradul lui g se deduce că există un corp $\overline{K}$ care este o extindere a corpului K și care conține toate rădăcinile polinomului g, cu alte cuvinte polinomul g, considerat ca polinom peste corpul $\overline{K}$, se poate exprima ca un produs de polinoame de gradul 1 peste corpul $\overline{K}$. Lăsăm cititorului sarcina de a executa toate detaliile de demonstrație.

1.8. Exemple. Fie K un corp finit avînd q elemente și $f \in K[X]$ cu $\deg(f) = n \geqslant 1$. Cum

$$K_f = \{b_0 + b_1 X + \ldots + b_{n-1} X^{n-1} \mid b_i \in K,\ i = \overline{0, n-1}\}$$

și $\sum_{i=0}^{n-1} b_i X^i = \sum_{i=0}^{n-1} c_i X^i \Leftrightarrow b_i = c_i$ pentru orice $i = \overline{0, n-1}$, rezultă că funcția

$$K^n \to K_f$$

$$(b_0, b_1, \ldots, b_n) \mapsto b_0 + b_1 X + \ldots + b_{n-1} X^{n-1}$$

este bijectivă, deci K_f are tot atîtea elemente ca și mulțimea K^n. Așadar, inelul K_f este finit și are exact q^n elemente. Conform celor de mai sus, inelul K_f este corp $\Leftrightarrow f$ este polinom ireductibil în $K[X]$.

Scanned with OKEN Scanner

În baza teoremei lui *Bézout*, un polinom $f \in K[X]$ de grad 2 sau 3 este ireductibil în $K[X]$ dacă și numai dacă f nu are nici o rădăcină în K.

Luînd acum pe postul lui K corpul finit Z_p cu p elemente, $p > 0$ număr prim, rezultă că putem fabrica efectiv, prin procedeul mai sus descris, corpuri cu p^n elemente, $n \in \mathbf{N}$, $n \geq 2$, de îndată ce cunoaștem măcar un polinom ireductibil $f \in Z_p[X]$ de grad n.

Astfel, dacă $p = 2$, atunci polinoamele $f_1 = X^2 + X + \hat{1}$ și $f_2 = X^3 + X + \hat{1}$ din $Z_2[X]$, neavînd nici o rădăcină în Z_2, sînt ireductibile.
Corpurile $(Z_2)_{f_1}$ și $(Z_2)_{f_2}$ au 4 și respectiv 8 elemente.
Să considerăm, de exemplu, corpul

$$(Z_2)_{f_1} = \{a + bX \mid a, b \in Z_2\} = \{\hat{0}, \hat{1}, X, \hat{1} + X\}.$$

Cum

$$X * X = X^2 \bmod f_1, \text{ deducem că}$$

$$X * X = X + \hat{1}$$

$$(X + \hat{1}) * X = \hat{1}$$

$$(X + \hat{1}) * (X + \hat{1}) = X$$

deci tablele *Cayley* ale operațiilor „+" și „*" din corpul $(Z_2)_{f_1}$ sînt următoarele:

+	$\hat{0}$	$\hat{1}$	X	$\hat{1}+X$
$\hat{0}$	$\hat{0}$	$\hat{1}$	X	$\hat{1}+X$
$\hat{1}$	$\hat{1}$	$\hat{0}$	$\hat{1}+X$	X
X	X	$\hat{1}+X$	$\hat{0}$	$\hat{1}$
$\hat{1}+X$	$\hat{1}+X$	X	$\hat{1}$	$\hat{0}$

*	$\hat{0}$	$\hat{1}$	X	$\hat{1}+X$
$\hat{0}$	$\hat{0}$	$\hat{0}$	$\hat{0}$	$\hat{0}$
$\hat{1}$	$\hat{0}$	$\hat{1}$	X	$\hat{1}+X$
X	$\hat{0}$	X	$\hat{1}+X$	$\hat{1}$
$\hat{1}+X$	$\hat{0}$	$\hat{1}+X$	$\hat{1}$	X

Dacă $p = 3$, atunci polinoamele $g_1 = X^2 + 1$ și $g_2 = X^3 + 2X + \hat{1}$ din $Z_3[X]$, neavînd nici o rădăcină în Z_3 sînt ireductibile.
Corpurile $(Z_3)_{g_1}$ și $(Z_3)_{g_2}$ au 9 și respectiv 27 elemente. Propunem cititorului să scrie tablele *Cayley* ale operațiilor din corpurile $(Z_2)_{f_2}$ și $(Z_3)_{g_1}$ și să imagineze și alte exemple.

Dacă considerăm acum inelul $(Z_2)_f$, unde $f = X^2$, rezultă că $X * X = \hat{0}$, deci inelul cu 4 elemente $(Z_2)_f$ are pe X ca element nenul și nilpotent. Deducem că inelul $(Z_2)_f$ nu este izomorf cu inelul produs direct $Z_2 \times Z_2$ întrucît acesta din urmă nu are elemente nilpotente nenule.

(va urma)

ASUPRA UNEI PROPRIETĂȚI A SERIEI ARMONICE

de I. Sándor

Fie $H_n = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}$ $(n \in \mathbf{N}^*)$ suma parțială de ordin n a seriei armonice. Recent *K. T. Atanassov* [1] a demonstrat următoarea

Teoremă. $[H_m] = k$, (1), unde $m = \left[e^{k-C} + \frac{1}{2}\right]$, $k \geq 3$ și $[x]$ reprezintă partea întreagă a lui x; C fiind constanta binecunoscută a lui *Euler*.

Această relație îmbunătățește rezultatele anterioare din [2], [4]. Demonstrația lui *Atanassov* este inductivă și laborioasă. Scopul acestei note este de a arăta că lema folosită în [1] precum și un rezultat al lui *Verneseu A.* [3] permit o demonstrație imediată a lui (1).

Lema 1. $H_n > \ln\left(n + \frac{1}{2}\right) + C$ pentru $n \geq 11$, (vezi [1]).

Scanned with OKEN Scanner

Dăm, pentru completitudine, și *demonstrația* acestei leme. Notăm $\gamma_k = H_k - \ln(k+1) - C$ și demonstrăm prin inducție că pentru $k \geq 11$ avem $\gamma_k > \ln\frac{2k+1}{2k+2}$. Pentru $k = 11$ inegalitatea are loc. S-o acceptăm pentru un $k \geq 11$. Atunci $\gamma_{k+1} + \ln\frac{2k+4}{2k+3} = \gamma_k + \frac{1}{k+1} - \ln\left(1+\frac{1}{k+1}\right) + \ln\frac{2k+4}{2k+3}$. Folosind acum inegalitatea $\frac{1}{k+1} - \ln\left(1+\frac{1}{k+1}\right) > \frac{3k^2+1}{6(k+1)^3}$ (vezi de ex. [5]) găsim că expresia de mai sus este mai mare decît $\ln\frac{2k+1}{2k+2}\cdot\frac{2k+4}{2k+3} + \frac{3k^2+1}{6(k+1)^3} = \ln\left(1 - \frac{1}{(k+1)(2k+3)}\right) + \frac{3k^2+1}{6(k+1)^3} > -\frac{1}{(k+1)(2k+3)} + \frac{1}{(k+1)^3(2k+3)} + \frac{3k^2+1}{6(k+1)^3} = \frac{3k^2+1}{6(k+1)^3} - \frac{k^2+2k+2}{(k+1)^3(2k+3)} > 0$.

Relația $H_k = \gamma_k + C + \ln(k+1)$ implică $H_k > \ln\left(k+\frac{1}{2}\right) + C$, ce era de arătat.

Lema 2. $H_n < \ln n + \frac{1}{2n} + C$, pentru $n \geq 1$, (vez [3]).

Lema 3. $x - \frac{1}{2} < \left[x + \frac{1}{2}\right] \leq 2x$, pentru $x \geq 0$.

Rezultă imediat din definiția lui $[x]$ și pe baza relației cunoscute $\left[x+\frac{1}{2}\right] = [2x] - [x]$.

Demonstrația teoremei. Fie $k \geq 3$. Deoarece pentru $k = 3$ avem $m = 11$, evident Lema 1 se poate aplica, deci $H_m > \ln\left(m+\frac{1}{2}\right) + C > \ln e^{k-C} + C = k$, pe baza Lemei 3. Deci $[H_m] \geq k$. Pe de altă parte din Lema 2 obținem (folosind Lema 3): $H_m < \ln 2 + \frac{1}{2m} + k$. Dar $\ln 2 = 0{,}6931\ldots$ și $\frac{1}{2m} \leq \frac{1}{22} = 0{,}045\ldots$ de unde rezultă $[H_m] \leq k$, deci $[H_m] = k$ și demonstrația s-a încheiat.

BIBLIOGRAFIE

[1] *Atanasov*, K. T., Remark on the harmonic series, C. R. Bulg. Acad. Sci. 40 (1987), 25—28
[2] *Boas, R., Wrench, J.*, Amer. Math. Monthly, 78 (1971), 864—870.
[3] *Vernescu, A.*, Ordinul de convergență al șirului de definiție al constantei lui Euler, Gaz. Mat. 10—11/1983, 380—384.
[4] *Zemyan, S.*, Proc. Amer. Math. Soc., 95 (1967), 83—86.
[5] *Dwight, H.*, Tables of integrals and other mathematical data, The MacMillan Company, New York, 1961.

SOLUȚIILE PROBLEMELOR DATE LA CONCURSUL DE MATEMATICA PENTRU GIMNAZIU, ETAPA FINALĂ (PE ȚARĂ), BRAȘOV 1988 (I)

de

N. Teodorescu, I. Mitrache, L. Pîrșan, P. Rudovici-Mărculescu

Clasa a VI-a

1. *Să se determine numărul natural care satisface simultan următoarele condiții:*

a) *dacă îl împărțim la 4 obținem restul 3;*

Scanned with OKEN Scanner

b) *dacă îl împărțim la* 10 *obținem restul* 1;
c) *dacă îl împărțim la* 12 *obținem restul* 3;
d) *suma câturilor celor trei împărțiri de la punctele* a), b), c) *este mai mare cu* 16 *decît o treime din numărul lui.*

* * *

Soluție. Fie x numărul căutat. Din condițiile a), b), c) rezultă câturile $\frac{x-3}{4}$, $\frac{x-1}{10}$ și $\frac{x-3}{12}$. Din condiția d) rezultă ecuația:

$$\frac{x-3}{4}+\frac{x-1}{10}+\frac{x-3}{12}=\frac{x}{3}+16.$$

Se obține: $6x = 1026$ adică $x = 171$.

2. *Să se afle cîte numere naturale mai mici decît* 1000 *au ultima cifră diferită de zero. Arătați că suma inverselor acestor numere este mai mică decît* 25.

* * *

Soluție. Numerele care au ultima cifră 0 sînt de forma $10k$, $k \in \mathbf{N}$. În cazul nostru avem $k \in \{0, 1, \ldots, 99\}$, adică 100 de numere naturale. Deci avem 900 de numere naturale mai mici ca 1000 cu ultima cifră diferită de zero. Fie S suma inverselor acestor numere. Avem:

$$S = 1+\frac{1}{2}+\underbrace{\frac{1}{3}+\frac{1}{4}}_{2\text{ termeni}}+\underbrace{\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}}_{4\text{ termeni}}+$$

$$+\underbrace{\frac{1}{9}+\frac{1}{11}+\ldots+\frac{1}{16}}_{7\text{ termeni}}+\underbrace{\frac{1}{17}+\ldots+\frac{1}{32}}_{14\text{ termeni}}+\underbrace{\frac{1}{33}+\ldots+\frac{1}{64}}_{29\text{ termeni}}+$$

$$+\underbrace{\frac{1}{65}+\ldots+\frac{1}{128}}_{58\text{ termeni}}+\underbrace{\frac{1}{129}+\ldots+\frac{1}{256}}_{115\text{ termeni}}+\underbrace{\frac{1}{257}+\ldots+\frac{1}{512}}_{230\text{ termeni}}+$$

$$+\underbrace{\frac{1}{513}+\ldots+\frac{1}{995}}_{439\text{ termeni}}<1+\frac{1}{2}+2\left(\frac{1}{2}\right)+4\left(\frac{1}{4}\right)+\frac{2^3-1}{2^3}+$$

$$+\frac{2^4-2}{2^4}+\frac{2^5-2}{2^5}+\frac{2^6-2^2}{2^6}+\frac{2^7-2^3}{2^7}+\frac{2^8-2^4}{2^8}+\frac{2^9-2^6}{2^9}=3+$$

$$+\frac{1}{2}+1+1+1+1+1+1+1-\left(\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{2^4}+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{2^3}\right)=10+\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{2^3}\right)=10-\frac{1}{2^4}<10,$$

deci $S < 25$.

Scanned with OKEN Scanner

3. *Fie xOy un unghi ascuțit și A un punct pe semidreapta Oy, $A \neq O$ (A și O puncte distincte). Se ia $B \in Ox$ astfel încît dreapta AB să fie perpendiculară pe semidreapta Ox. Notăm cu C și D intersecțiile bisectoarelor unghiurilor $\widehat{OAB}$ și $\widehat{BAY}$ cu Ox. Să se demonstreze că:*

a) triunghiul CAD este dreptunghic;

b) există două puncte pe semidreapta Oy egal depărtate fiecare de A și de semidreapta Ox.

Laurențiu Gaiu

Soluție. a) Unghiurile $\widehat{BAy}$ și $\widehat{BAO}$ sînt unghiuri adiacente cu o latură în prelungire, deci suma măsurilor lor este egală cu 180°. Dar

$$\text{măs}(\widehat{CAD}) = \frac{1}{2}(\text{măs}(\widehat{BAY}) + \text{măs}(\widehat{BAO})) = \frac{1}{2} \cdot 180^\circ = 90^\circ.$$

b) Ducem $CE \parallel AB (E \in Oy)$. Urmează $\widehat{ECA} \equiv \widehat{BCA}$ (alterne interne). Dar $\widehat{BAC} \equiv \widehat{CAE}$ deoarece CA este bisectoarea unghiului $\widehat{BAE}$. Rezultă $\widehat{CAE} \equiv \widehat{ACE}$ adică triunghiul EAC este isoscel. Prin urmare $CE \equiv EA$.

Analog, ducînd $DF \parallel AB$ rezultă $DF \equiv AF$.

Clasa a VII-a

(Proba de algebră)

1. *Fie polinomul*

$$P(X) = X^2 + (X+2)^2 + (X+4)^2 + \ldots + (X+98)^2 - [(X+1)^2 + (X+3)^2 + \ldots + (X+99)^2].$$

Să se determine $x \in \mathbf{R}$ pentru care $P(x) > 0$.

M. Trifu

Soluție. Grupînd convenabil urmează:

$$P(x) = [x^2 - (x+1)^2] + [(x+2)^2 - (x+3)^2] + \ldots +$$

$$+ [(x+98)^2 - (x+99)^2] = (x - x - 1)(x + x + 1) +$$

$$+ (x + 2 - x - 3)(x + 2 + x + 3) + \ldots + (x + 98 - x -$$

$$- 99)(x + 98 + x + 99) = -(2x + 1 + 2x + 5 + 2x + 9 + \ldots$$

$$\ldots + 2x + 197) = -50 \cdot 2x - (1 + 5 + 9 + \ldots + 197) =$$

$$= -50(2x + 99).$$

Scanned with OKEN Scanner

Deci $-50(2x+99)>0 \Rightarrow x<-\frac{99}{2}$ adică $x\in\left(-\infty,-\frac{99}{2}\right)$.

2. *Să se rezolve în numere naturale ecuația:*

$$3x^2+2xy+3y^2=664.$$

* * *

Soluție. Ecuația dată se mai poate scrie

$$2(x+y)^2+(x-y)^2=664.$$

Notăm: $x+y=v$ și $x-y=v$, $u, v\in\mathbf{N}$, (1).
Urmează: $2u^2+v^2=664$. Rezultă că: $v=2v_1$, $v_1\in\mathbf{N}$ adică ecuația devine: $u^2+2v_1^2=332\Rightarrow u=2u_1$, $u_1\in\mathbf{N}$.
Deci: $2u_1^2+v_1^2=166\Rightarrow v_1=2v_2$, $v_2\in\mathbf{N}$ adică $u_1^2+2v_2^2=83$. Dar: $0\leqslant u_1\leqslant 9$, iar pe de altă parte u este un număr natural impar. Deci: $u_1\in\{1, 3, 5, 7, 9\}\Rightarrow 2v_2^2\in\{82, 74, 58, 34, 2\}\Rightarrow v_2^2\in\{41, 37, 29, 17, 1\}$.
Dar singurul pătrat este 1. Prin urmare, deoarece $v_2\in\mathbf{N}$, $v_2=1$ și $u_1=9$ implică $v_1=2$, rezultă că $u=18$ și $v=4$.
Din relația (1) urmează:

$$\begin{cases}x+y=18\\x-y=4\end{cases}, \text{ adică } x=11 \text{ și } y=7.$$

Dar ecuația dată este simetrică în x și y prin urmare mai admite și soluția $x=7$ și $y=11$.

3. *Determinați cel puțin trei numere raționale x, care nu sînt întregi, pentru care numărul $\sqrt{x-x^2}$ este rațional și arătați că există oricît de multe numere raționale x pentru care numărul $\sqrt{x-x^2}$ este rațional.*

L. Pîrșan

Soluție. Numerele raționale căutate trebuie să fie situate în intervalul (0, 1), (deoarece $x-x^2\geqslant 0$) și nu trebuie să fie întregi.

De exemplu: $x=\frac{1}{2}$, $x=\frac{1}{5}$, $x=\frac{1}{10}$.

Fie $t\in\mathbf{Q}_+$. Notăm $\sqrt{x-x^2}=tx\Rightarrow x-x^2=t^2x^2\Rightarrow 1-x=t^2x\Rightarrow x=\frac{1}{1+t^2}$.

4. *Se presupune că x, y, z, t sînt numere reale astfel încît*

$$x+y+z=\frac{t+1}{3},\ xy+yz+zx=\frac{t^2+4t+48}{36} \text{ și } t<0.$$

a) *Să se arate că $x^2+y^2+z^2\geqslant 3$;*
b) *Pentru ce valori ale lui x, y, z, t avem $x^2+y^2+z^2=3$?*

O. Stănășilă

Scanned with OKEN Scanner

Soluție a) Calculînd, rezultă:

$$x^2+y^2+z^2=(x+y+z)^2-2(xy+yz+zx)=$$

$$=\frac{t^2+2t+1}{9}-\frac{t^2+4t+48}{18}=\frac{t^2-46}{18}.$$

Deci trebuie arătat că $\frac{t^2-46}{18}\geqslant 3$, adică $(t-10)(t+10)\geqslant 0$ și cum $t<0$, urmează a se arăta că $t\leqslant -10$.

Pe de altă parte avem:

$(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2\geqslant 0$ sau $x^2+y^2+z^2\geqslant xy+yz+zx$ și ținînd cont și de relațiile din ipoteză avem:

$\frac{t^2-46}{18}\geqslant\frac{t^2+4t+48}{36}$ adică $t^2-4t-140\geqslant 0$ sau

$(t+10)(t-14)\geqslant 0$ adică $t\in(-\infty,-10]\cup[14,+\infty)$.

Dar din ipoteză $t<0$, deci $t\in(-\infty,-10]$ adică $t\leqslant -10$.

b) De la punctul a) avem

$$x^2+y^2+z^2=\frac{t^2-46}{18}\text{ deci }t^2=100\text{ și cum }t<0\Rightarrow t=-10$$

și prin urmare $x+y+z=-3$ și $xy+yz+zx=3$.

Dar: $(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2=2(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)=0$.

Urmează $x=y=z$. Prin urmare rezultă $x=y=z=-1$.

Clasa a VII-a

(Proba de geometrie)

1. *Fie ABC un triunghi oarecare cu $AB>AC$. Dacă CF și BE sînt respectiv medianele corespunzătoare laturilor AB și AC, $E\in(AC)$, $F\in(AB)$, să se demonstreze că $BE>CF$.*

* * *

Soluție. Fie AD mediana corespunzătoare laturii BC ($D\in(BC)$) și G punctul de intersecție al medianelor triunghiului ABC. În triunghiurile ADB și ADC, latura AD este comună iar $BD\equiv DC$ (AD mediana laturii BC). Deoarece $AB>AC$ implică $\widehat{ADB}>\widehat{ADC}$.

În triunghiurile BGD și GDC, latura GD este comună, $BD\equiv DC$ iar $\widehat{GDB}>\widehat{GDC}$. Rezultă $BG>GC$ sau $\frac{2}{3}BE>\frac{2}{3}FC$ adică $BE>FC$.

2. *Fie ABC un triunghi dreptunghic în A cu $\hat{B}>\hat{C}$. Notăm cu D mijloul ipotenuzei BC. Perpendiculara în D pe BC intersectează catela AC în E.*

a) *Să se demonstreze că $\widehat{ADE}=\hat{B}-\hat{C}$.*

b) *Să se determine măsurile unghiurilor triunghiului ABC știind că $AE\equiv ED$.*

C. Timiraș, I. Diaconu

Scanned with OKEN Scanner

Soluție. a) Triunghiul ADC este isoscel deoarece D este centrul cercului circumscris triunghiului ABC, AD și DC fiind raze în acest cerc. Urmează că $\widehat{ACD} \equiv \widehat{DAC}$. Dar $\widehat{DEC} \equiv \widehat{ABD}$ (au același complement care este $\widehat{ACB}$). Pe de altă parte $\widehat{DEC}$ este un unghi exterior triunghiului AED din $\widehat{DEC} = \widehat{EAD} + \widehat{ADE}$.

Rezultă că $\widehat{ADE} = \widehat{DEC} - \widehat{EAD} = \hat{B} - \hat{C}$.

b) Deoarece $AE \equiv ED$ rezultă că triunghiul EAD este isoscel adică $\widehat{EAD} \equiv \widehat{ADE}$. Rezultă că $\hat{B} = 2\hat{C}$ și cum $\hat{B} + \hat{C} = 90°$ urmează că $\hat{B} = 60°$ și $\hat{C} = 30°$.

3. *Fie $ABCD$ un patrulater cu diagonalele perpendiculare înscris într-un cerc de centru O și rază R.*

a) *Calculați suma pătratelor lungimilor a două laturi opuse ale patrulaterului în funcție de raza cercului.*

b) *Să se arate că distanța de la O la CD este egală cu* $\frac{AB}{2}$.

* * *

Soluție. a) Fie P și Q proiecțiile punctului O pe BD și AC. Urmează $BP \equiv PD$, $AQ \equiv QC$ și $CE \equiv ED$. Deci: $ID = IP + \frac{BD}{2}$, $IC = IQ + \frac{AC}{2}$, unde $\{I\} = AC \cap BD$.

Din triunghiurile dreptunghice CID și AIC avem:

$$CD^2 = ID^2 + IC^2 \text{ și } AB^2 = AI^2 + BI^2$$

sau

$$CD^2 = ID^2 + IC^2 = (PD + IP)^2 + (IQ + QC)^2 =$$

$$= \left(\frac{BD}{2} + IP\right)^2 + (IQ + QC)^2 = \left(\frac{BD}{2} + IP\right)^2 + \left(IQ + \frac{AC}{2}\right)^2 \text{ și}$$

$$AB^2 = AI^2 + BI^2 = (AQ - IQ)^2 + (BP - IP)^2 =$$

$$= \left(\frac{AC}{2} - IQ\right)^2 + \left(\frac{BD}{2} - IP\right)^2.$$

Adunînd ultimele două relații rezultă:

$$AB^2 + BC^2 = \frac{2}{4}(BD^2 + AC^2) + 2(PI^2 + QI^2) =$$

$$= 2\left(\frac{BD^2}{4} + QI^2\right) + 2\left(\frac{AC^2}{4} + PI^2\right) =$$

$$= 2(PD^2 + OP^2) + 2(QC^2 + OQ^2) = 2R^2 + 2R^2 = 4R^2.$$

b) În triunghiul OEC, unde $OE \perp CD$, $E \in CD$, avem:

$$OE^2 + \frac{CD^2}{4} = R^2.$$

Scanned with OKEN Scanner

Din relația stabilită la punctul a) avem :

$$\frac{CD^2}{4} + \frac{AB^2}{4} = R^2.$$

Egalînd ultimele două relații avem :

$$OE^2 + \frac{CD^2}{4} = \frac{CD^2}{4} + \frac{AB^2}{4} \text{ sau } OE = \frac{AB}{2}.$$

4. În triunghiul ABC cu $m(\hat{C}) > 90°$ se duc înălțimile BA' și AB' unde A' aparține dreptei AC și B' aparține dreptei BC. Să se demonstreze că :
a) dreptele AB' și BA' sînt concurente într-un punct H ;
b) triunghiul ABH este ascuțitunghic ;
c) să se găsească un punct D pe segmentul AB' astfel încît patrulaterul $BDB'H$ să fie inscriptibil.

Acad. *N. Teodorescu*

Soluție. a) Fie D, B' și A' punctele de intersecție ale înălțimilor triunghiului respectiv cu latura AB și respectiv cu prelungirile laturilor BC și AC. Notăm cu H' intersecția înălțimilor DC cu prelungirea lui AB'. Atunci

$$m(\widehat{AH'D}) = 90° - m(\widehat{DAH'}).$$

Notăm cu H'' intersecția înălțimii CD cu prelungirea lui BA'. Atunci

$$m(\widehat{DH''B}) = 90° - (\widehat{DBH''}).$$

Cum $m(\widehat{AH'D}) + m(\widehat{DH''B}) = 180° - m(\widehat{DBH'}) - m(\widehat{DAH'})$ rezultă că punctele H' și H'' coincid ; (și în continuare notăm cu $\hat{H}$ punctul de intersecție al înălțimilor triunghiului ABC).

b) Unghiurile triunghiului ABH sînt ascuțite deoarece ele sînt unghiuri ascuțite în triunghiurile dreptunghice ADH, HDC și respectiv $BB'H$.

c) Punctul D este intersecția înălțimii coborîte din C pe latura AB deoarece $m(\widehat{BDH}) = m(\widehat{BB'H}) = 90°$.

(va urma)

PROBLEME REZOLVATE PENTRU GIMNAZIU

Clasa a V-a

Problema E : 9229* (G.M. 9/1987, pag. 326)
Să se afle $a \in \mathbf{N}$, care verifică simultan relațiile :

1) $\frac{1}{9} < \frac{1}{a} < \frac{1}{2}$; 2) $\frac{2}{13} < \frac{2}{a-1} \leqslant \frac{2}{5}$; 3) $\frac{2}{11} < \frac{3}{3a-5} < \frac{1}{3}$.

Ștefan Țifui, profesor, Grințieș, Neamț

Scanned with OKEN Scanner

Soluție. Din relațiile 1) rezultă: $2 < a < 9$ și cum $a \in \mathbf{N}$ avem: $a \in \{3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, (1).

Din relațiile 2) avem: $5 \leqslant a - 1 < 13$ și cum $a \in \mathbf{N}$ avem: $a \in \{6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13\}$, (2).

Din relațiile 3) rezultă că: $\frac{6}{33} < \frac{6}{6a-10} < \frac{6}{18}$, deci $18 < 6a - 10 < 33$ sau $a \in \left(\frac{14}{3}, \frac{43}{6}\right)$ și cum $a \in \mathbf{N}$ avem: $a \in \{5, 6, 7\}$, (3).

Din (1), (2), (3) rezultă $a \in \{6, 7\}$.

Clasa a VI-a

Problema E: 9193* (G.M. 7–8/1987, pag. 278)

Fie O centrul cercului circumscris unui triunghi dreptunghic ABC, cu măsura unghiului $\hat{A}$ de $90°$ și $\hat{B} > \hat{C}$. Pe prelungirea lui AB se consideră un punct D astfel încît $DO \perp BC$. Cîte grade are arcul $\overset{\frown}{AB}$ dacă AC este bisectoarea unghiului BCD?

Ion Z. Predescu, profesor, Rast, Dolj

Soluție: Triunghiul ABC fiind dreptunghic, înscris în cerc rezultă că $O \in BC$ și că $CO \equiv OB$.

Deoarece $AC \perp AB$ și AC este bisectoarea unghiului BCD rezultă că triunghiul BCD este isoscel cu $CD \equiv CB$, (1). Deoarece $DO \perp BC$ și $CO \equiv OB$ rezultă că triunghiul BCD este isoscel cu $CD \equiv BD$, (2). Din (1) și (2) deducem că $BC \equiv CD \equiv BD$ deci triunghiul BCD este echilateral. Prin urmare $\widehat{DCB} = 60°$ de unde deducem că $\widehat{ACB} = 30°$ deci arcul $\overset{\frown}{AB} = 60°$.

Problema E: 9196* (G.M. 7–8/1987, pag. 278)

Să se demonstreze că nu există n, număr natural, astfel încît numărul $n^2 + n + 1$ să fie divizibil cu 1985.

Nicolae Tănăsescu, profesor, Oreavu, Buzău

Soluție: Vom face următorul tabel:

ultima cifră a lui n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
ultima cifră a lui n^2	1	4	9	6	5	6	9	4	1	0
ultima cifră a lui $n^2 + n + 1$	3	7	3	1	1	3	7	3	1	1

Se observă că pentru orice număr natural n ultima cifră a numărului $n^2 + n + 1$ aparține mulțimii $\{1, 3, 7\}$ deci nici un număr $n^2 + n + 1$ nu se divide cu 5, prin urmare nici cu 1985.

Scanned with OKEN Scanner

Problema E : 9198* (G.M. 7—8/1987, pag. 278)

Se consideră mulțimea numerelor naturale mai mici ca 500. Cîte numere din această mulțime nu admit în descompunerea lor în factori primi, puteri ale lui 2?

Ligia Chiroiu, studentă, București

Soluție. Numerele naturale care nu admit în descompunerea lor în factori primi puteri ale lui 2 sînt numerele impare. Mulțimea numerelor naturale impare mai mici decît 500 este $\{1, 3, 5, \ldots, 499\}$ și are 250 de elemente.

Clasa a VII-a

Problema E : 9210* (G.M. 7—8/1987, pag. 280)

În triunghiul ABC ($\hat{A} = 90°$), se consideră D piciorul înălțimii din A pe BC și M mijlocul lui (BC). Demonstrați că $\frac{S_{ADM}}{S_{ABC}} = \frac{\sqrt{3}}{4}$ dacă și numai dacă $\hat{C} = 75°$.

Virginia-Tică-Diaconu și *Vasile Tică-Diaconu*, profesori, Cîmpulung-Muscel

Soluție. ($\Rightarrow$): Dacă $\frac{S_{ADM}}{S_{ABC}} = \frac{\sqrt{3}}{4}$ atunci $\hat{C} = 75°$.

Avem $\frac{S_{ADM}}{S_{ABC}} = \frac{DM \cdot AD}{BC \cdot AD} = \frac{DM}{BC} = \frac{DM}{2AM}$.

Dar $\frac{S_{ADM}}{S_{ABC}} = \frac{\sqrt{3}}{4}$, deci $\frac{DM}{2AM} = \frac{\sqrt{3}}{4}$, de unde $\frac{DM}{AM} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, adică în triunghiul dreptunghic $ADM(\hat{D} = 90°)$ avem $\cos(\widehat{DMA}) = \frac{DM}{AM} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ prin urmare $\widehat{DMA} = 30°$. Însă unghiul $\widehat{DMA}$ este exterior triunghiului isoscel $MAB(MA \equiv MB)$. Rezultă că $\hat{B} = 15°$, de unde obținem că $\hat{C} = 75°$.

Reciproc. ($\Leftarrow$): Dacă $\hat{C} = 75°$ atunci $\frac{S_{ADM}}{S_{ABC}} = \frac{\sqrt{3}}{4}$.

Dacă $\hat{C} = 75°$ din triunghiul isoscel $AMC(AM \equiv MC)$ obținem $\widehat{CMA} = 30°$. În triunghiul dreptunghic ADM ($\hat{D} = 90°$) cu $\widehat{DMA} = 30°$ avem $AD = \frac{AM}{2}$ și $DM = \frac{AM\sqrt{3}}{2}$. Deci:

$$S_{ADM} = \frac{AD \cdot DM}{2} = \frac{AM}{2} \cdot \frac{AM\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{AM^2\sqrt{3}}{8} \text{ și}$$

$$S_{ABC} = \frac{BD \cdot AD}{2} = 2AM \cdot \frac{AM}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{AM^2}{2}, \text{ de unde}$$

$$\frac{S_{ADM}}{S_{ABC}} = \frac{AM^2\sqrt{3}}{8} \cdot \frac{2}{AM^2} \Rightarrow \frac{S_{ADM}}{S_{ABC}} = \frac{\sqrt{3}}{4}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Problema E : 9213* (G.M. 7—8/1987, pag. 281)

Fie ABC un triunghi oarecare, $A_1 \in (BC)$, $B_1 \in (CA)$, $C_1 \in (AB)$, $AA_1 \cap BB_1 = \{A_2\}$, $BB_1 \cap CC_1 = \{B_2\}$, $CC_1 \cap AA_1 = \{C_2\}$. Să se demonstreze că :

a) $\frac{BA_1}{A_1C} = \frac{CB_1}{B_1A} = \frac{AC_1}{C_1B} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ *dacă și numai dacă* $AA_2 = A_2A_1$, $BB_2 = B_2B_1$, $CC_2 = C_2C_1$;

b) $\frac{BA_1}{A_1C} = \frac{CB_1}{B_1A} = \frac{AC_1}{C_1B} = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ *dacă și numai dacă* $AC_2 = C_2A_1$, $BA_2 = A_2B_1$, $CB_2 = B_2C_1$.

Vasile Badiu, matematician, Cîmpina

Soluție : a) Dacă $\frac{BA_1}{A_1C} = \frac{CB_1}{B_1A} = \frac{AC_1}{C_1B} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, (i), atunci $AA_2 = A_2A_1$, $BB_2 = B_2B_1$, $CC_2 = C_2C_1$, (ii).

Aplicăm teorema lui *Menelaus* în triunghiurile AA_1C, BB_1A și CC_1B cu transversalele BB_1, CC_1 respectiv AA_1 și obținem :

$$\frac{CB_1}{B_1A} \cdot \frac{AA_2}{A_2A_1} \cdot \frac{A_1B}{BC} = 1, \quad (1); \frac{AC_1}{C_1B} \cdot \frac{BB_2}{B_2B_1} \cdot \frac{B_1C}{CA} = 1, \quad (2);$$

$$\frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CC_2}{C_2C_1} \cdot \frac{C_1A}{AB} = 1, \quad (3).$$

Din (i) prin proporții derivate obținem :

$$\frac{BA_1}{BC} = \frac{CB_1}{AC} = \frac{AC_1}{AB} = \frac{1+\sqrt{5}}{3+\sqrt{5}}, \quad (4).$$

Ținînd seama de (i) și (4) în relațiile (1), (2) și (3) obținem :

$$\frac{AA_2}{A_2A_1} = 1, \frac{BB_2}{B_2B_1} = 1, \frac{CC_2}{C_2C_1} = 1, \text{ de unde rezultă (ii).}$$

Reciproc, să demonstrăm că (ii) $\Rightarrow$ (i).

Pentru aceasta să notăm :

$$\frac{BA_1}{A_1C} = a, \frac{CB_1}{B_1A} = b, \frac{AC_1}{C_1B} = c, \text{ (j).}$$

Scanned with OKEN Scanner

Evident $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$. Prin proporții derivate din (j) obținem:

$$\frac{BA_1}{BC} = \frac{a}{a+1}, \quad \frac{CB_1}{CA} = \frac{b}{b+1}, \quad \frac{AC_1}{AB} = \frac{c}{c+1}, \text{ (jj)}.$$

Aplicăm din nou teorema lui *Menelaus* în triunghiurile AA_1C, BB_1A și CC_1B cu transversalele BB_1, CC_1 și respectiv AA_1 și obținem relațiile (1), (2) și (3). Ținînd cont în (1), (2) și (3) de relațiile (ii), (j) și (jj) obținem sistemul:

$$b \cdot \frac{a}{a+1} = 1; \quad c \cdot \frac{b}{b+1} = 1; \quad a \cdot \frac{c}{c+1} = 1,$$

echivalent succesiv cu:

$$\begin{cases} a(b-1) = 1 \\ b(c-1) = 1 \\ c(a-1) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \dfrac{1}{b-1} \\ b(c-1) = 1 \\ c \cdot \dfrac{2-b}{b-1} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \dfrac{1}{b-1} \\ c = \dfrac{b-1}{2-b} \\ b \cdot \dfrac{2b-3}{2-b} = 1 \end{cases} \text{ (jjj)}.$$

Ultima ecuație din sistem este echivalentă cu $2b^2 - 2b - 2 = 0$, de unde $b = \dfrac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$. Cum $b > 0$ soluția $\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$ nu convine (fiind negativă) deci $b = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$. Înlocuind în sistemul (jjj), obținem $a = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ și $c = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$, prin urmare $a = b = c = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$, adică (i).

b). Se procedează analog aplicînd teorema lui *Menelaus* în triunghiurile BCB_1, CAC_1 și ABA_1 cu transversalele AA_1, BB_1 și respectiv CC_1.

Clasa a VIII-a

Problema E: 9245* (G.M. 9/1987, pag. 329)
Să se rezolve în numere naturale ecuația:

$$1 + x + x^2 + x^3 = y^3.$$

Lucian Tuțescu, profesor, Craiova

Soluție. În prealabil vom arăta că:

$$x^3 < 1 + x + x^2 + x^3 < (x+1)^3, \ (\forall)\ x \in \mathbf{N}, \text{ (1)}.$$

Într-adevăr, inegalitatea din dreapta este evidentă.

Scanned with OKEN Scanner

Inegalitatea din stînga este echivalentă cu

$$x^2 + x + 1 > 0,\ (\forall)\ x \in \mathbf{N} \leftrightarrow \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 > 0,\ (\forall)\ x \in \mathbf{N},$$ ceea ce este evident.

Conform (1) avem că $x^3 < y^3 \leqslant (x+1)^3$, deci numărul natural y^3 fiind cuprins între două numere naturale consecutive și strict mai mare decît x^3 rezultă că $y^3 = (1+x)^3$ sau $y = 1 + x$. Înlocuind y în ecuația dată obținem ecuația $2x^2 + 2x = 0$ sau $2x(x+1) = 0$ cu soluțiile $x = 0$ și $x = -1 \notin \mathbf{N}$. Deci $x = 0$ și $y = 1$.

Soluție bună au dat: *Dogaru Dragoș*, cl. a IX-a, Lic. ind. „Unirea" Focșani; *Costui Daniela*, cl. a IX-a, Lic. mat. fiz. Zalău.

PROBLEME REZOLVATE PENTRU LICEU

Clasa a IX-a

Problema 21206* (G.M. 9/1987, pag. 330)

Fie ABC un triunghi isoscel ($AB = AC$), $\mathcal{C}$ cercul circumscris, D mijlocul arcului $\widehat{BC}$, $D \neq A$ și $M \in (BC)$ arbitrar. Fie N al doilea punct de intersecție al dreptei DM cu cercul. Dacă mediatoarea segmentului (MN) intersectează laturile AB respectiv AC în P respectiv Q, să se arate că patrulaterul $APMQ$ este paralelogram.

Gheorghe Szöllösy, profesor, Sighetu-Marmației

Soluția (autorului). Notăm cu $\alpha = m(\widehat{BAC})$ și cu $\beta = m(\widehat{ABC}) = m(\widehat{ACB})$.

Rezultă că $\beta = 90° - \frac{\alpha}{2}$, (1).

Pentru a arăta că $APMQ$ este paralelogram este suficient să arătăm că $m(\widehat{PMB}) = \beta = m(\widehat{QMC})$, deoarece în acest caz avem că $PM \parallel AQ$ și $MQ \parallel AB$.

Arătăm că $m(\widehat{PMB}) = \beta$. Într-adevăr, fie $\{O\} = PQ \cap MN$, $\{S\} = PQ \cap BN$ și $\{T\} = PQ \cap CN$. Deoarece $m(\widehat{SNO}) = m(\widehat{BND}) = \frac{m(\widehat{BC})}{2} = \frac{\alpha}{2}$ rezultă $m(\widehat{NSO}) = 90° - \frac{\alpha}{2}$, deci conform (1) avem că $m(\widehat{NSO}) = \beta$. Dar $\widehat{MSO} \equiv \widehat{NSO}$, deoarece SO este mediatoarea segmentului MN, deci $m(\widehat{MSO}) = \beta$ și cum $m(\widehat{PBM}) = \beta$ rezultă că patrulaterul $PSBM$ este inscriptibil, deci $m(\widehat{PMB}) = m(\widehat{NSP}) = \beta$.

Vom arăta acum că $m(\widehat{QMC}) = \beta$. Într-adevăr $m(\widehat{TNO}) = \frac{1}{2} m(\widehat{DC}) = \frac{\alpha}{2}$ deci $m(\widehat{NTO}) = 90° - \frac{\alpha}{2} = \beta$, conform (1). Rezultă

Scanned with OKEN Scanner

că $m(\widehat{MTO}) = \beta$ deci $m(\widehat{ACB}) = \beta = m(\widehat{MTO})$ adică patrulaterul $QCMT$ este inscriptibil. Rezultă că $m(\widehat{QMC}) = m(\widehat{QTC}) = m(\widehat{NTO}) = \beta$.

Cu aceasta demonstrația este încheiată.

Clasa a X-a

Problema 21212* (G.M. 9/1987, pag. 331)

Să se arate că în orice triunghi ABC avem $7a^2 + b^2 + 28 \cdot S \leqslant 10ab + 10ac + c^2$ unde a, b, c sînt lungimile laturilor, iar S aria unui triunghi. Cînd are loc egalitatea?

C. Caragea, profesor, Constanța

Soluție. Folosind teorema sinusurilor și formula $S = 2R^2 \sin A \sin B \sin C$ inegalitatea se scrie sub o formă echivalentă:

$$28R^2\sin^2 A + 4R^2\sin^2 B + 56R^2 \sin A \sin B \sin C \leqslant$$

$$\leqslant 40R^2 \sin A \sin B + 40R^2 \sin A \sin C + 4R^2 \sin^2 C \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 7\sin^2 A + \sin A[14 \sin B \sin C - 10 \sin B - 10 \sin C] +$$

$$+ \sin^2 B - \sin^2 C \leqslant 0 \Leftrightarrow 7 \cdot \sin^2 A + \sin A[14 \sin B \sin C -$$

$$- 10 \sin B - 10 \sin C] + \sin A \sin(B - C) \leqslant 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 7 \cdot (\sin B \cos C + \sin C \cos B) + (14 \sin B \sin C - 10 \sin B -$$

$$- 10 \sin C) + \sin B \cos C - \sin C \cos B \leqslant 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sin B(4 \cos C + 3 \sin C - 5) + \sin C(3 \cos B + 4 \sin B - 5) \leqslant 0.$$

Această inegalitate este adevărată ținînd seama de faptul că $\sin B \geqslant 0$, $\sin C \geqslant 0$, și avînd în vedere că $\alpha \sin x + \beta \cos x \leqslant \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$, $(\forall)\ x \in \mathbf{R}$.

Presupunînd triunghiul nedegenerat, egalitatea are loc atunci cînd

$$\begin{cases} 4 \cos C + 3 \sin C = 5 \\ 3 \cos B + 4 \sin B = 5 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 9 \sin^2 C + 16 \cos^2 C + 24 \sin C \cos C = 25 \\ 9 \cos^2 B + 16 \sin^2 B + 24 \sin B \cos B = 25 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 9 \cos^2 C + 16 \sin^2 C - 24 \sin C \cos C = 0 \\ 9 \sin^2 B + 16 \cos^2 B - 24 \sin B \cos B = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3 \cos C = 4 \sin C \\ 3 \sin B = 4 \cos B \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \operatorname{tg} C = \dfrac{3}{4} \\ \operatorname{tg} B = \dfrac{4}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \operatorname{tg} C = \operatorname{ctg} B \Leftrightarrow A = \frac{\pi}{2},$$

iar triunghiul este asemenea cu triunghiul pitagoric de laturi $a = 5$, $b = 4$, $c = 3$.

Scanned with OKEN Scanner

Problema 21217* (G.M. 9/1987, pag. 332)

Să se rezolve ecuația trigonometrică $(2\sin x + 3)^k + (2\cos x + 1)^k = 2(\sin x + \cos x + 2)^k$ *unde* $k \geq 2$ *este un număr natural par.*

Gheorghe Marchitan, profesor, Succava

Soluție. Notăm $2\sin x + 3 = t$ și $2\cos x + 1 = u$, de unde $2(\sin x + \cos x + 2) = t + u > 0$. Ecuația se scrie $t^k + u^k = 2\left(\frac{t+u}{2}\right)^k$, cu $k \in \mathbf{N}$, $k \geq 2$ și $t + u > 0$, sau $(t+u)^k = 2^{k-1}(t^k + u^k)$ cu $k \geq 2$ și $t + u > 0$.

Această egalitate are loc dacă și numai dacă $t = u$, adică $2\sin x + 3 = 2\cos x + 1$ sau $\sin x + 1 = \cos x = 0$ de unde $2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} + 2\sin^2\frac{x}{2} = 0$ sau $\sin\frac{x}{2}\left(\cos\frac{x}{2} + \sin\frac{x}{2}\right) = 0$ cu soluția $x \in \{2k\pi \mid k \in \mathbf{Z}\} \cup \left\{-\frac{\pi}{2} + 2k\pi \mid k \in \mathbf{Z}\right\}$.

Clasa a XI-a

Problema 21224* (G.M. 9/1987, pag. 333)

Se consideră șirul $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ *definit prin relația de recurență* $x_n = a\sin x_{n-1} + b\cos x_{n-1}$, $(\forall)\ n \in \mathbf{N}$ *unde* $a, b \in \mathbf{R}$, $a^2 + b^2 < 1$.

Arătați că șirul $(y_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$, $y_n = x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n$, *este convergent și calculați* $\lim\limits_{n\to\infty} y_n$.

Călin Burdușel, profesor, Târgoviște

Soluție: În manualul de Geometrie clasa a IX-a, la pagina 159, se găsește următoarea

Teoremă: *Oricare ar fi numerele reale* x, a, b, $a^2 + b^2 \neq 0$, *există numărul real unic* $\alpha \in [0, 2\pi)$ *astfel ca*

$$a\cos x + b\sin x = \sqrt{a^2+b^2}\sin(x+\alpha).$$

Cum $|\sin(x+\alpha)| \leq 1$, vom avea

$$|a\cos x + b\sin x| \leq \sqrt{a^2+b^2},\ (\forall)\ a, b, x \in \mathbf{R}.$$

Absolut analog se arată că

$$|a\sin x + b\cos x| \leq \sqrt{a^2+b^2},$$

relație conform căreia putem scrie

$$|x_k| = |a\sin x_{k-1} + b\cos x_{k-1}| \leq \sqrt{a^2+b^2},\ (\forall)\ k \in \mathbf{N}^*.$$

Deci $|y_n| = |x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n| = |x_1| \cdot |x_2| \cdot \ldots \cdot |x_n| \leq (\sqrt{a^2+b^2})^n$.

Scanned with OKEN Scanner

Prin urmare $(\forall)\ n \in \mathbf{N}^*,\ |y_n| \leqslant (a^2 + b^2)^{\frac{n}{2}}$.

Întrucît $\lim_{n\to\infty} (a^2 + b^2)^{\frac{n}{2}} = 0$ (potrivit ipotezei $a^2 + b^2 < 1$) și conform cu un criteriu suficient de convergență a șirurilor (majorării, comparației), rezultă că șirul $(y_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ este convergent la zero.

Clasa a XII-a

Problema 21231* (G.M. 9/1987, pag. 334)
Să se afle partea întreagă a numărului real:

$$A = \pi \cdot \int_{\frac{\sqrt{3}}{3}}^{1} \frac{x}{\operatorname{arctg} x}\, dx.$$

Willy Portal, Galați

Soluție. Fie $f: \left[\frac{\sqrt{3}}{3}, 1\right] \to \mathbf{R}$, $f(x) = \frac{x}{\operatorname{arctg} x}$. Vom arăta că f este crescătoare și convexă pe $\left[\frac{\sqrt{3}}{3}, 1\right]$. Avem:

$$f'(x) = \frac{\operatorname{arctg} x - \frac{x}{1+x^2}}{\operatorname{arctg}^2 x}.$$

Dar $g(x) = \operatorname{arctg} x - \frac{x}{1+x^2} > 0$ pentru $x > 0$ deoarece $g(0) = 0$ și $g'(x) = \frac{2x^2}{(1+x^2)^2} > 0$. Am obținut că $f'(x) > 0$ pentru $x > 0$, deci funcția f este crescătoare pe $\left[\frac{\sqrt{3}}{3}, 1\right]$.
Calculînd derivata a II-a a funcției f obținem:

$$f''(x) = \frac{2x - 2\operatorname{arctg} x}{(1+x^2)^2 \operatorname{arctg}^3 x}.$$

Dar $h(x) = x - \operatorname{arctg} x > 0$ pentru $x > 0$ deoarece $h(0) = 0$ și $h'(x) = \frac{x^2}{1+x^2} > 0$. Deci $f''(x) > 0$ pentru $x > 0$ și funcția f este convexă pe $\left[\frac{\sqrt{3}}{3}, 1\right]$. Se știe că dacă o funcție continuă f este crescătoare și convexă pe $[a, b]$ atunci:

$$(b-a)f(a) < \int_a^b f(x)\, dx < (b-a) \cdot \frac{f(a) + f(b)}{2}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Aplicînd acest rezultat pentru $f(x) = \frac{x}{\operatorname{arctg} x}$, $f: \left[\frac{\sqrt{3}}{3}, 1\right] \to \mathbf{R}$, avem:

$$\left(1 - \frac{\sqrt{3}}{3}\right) f\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) < \int_{\frac{\sqrt{3}}{3}}^{1} f(x)\,dx < \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{3}\right) \frac{f\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) + f(1)}{2},$$

sau

$$\frac{3 - \sqrt{3}}{3} \cdot \frac{2\sqrt{3}}{\pi} < \int_{\frac{\sqrt{3}}{3}}^{1} \frac{x}{\operatorname{arctg} x}\,dx < \frac{3 - \sqrt{3}}{3} \cdot \frac{\frac{2\sqrt{3}}{\pi} + \frac{4}{\pi}}{2},$$

sau

$$2(\sqrt{3} - 1) < \pi \int_{\frac{\sqrt{3}}{3}}^{1} \frac{x}{\operatorname{arctg} x}\,dx < \frac{3 + \sqrt{3}}{3}.$$

Rezultă că $\left[\pi \int_{\frac{\sqrt{3}}{3}}^{1} \frac{x}{\operatorname{arctg} x}\,dx\right] = 1.$

PROBLEME PENTRU CICLUL PRIMAR

57. Să se determine numerele care împărțite la 8 să dea cîtul 6.

Octavian Draja, elev, Arad

58. Care este cel mai mare număr de trei cifre distincte astfel ca cifra unităților să fie de trei ori mai mică decît cifra sutelor?

Bogdan Blaga, elev, Arad

59. Calculați x din egalitatea:

$$\{[(x + 2) \cdot 2 + 2] \cdot 2 + 2\} \cdot 2 + 2 = 30.$$

Bogdan Blaga, elev, Arad

60. S-au cumpărat 13 kg făină ambalată în pungi de 2,5 kg și 1,5 kg. Cîte pungi au fost de fiecare fel?

* * *

61. Să se determine trei numere naturale consecutive știind că suma lor este cu 37 mai mare decît numărul cel mai mic.

* * *

Scanned with OKEN Scanner

62. Determinați numerele naturale m și n știind că $m \cdot n \cdot (m+n) = 8602$.

* * *

63. Determinați numerele naturale x, y, z știind că:

$$7x + 5y - z = 8 \text{ și } y + z = 11.$$

* * *

64. Fie numerele $a = 1001$, $b = 2002$, $c = 3003$.

Să se calculeze: $a + b - c$; $b + c - a$; $c + a - b$.

* * *

PROBLEME PENTRU GIMNAZIU

Clasa a V-a

E : 9491. La un meci de fotbal s-au înscris 5 goluri. Primul cu 12 minute înaintea celui de-al 3-lea, al doilea la 1|3 din timpul dintre primul și al 3-lea, iar al patrulea cu 4|9 din durata partidei, după al 3-lea. Aflați minutele în care s-a înscris știind că durata partidei este 90 minute, suma minutelor în care s-a înscris este 306, iar golurile s-au înscris în minute diferite.

Petru Nistor, Șiria, Arad

E : 9492*. Să se afle ultima cifră a numărului

$$N = 1^{1988} + 2^{1988} + 3^{1988} + \ldots + 1987^{1988} + 1988^{1988}.$$

Alfred Eckstein, Șiria, Arad

E : 9493. Se dau mulțimile:

$$A = \left\{ x \in \mathbf{N} \,\middle|\, x = \frac{9}{2n+1},\ n \in \mathbf{N} \right\};$$

$$B = \{ y \in \mathbf{N} \mid y = x^2,\ x \in A \};$$

$$C = \{ z \in \mathbf{N} \mid z = 3^n,\ n \in \mathbf{N},\ n < 3 \}.$$

Să se verifice următoarele egalități:

1) $A - (B - C) = A$;

2) $(A \cup B) - C = B - (A \cap C)$.

Doina Lorant, profesoară, Arad

Scanned with OKEN Scanner

E : 9494*. Demonstrați egalitatea :

$$444444444444445^2 + 111111111111111 - 444444444444444^2 = 10^{15}.$$

* * *

E : 9495*. Se consideră p un număr de două cifre scris în baza 10 și afirmațiile :

a) $p : 5$; b) $p : 23$; c) $p + 7$ este pătrat perfect;

d) $p - 10$ este pătrat perfect.

Să se determine numărul p știind că două afirmații sînt adevărate și două false.

* * *

E : 9496. Calculați :

$$3\frac{1}{117} \cdot 4\frac{1}{119} - 1\frac{116}{117} \cdot 5\frac{118}{119} - \frac{5}{119}.$$

* * *

Clasa a VI-a

E : 9497*. În interiorul segmentului AB se iau punctele M și N astfel ca $M \in (AN)$. Construim pătratele de laturi AM și MB de aceeași parte a dreptei AB și pătratele de laturi BN și NA de cealaltă parte a ei. Dacă O_1, O_2, O_3, O_4 sînt centrele acestor pătrate, în ordinea dată, să se arate că patrulaterul $O_1O_2O_3O_4$ este ortodiagonal și cu diagonalele congruente. În ce caz acest patrulater este un pătrat?

Emilian Secoșan, Lipova, Arad

E : 9498*. Știind că dintr-un gram de sămînță pentru viermii de mătase se obțin 3 kg gogoși dacă consumă circa 40 kg frunze de dud, că într-un kilogram de gogoși se numără circa 300 bucăți gogoși și că din fiecare gogoașă rezultă în medie 850 m fire de mătase, să se afle :

a) Cîți km de fire se obțin din 25 grame sămînță?

b) Dacă dintr-un dud se pot culege 145 kg de frunze, ar ajunge 9 duzi pentru hrănirea viermilor care se dezvoltă din 25 g de sămînță?

c) Cîte gogoși pot realiza un fir de mătase de lungimea ecuatorului pămîntesc?

Alina Surdu, Lipova, Arad

E : 9499. Demonstrați că pătratul sumei pătratelor a două numere consecutive se poate descompune într-o sumă de două pătrate, numere prime între ele.

Aurora Tomuș, profesoară, Arad

E : 9500*. Aflați ultima cifră a numărului :

$$P = (-1)^{1981} + (-2)^{1982} + (-3)^{1983} + \ldots + (-9)^{1989}.$$

Teodor Ciutina, profesor, Arad

Scanned with OKEN Scanner

E : 9501. Distanța între două orașe este de 432 km. La ora 7 și 30 minute din orașul A pleacă spre B un camion cu viteza de 48 km/h, iar la ora 8 tot din A spre B pleacă un autoturism cu viteza de 72 km/h.

a) La ce oră depășește autoturismul camionul?

b) La ce oră punctul ce marchează 2/3 din distanța dintre A și B se află la jumătatea distanței dintre autoturism și camion?

Petru Nistor, Șiria, Arad

E : 9502. Fie $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ numere raționale nenule $(n > 3)$ cu proprietatea că a_k este medie proporțională între a_{k-1} și a_{k+1} pentru orice k, $2 \leqslant k \leqslant n-1$ și $a_1 = a_n$. Atunci $a_1 = a_2 = a_3 = \ldots = a_n$.

Ion Diaconu, profesor, Piatra Neamț

Clasa a VII-a

E : 9503*. Pe laturile BC, CA, AB ale triunghiului ABC se construiesc în exteriorul triunghiului (sau spre interiorul lui) pătrate având centrele respectiv în O_1, O_2, O_3. Să se arate că triunghiurile ABC și $O_1O_2O_3$ au același centru de greutate, iar proprietatea rămîne adevărată și cînd punctele A, B, C sînt coliniare.

Emilian Secoșan, Lipova

E : 9504*. Se dă un triunghi isoscel ABC cu $AB = AC$ și M un punct variabil pe latura BC. Fie N și P proiecțiile lui M pe laturile AB, respectiv AC. Să se determine poziția punctului M astfel încît aria triunghiului MNP să fie maximă.

Ion Gheorghe, profesor, Arad

E : 9505*. Să se demonstreze că unul și numai unul din numerele $2^{2n+1} + 2^{n+1} + 1$ și $2^{2n+1} - 2^{n+1} + 1$ se divide cu 5, $(\forall)\ n \in \mathbf{N}$.

Ioan Cașu, elev, Arad

E : 9506. Să se arate că $(\forall)\ x \in \mathbf{R}$, $x \geqslant 1$, avem

$$\sqrt{\frac{x + \sqrt{x^2 - 1}}{x - \sqrt{x^2 - 1}}} + \sqrt{\frac{x - \sqrt{x^2 - 1}}{x + \sqrt{x^2 - 1}}} = 2x.$$

Să se considere cazurile $x = 2, 3, 4, 5$.

Eugen Hălmăgean, profesor, Arad

E : 9507. Un număr natural împărțit la 8 dă cîtul q și restul r, iar împărțit la $(q + r)$ dă cîtul r și restul 1. Să se afle numărul.

Teodor Ciutina, profesor, Arad

Scanned with OKEN Scanner

E : 9508. Graficul unei funcții liniare care trece prin punctul $A(-2; 0)$ intersectează paralela la Oy prin $B(3; 0)$ în punctul C.

Știind că aria triunghiului ABC este 20, să se afle funcția liniară. Discuție.

Petru Nistor, profesor, Șiria, Arad

Clasa a VIII-a

E : 9509. Să se arate că :

a) Dacă $ABCD$ este un tetraedru cu $AD \perp CD$, $BC \perp CD$ și M este un punct mobil pe (AB), iar N este proiecția lui M pe CD, atunci $N \in (CD)$ și $\frac{AM}{MB} = \frac{DN}{NC}$;

b) Reciproc, dacă $M \in AB$ și $N \in CD$ iar $\frac{AM}{MB} = \frac{DN}{NC}$, atunci N este proiecția lui M pe CD.

Emilian Secoșan, Lipova

E : 9510*. Fie piramida $SABCD$ cu baza pătrat și fețele laterale triunghiuri echilaterale de latură a.

Să se determine pe muchia SB punctul M astfel încît planul (ADM) să determine în piramidă două poliedre ale căror volume să fie în raportul $\frac{3}{}$ (la numărător fiind volumul poliedrului ce conține vîrful S).

Octavia Hoară, profesoară, Arad

E : 9511. Aria totală a unui con circular drept este 24π (cm^2) iar volumul său este de 12π (cm^3). Să se determine raza, înălțimea și generatoarea conului.

Eugen Hălmăgean, profesor, Arad

E : 9512*. Baza piramidei $VABCDEF$ este hexagonul regulat $ABCDEF$ de latură a, iar piciorul perpendicularei din V pe planul (ABC) este $\{G\} = BC \cap ED$. Știind că $\widehat{OVG} = 30°$, unde O este centrul cercului circumscris hexagonului, să se calculeze :

a) $3 \operatorname{tg} \widehat{VOG} + 2 \operatorname{ctg} \widehat{VBG}$, unde $\{R\} = GO \cap DC$;

b) Aria laterală a piramidei $VABGEF$;

c) Volumul piramidei $VABGEF$.

E : 9513. Să se rezolve în R ecuația :

$$\left[\frac{2x^3 + 2x^2 + 2x + 1}{x^2 + 1}\right] = x + 3,$$

unde prin $[x]$ se înțelege partea întreagă a numărului real x.

Gheorghe Ion, profesor, Arad

Scanned with OKEN Scanner

E : 9514*. Fie $ABCDA'B'C'D'$ un cub cu muchia de lungime a și M un punct variabil pe muchia AB, N un punct variabil pe muchia AD, astfel încît $AM = DN$, iar P un punct variabil din planul $A'B'C'$. Să se determine volumul maxim pe care-l poate avea tetraedrul $MNPA$.

Gheorghe Iov, profesor, Arad

PROBLEME PRELIMINARE DE TIP O.I.M. PENTRU ELEVII DIN GIMNAZIU

O.G : 77. Numărul $7^{2281} - 2$ este număr prim?

* * *

O.G : 78. Determinați 11 numere naturale distincte $x_1, x_2, \ldots, x_{10}, y$ astfel încît :

$$x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_{10}^2 = y^2.$$

Liviu Pîrșan

PROBLEME PENTRU LICEU

Clasa a IX-a

21513. Fie M un punct mobil pe cercul circumscris triunghiului echilateral ABC de latură a. Dacă $AB \cap MC = \{D\}$, N este mijlocul arcului $\widehat{BC}$, iar $DE \cap MN = \{L\}$, $AC \cap MB = \{E\}$, să se arate că :

1) Dreapta DE trece printr-un punct fix ;

2) $EM \cdot BE = CM \cdot CD = a^2$;

3) $ED \cdot CE = a^2$; $\dfrac{BD}{CE} = \dfrac{EF^2}{FD^2}$;

4) $\dfrac{LB^2}{LC^2} = \dfrac{BD}{CE} = \dfrac{LD}{LE}$;

5) $LF^2 = LD \cdot LE$;

6) $ME \cdot MD = MA^2$.

Emilian Secoșan, profesor, Lipova

21514. Dacă $2a + 3b + 6c = 0$, $a, b, c \in \mathbb{R}$, atunci ecuația $ax^2 + bx + c = 0$ are cel puțin o rădăcină în intervalul $(0, 1)$.

Andrei Peter, profesor, Arad

Scanned with OKEN Scanner

21515*. Să se rezolve în $\mathbb{R}$ sistemul:

$$\begin{cases} ax_1 - bx_2^2 = c \\ ax_2 - bx_3^2 = c \\ ax_3 - bx_4^2 = c \\ \dots\dots\dots\dots \\ ax_{n-1} - bx_n^2 = c \\ ax_n - bx_1^2 = c, \end{cases}$$

unde $a, b, c > 0$.

Ioan Crișan, profesor, Arad

21516. În paralelogramul $ABCD$ $(AB > AD)$, o semidreaptă din D intersectează dreptele AC, AB, CB respectiv în E, F, G.

a) Dacă se cunosc lungimile $AD = a$, $EF = m$, $FG = n$, ce relație trebuie să existe între aceste lungimi astfel încît triunghiul ADE să fie isoscel cu baza AE?

b) Cu segmentele de lungimi a, m, n să se construiască triunghiurile în care are loc relația de la punctul a). (Se va preciza numărul și forma acestor triunghiuri).

Vasile Dunca, profesor, Arad

21517. Într-un triunghi ascuțitunghic ABC se consideră mijloacele D și E ale laturilor (AC), respectiv (BC). Să se demonstreze că perpendicularele în D pe BD, respectiv în A pe DE concură pe înălțimea din B a triunghiului ABC dacă și numai dacă are loc relația $2BC^2 = 2AB^2 + AC^2$.

Ioan Cașu, elev, Arad

21518*. Fie ABC un triunghi în care $a \leqslant b \leqslant c$, unde $a = BC$, $b = AC$ și $c = AB$. Atunci

$$\max\{h_a, h_b, h_c\} \geqslant \min\{m_a, m_b, m_c\}$$ dacă și numai dacă $\frac{\pi}{3} \leqslant \mu(\hat{C}) < \frac{5\pi}{6}$,

unde h_a, h_b, h_c și respectiv m_a, m_b, m_c reprezintă lungimile înălțimilor, respectiv medianelor, din vîrfurile A, B și C.

Virgil Nicula, profesor, București

21519*. Fie triunghiul ABC cu punctele B și C fixe și punctul A mobil astfel încît $m(\widehat{BAC}) = \text{const.}$ Să se determine:

1) Locul geometric al punctului de intersecție dintre bisectoarea interioară a unghiului $\widehat{BAC}$ și mediatoarea laturii (AC);

2) Locul geometric al punctului de intersecție dintre bisectoarea interioară a unghiului $\widehat{BAC}$ și linia mijlocie corespunzătoare laturii (AB).

Constantin Toma, inginer, București

Clasa a X-a

21520*. Fie ABC un triunghi isoscel cu $AB = AC$ și A', B', C' punctele de tangență ale cercului înscris cu dreptele BC, AC, respectiv AB. Notăm cu r raza cercului înscris și cu Γ punctul lui *Gergonne*, adică intersecția dreptelor AA', BB', CC'. Să se demonstreze că:

a) $r \geqslant \dfrac{\Gamma A' + \Gamma B' + \Gamma C'}{3}$;

b) $r \geqslant \dfrac{\sqrt{\Gamma A'^2 + \Gamma B'^2 + \Gamma C'^2}}{3}$ dacă și numai dacă $m(\hat{A}) \leqslant 60^\circ$.

Flavius Guiaș, elev, Arad

21521. Să se demonstreze că numărul:
$N = 44^{n+3} + 45^{2n+3}$ este divizibil cu 1981, $(\forall)\, n \in \mathbb{N}$.

Aurel Sasu, București

Scanned with OKEN Scanner

21522*. Să se demonstreze că în triunghiul ABC avem:

$$m(\hat{A}) = 3m(\hat{B}) \text{ dacă și numai dacă } c = (a-b)\cdot\sqrt{1+\frac{a}{b}},$$

unde $a = BC$, $b = AC$, $c = AB$.

Andrei Peter, profesor, Arad

21523*. Să se demonstreze că:

$$\sqrt{a_1+\ldots+a_n}+\sqrt{a_2+\ldots+a_n}+\ldots+\sqrt{a_n} \geqslant \sqrt{a_1+4a_2+\ldots+n^2a_n},$$

pentru orice $a_1, a_2, \ldots, a_n$ numere reale pozitive.

Călin Șandru, elev, Arad

21524. Ecuația $x^3 - px^2 + qx - r = 0$ are toate rădăcinile pozitive și satisfăcînd inegalitățile triunghiului. Fie ABC triunghiul avînd drept laturi rădăcinile ecuației considerate. Să se calculeze suma: $\cos\hat{A} + \cos\hat{B} + \cos\hat{C}$.

Andrei Peter, profesor, Arad

21525. Să se demonstreze că în orice triunghi ABC are loc inegalitatea:

$$\frac{a\cdot l_a^2}{p^2(p-a)}+\frac{b\cdot l_b^2}{p^2(p-b)}+\frac{c\cdot l_c^2}{p^2(p-c)} \leqslant 2,$$

unde notațiile sînt cele obișnuite într-un triunghi.

Francz Adalbert, profesor, Arad

21526. Numerele reale $x, y, z, t \in (-1, 1)$ verifică relațiile:

$$\sqrt{1-x}+\sqrt{1-z}=\sqrt{1-y}+\sqrt{1-t} \text{ și } \arccos x + \arccos y + \arccos z + \arccos t = 2\pi.$$

Să se arate că:

$$(\sqrt{1-x^2}+\sqrt{1-y^2}+\sqrt{1-z^2}+\sqrt{1-t^2})^4 = 256(1-x)(1-y)(1-z)(1-t).$$

Ioan Caşu, elev, Arad

Clasa a XI-a

21527*. Să se arate că $\sqrt[n]{7}+\sqrt[n]{4} > 2\sqrt[n]{5}$, unde $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$.

L. Panaitopol

21528*. Să se rezolve în numere reale ecuația:

$$(x^n+y^n)^p = (x^p+y^p)^n, \text{ unde } n, p \in \mathbb{N}^*, n \neq p.$$

Nicolae Papacu, profesor, Slobozia

21529. Se dă șirul $(a_n)_{n\geqslant 1}$ definit astfel:

$$a_1 = \alpha > 0, \quad a_{n+1} = \frac{(n+1)^{n+1}}{[(n+1)!]^2}\, a_n.$$

Să se arate că șirul $(a_n)_{n\geqslant 1}$ este convergent și să i se calculeze limita. Să se calculeze apoi limita șirului $\left(\frac{1}{n\cdot a_n}\right)_{n\geqslant 1}$.

Călin Șandru, elev, Arad

21530. Fie A o matrice pătratică de ordinul $n (n > 2)$ cu elemente din mulțimea numerelor complexe.
Să se arate că dacă toți minorii de ordinul k, $k < n$, sînt egali, atunci toți minorii de ordin mai mare decît k sînt nuli.

(Generalizare a problemei 19070 din G.M. 1/1982).

Oraţiu Hoară, profesor, Arad

21531. Să se determine polinoamele $P \in \mathbb{C}[X]$, nenule, cu proprietatea:

$$P(\det A) = \det (P(A)), \ (\forall) A \in M_n(\mathbb{C}), \text{ cu } n \in \mathbb{N}^* \text{ fixat.}$$

Flaviu Gutaș, elev, Arad

21532. Să se arate că pentru $\alpha \leqslant 1$, limita:

$$\lim_{n \to \infty} n^{\alpha} \cdot \left(\frac{\pi^2}{6} - 1 - \frac{1}{2^2} - \ldots - \frac{1}{n^2} \right)$$

există și este finită. În plus, avem:
a) Pentru $\alpha < 1$, limita este egală cu zero.
b) Pentru $\alpha = 1$, limita este cuprinsă între 0 și $\frac{\pi^2}{4}$.

Ovidiu Călin, elev, București

21533*. Fie $a, b, c \in \mathbb{R}$, nenule. Să se rezolve sistemul

$$\begin{cases} bxy + cxz - a(y^2 + z^2) = 0, \\ cyz + ayx - b(z^2 + x^2) = 0, \\ azx + bzy - c(x^2 + y^2) = 0, \end{cases}$$

cu necunoscutele $x, y, z \in \mathbb{R}$.

Acad. *Caius Iacob*

Clasa a XII-a

21534. Să se calculeze:

$$\int_0^1 (2t - 1)^{2n+1} \cdot e^{t-t^2} \, dt, \text{ unde } n \in \mathbb{N}.$$

* * *

21535. Să se calculeze

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{x \sin x \cos x}{3^x + 1} \, dx.$$

* * *

21536*. Se consideră următoarele mulțimi de matrici

$$K_0 = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & a \end{pmatrix} \middle| \ a, b \in \mathbb{Z}_2 \right\}, \quad K_1 = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} \middle| \ a, b \in \mathbb{Z}_2 \right\}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Să se demonstreze:
(1) K_0 și K_1 sînt inele comutative față de adunarea și înmulțirea uzuală a matricilor;
(2) K_0 și K_1 sînt inele izomorfe;
(3) K_0 nu este izomorf cu inelul $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$.

Toma Albu, lector, București

21537*. Fie A un inel unitar și $k \in \mathbb{N}^*$. Dacă $x^{3 \cdot 2^k} = x$ pentru orice $x \in A$, atunci $x^3 = x$ pentru orice $x \in A$.

Radu Gramatovici, elev, București

21538*. Fie $f : [0, 2] \to \mathbb{R}$ o funcție continuă pe $[0, 2]$, derivabilă pe $(0, 2)$, verificînd condițiile:

1) $|f'(x)| \leqslant 1$, $(\forall)\, x \in (0, 2)$;

2) $f(0) = f(2) = a$, $a \in \mathbb{R}$.

Să se arate că:

$$2a - 1 \leqslant \int_0^2 f(x)\,dx \leqslant 2a + 1.$$

Marcel Chiriță, profesor, București

21539. Fie $a > 1$ fixat. Să se calculeze limita:

$$\lim_{n \to \infty} \left(\int_0^a \sqrt[n]{x^n + 1}\,dx + \int_1^a \sqrt[n]{x^n - 1}\,dx \right).$$

Flavius Guiaș, elev, Arad

21540. Să se demonstreze că dacă $(a, n) = d > 1$ și $d \mid b$ atunci ecuația $\hat{a} \cdot \hat{x} = \hat{b}$ are d rădăcini în $\mathbb{Z}_n$.

Teodor Bulboacă, profesor, Arad

PROBLEME PREGĂTITOARE PENTRU O.I.M. ȘI O.B.M.

O : 557. (i) Arătați că pentru orice $n \geqslant 3$ există o infinitate de matrici pătratice de ordin n, formate din elemente numere prime distincte, care au determinantul egal cu 0.

(ii) Arătați că există o infinitate de matrici pătratice formate numai din elemente numere prime distincte care au determinantul diferit de 0.

Nicolae Popescu, Ion Savu

O : 558. Se consideră un pătrat de latură n ($n \geqslant 2$, natural) împărțit în n^2 pătrate de latură 1. Să se arate că dacă n este număr par atunci putem completa cele n^2 pătrățele cu numerele 1 și -1 astfel încît produsul numerelor din vecinii fiecărui pătrățel să fie egal cu -1.
Rămîne afirmația adevărată dacă n este număr impar?
(Două pătrățele se numesc vecine dacă au o latură comună).

Flavius Guiaș, elev, Arad

O : 559. În interiorul unui cerc de rază 1 se găsesc cercurile $\mathcal{C}_i(O_i, r_i)$, $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Să se arate că dacă $\sum_{i=1}^{n} r_i \geqslant k$, $k \in \mathbb{N}^*$, atunci există o dreaptă care intersectează cel puțin k dintre n cercuri.

Florin Vulpescu-Jalea, profesor, București

Scanned with OKEN Scanner

PROBLEME PENTRU CONCURSUL ANUAL AL REZOLVITORILOR

Clasele a IX-a și a X-a

C: 809. Fiind date numerele raționale $a_0, a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{Q}$, cu $a_3 \neq 0$, notăm:

$$f(a_0, a_1, a_2, a_3) = \frac{a_0 + a_1 \sin\frac{2\pi}{5} + a_2 \sin\frac{4\pi}{5} + a_3 \sin\frac{6\pi}{5}}{a_0 + a_1 \cos\frac{2\pi}{5} + a_2 \cos\frac{4\pi}{5} + a_3 \cos\frac{6\pi}{5}}.$$

Să se arate că $(\forall)\ \alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{Q}$, cu $\alpha_3 \neq 0$, există $\beta_0, \beta_1, \beta_2, \beta_3 \in \mathbb{Q}$ astfel încît:

$$(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \neq (\beta_0, \beta_1, \beta_2, \beta_3) \text{ și } f(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = f(\beta_0, \beta_1, \beta_2, \beta_3).$$

Elena Tomuța, elevă, Arad

C: 810. Să se arate că oricare ar fi punctul M în planul triunghiului ABC, necoliniar cu oricare două vîrfuri, triunghiul format de centrele de greutate ale triunghiurilor MAB, MBC, MAC este asemenea cu triunghiul ABC, raportul de asemănare fiind egal cu 1/3.

Orațiu Hoară, profesor, Arad

C: 811. Fie O un punct în interiorul triunghiului ABC. Înscriem în triunghi un paralelogram mobil care să aibă două vîrfuri pe latura $[BC]$, două laturi paralele cu ceviana AO, iar celelalte două vîrfuri pe $[AB]$, respectiv $[AC]$. Considerăm și paralelogramele analoage, corespunzătoare cevienelor BO și CO.

Să se găsească locurile geometrice ale centrelor acestor paralelograme și să se arate că ele au un punct comun. Care sînt pozițiile pentru care ele au aria maximă?

Emilian Șecoșan, Lipova

C: 812. Fie $z_i \in \mathbb{C}$, $i = 1, 2, \ldots, n$, numere complexe nenule.
Să se demonstreze că numărul:

$$E = \frac{z_1}{|z_1|} + \frac{z_2}{|z_2|} + \ldots + \frac{z_n}{|z_n|} + \frac{|z_1|}{z_1} + \frac{|z_2|}{z_2} + \ldots + \frac{|z_n|}{z_n}$$

este real și să se arate că există $a_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, 2, \ldots, n$ și $b \in \mathbb{R}$ astfel încît $z_1^n + z_2^n + \ldots + z_n^n = a_1 z_1 + a_2 z_2 + \ldots + a_n z_n + b$.

Aurel Sasu, profesor, Ineu

Clasele a XI-a și a XII-a

C: 813. Notăm cu $\mathrm{Aut}(G)$ mulțimea automorfismelor unui grup $(G, \cdot)$ și cu $\mathrm{Aut}'(G)$ mulțimea antiautomorfismelor sale. (Se numește antiautomorfism o aplicație bijectivă $f : G \to G$ cu proprietatea $f(xy) = f(y) \cdot f(x)$, $(\forall) x, y \in G$).

a) Dacă notăm $M = \mathrm{Aut}(G) \cup \mathrm{Aut}'(G)$, atunci $(M, \circ)$ este grup, în care $(\mathrm{Aut}\, G, \circ)$ este subgrup normal;

b) Dacă $(G, \cdot)$ este finit și ordinul lui M este impar, atunci grupul $(G, \cdot)$ este abelian.

Dana Nicolau, elevă, București

C: 814. Să se determine locul geometric al punctelor M din planul triunghiului ABC care satisfac egalitatea:

$$\sum MA^3 \sin 2A = k \text{ (constant)}.$$

L. Panaitopol, lector univ., București

Scanned with OKEN Scanner

C: 815. Fie $\alpha \in \mathbf{R}$ și $f, g: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ două funcții cu proprietățile:

1) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{f(k)}{n^\alpha} = 0$, $(\forall) k \in \{1, 2, \ldots, n\}$;

2) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{g(x)}{x}$ există și este egală cu $a \in \mathbf{R}$;

3) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sum\limits_{k=1}^{n} f(k)}{n^\alpha}$ există și este egală cu $b \in \mathbf{R}$.

Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} \prod\limits_{k=1}^{n} \left(1 + g\left(\dfrac{f(k)}{n}\right)\right)$.

Norocel Munteanu, student, București

C: 816. Fie $p > 0$ un număr prim și n un număr întreg. Se consideră mulțimea de matrici:

$$K = \left\{ \begin{pmatrix} a & nb \\ b & a \end{pmatrix} \middle| \, a, b \in \mathbf{Z}_p \right\}.$$

Să se demonstreze echivalența următoarelor afirmații:

(1) K este corp comutativ față de adunarea și înmulțirea uzuală a matricilor;

(2) p este impar și $n^{\frac{p-1}{2}} \equiv -1 \pmod p$;

(3) $\begin{pmatrix} a & nb \\ b & a \end{pmatrix}^{p+1} = \begin{pmatrix} a^2 - nb^2 & \hat{0} \\ \hat{0} & a^2 - nb^2 \end{pmatrix}$ pentru orice $a, b \in \mathbf{Z}_p$.

(În legătură cu o problemă dată la Olimpiada de Matematică, Faza pe țară, 1985).

Toma Albu, București

PROBLEME DE INFORMATICĂ

I: 339. Se consideră (x_i, y_i), $i = \overline{1,10000}$ coordonatele unui număr de 10 mii de puncte ce determină o linie poligonală închisă raportată la un sistem de axe cartezian XOY, punctele fiind date în sens invers celui trigonometric. Știind că aria suprafeței determinată de linia poligonală este dată de formula

$$S = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} (x_i y_{i+1} - x_{i+1} y_i), \quad x_{n+1} = x_1, \; y_{n+1} = y_1, \; n = 10000,$$

să se precizeze dificultățile ce apar la determinarea cu calculatorul electronic a valorii lui S. Să se elaboreze un program FORTRAN sau BASIC pentru calculul lui S în cazul în care coordonatele sînt valide și se află într-un fișier.

M. Vlcda, cercetător, București

I: 340. Vom numi funcție ε-negativă, respectiv ε-pozitivă, o funcție $f: [A, B] \to \mathbf{R}$, continuă, pentru care există o diviziune $\Delta = (x_0, x_1, \ldots, x_n)$ a intervalului $[A, B]$ cu $\|\Delta\| \leq \varepsilon$ astfel încît $f(x_k) < 0$, respectiv $f(x_k) > 0$, $(\forall) k \in \{0, \ldots, n\}$. Utilizînd un program BASIC să se cerceteze ε-semnul funcției

$$f(x) = \cos\left(\frac{e^x + x^2 + \sin x}{\ln x + 5x - \operatorname{arctg} x}\right)$$

pentru: a) $f: [3, 4] \to \mathbf{R}$, $\varepsilon = 0,1$ și b) $f: [1, 5] \to \mathbf{R}$, $\varepsilon = 0,1$.

Silviu Stossel, profesor, București

I. P. „Informația" c. 2382

Index 41 601

Lei 3,50

Scanned with OKEN Scanner

ISSN 0016–5441

SOCIETATEA DE ȘTIINȚE MATEMATICE
DIN REPUBLICA SOCIALISTĂ ROMÂNIA

GAZETA MATEMATICĂ

PUBLICAȚIE LUNARĂ PENTRU TINERET

9

DIN CUPRINS:

- CONSTRUCȚII ELEMENTARE DE INELE ȘI CORPURI
- UNELE CONSIDERAȚII METODICE ASUPRA TEOREMELOR DE MEDIE
- CONCURSUL DE MATEMATICĂ PENTRU GIMNAZIU, ETAPA PE ȚARĂ, BRAȘOV, 1988
- BARAJELE PENTRU ALCĂTUIREA ECHIPEI OLIMPICE A ROMÂNIEI
- PROBLEME REZOLVATE PENTRU GIMNAZIU ȘI LICEU
- PROBLEME PENTRU CICLUL PRIMAR, GIMNAZIU, PRELIMINARE DE TIP O.I.M. PENTRU GIMNAZIU, PENTRU LICEU, PREGĂTITOARE PENTRU O.I.M. ȘI O.B.M., PENTRU CONCURSUL ANUAL AL REZOLVITORILOR
- CONCURSUL DE INFORMATICĂ, ETAPA PE ȚARĂ, BUCUREȘTI, 1988
- RUBRICA REZOLVITORILOR DE PROBLEME

ANUL XCIII nr. 9/1988

Scanned with OKEN Scanner

GAZETA MATEMATICĂ

SUMARUL

1. Construcţii elementare de inele şi corpuri (II), de *Toma Albu* 337
2. Unele consideraţii metodice asupra teoremelor de medie, de *Ştefan Kadar* 347
3. Soluţiile problemelor date la Concursul de matematică pentru gimnaziu, etapa finală (pe ţară), Braşov, 1988 (II), de *N. Teodorescu, I. Mitrache, L. Pîrşan, P. Radovici-Mărculescu* . . . 349
4. Barajele de la Craiova pentru alcătuirea echipei R. S. România, participantă la Olimpiada Internaţională de Matematică din Australia, iulie 1988 355
5. Probleme rezolvate pentru gimnaziu (E: 9253, E: 9256, E : 9234 E : 9235, E : 9240, E : 9244, E : 9224) 356
6. Probleme rezolvate pentru liceu (21200, 21211, 21240, 21220, 21256) 361
7. Probleme pentru ciclul primar (65—72) 366
8. Probleme pentru gimnaziu (E : 9515—E : 9538) 367
9. Probleme preliminare de tip O.I.M. pentru elevii din gimnaziu (O.G : 79, 80) 370
10. Probleme pentru liceu (21541—21568) 371
11. Probleme pregătitoare pentru O.I.M. şi O.B.M. (O : 560—O : 562) 375
12. Probleme pentru Concursul anual al rezolvitorilor (C: 817—C: 824) 375
13. Concursul de informatică, etapa pe ţară, Bucureşti, aprilie 1988 377
14. Rubrica rezolvitorilor de probleme 382

ANUL XCIII | 9 | 1988

COMITETUL DE REDACŢIE

Lector univ. Dumitru Acu, Sibiu : lector univ. Toma Albu; lector univ. Horea Banea, Braşov ; lector univ. Octavian Băsceă; conf. univ. Dan Brânzei, Iaşi ; prof. Constantin Cărbunaru; prof. Marcel Chiriţă; prof. Pal Dalyay, Tg. Mureş ; lector univ. Inocenţiu Drăghiceseu; prof. Ioana Drăghici; înv. Alexandrina Dumitru; prof. Ilie Gheorghiă; prof. Adrian Ghioca, Sinaia; cercetător principal Gheorghe Gussi; lector univ. Stere Ianuş; prof. Ştefan Kadar, Baia-Mare ; lector univ. Constantin Niţă; prof. univ. Arpad Pal, Cluj-Napoca ; lector univ. Laurenţiu Panaitopol; prof. Olimpia Popescu, Ploieşti ; matem. Paul Radovici-Mărculescu; lector univ. Gheorghe Sireţchi; lector univ. Ioan Tomescu ; prof. Florin Vulpescu-Jalea.

REDACŢIA GAZETEI MATEMATICE

Redactor şef (delegat) : Acad. N. Teodorescu; redactori principali : prof. Ilie Iliescu, prof. Liviu Pîrşan, prof. Marcel Ţena; redactori principali onorifici : prof. C. Ionescu-Ţiu, asist. univ. Elferie Rogai; redactori : prof. Liliana Balaci, prof. Alexandru Constantinescu.

Responsabil de număr : Prof. Liliana Balaci

ADRESA REDACŢIEI GAZETEI MATEMATICE

Str. Academiei nr. 14, tel. 14.46.53 — Bucureşti, 1, cod. 79543

Cititorii din străinătate se pot abona prin ROMPRESFILATELIA, sectorul Export-Import-Presă, Calea Griviţiei nr. 64—66, P.O. Box 12—201, Telex 1 0376 Prsfir, Bucureşti, ROMÂNIA.

Scanned with OKEN Scanner

GAZETA MATEMATICĂ

PUBLICAȚIE LUNARĂ PENTRU TINERET

Anul XCIII nr. 9 Septembrie 1988

CONSTRUCȚII ELEMENTARE DE INELE ȘI CORPURI (II) *

de Toma Albu

§.2. A-ALGEBRE. POLINOMUL MINIMAL AL UNUI ELEMENT ALGEBRIC DINTR-O K-ALGEBRĂ (K CORP)

Noțiunea de A-algebră oferă cadrul cel mai adecvat diverselor construcții de inele și corpuri, motiv pentru care am considerat oportun să includem această noțiune, pe cît de simplă, pe atît de importantă în paragraful de față, alături de noțiunile de bază aferente: element algebric al unei A-algebre, A-subalgebră generată de un element, polinom minimal al unui element algebric etc.

Dacă K este un corp comutativ, B este o K-algebră și u este un element din B, algebric peste K, se arată că K-subalgebra $K[u]$ a lui B, generată de u, este izomorfă cu K—algebra K_f construită în paragraful precedent, f fiind polinomul minimal al lui u peste K.

Definiție. Fie A un inel comutativ. Se numește A-algebră sau algebră peste inelul A o pereche (B, α), unde B este un inel și $\alpha : A \to B$ este un morfism unitar de inele cu proprietatea $\alpha(a) \cdot b = b \cdot \alpha(a)$, $(\forall) a \in A$, $(\forall) b \in B$; α se numește *morfismul structural* al A—algebrei. Se mai spune că inelul B este o A-algebră via morfismul α. Algebra (B, α) se zice *comutativă* dacă B este un inel comutativ.

Atunci cînd nu este pericol de confuzie și morfismul structural α al unei A-algebre (B, α) este subînțeles, se renunță la scrierea lui α și se spune pe scurt A-algebră B în loc de A-algebra (B, α).

Exemple. 1) Dacă A este un subinel unitar și comutativ al unui inel B astfel încît $a \cdot b = b \cdot a$ pentru orice $a \in A$ și $b \in B$, cu alte cuvinte dacă A este conținut în centrul inelului B, atunci B este o A-algebră, via incluziunea canonică $A \hookrightarrow B$. În particular, orice extindere comutativă a lui A este o A-algebră.

Așa de pildă, $\mathbf{R}$ este o $\mathbf{Q}$-algebră, $\mathbf{C}$ este o $\mathbf{R}$-algebră, $A[X]$ este o A-algebră pentru orice inel comutativ A și A_f este o A-algebră, pentru orice $f \in A[X]$ având coeficientul dominant element inversabil în A.

2) Orice inel A (comutativ sau nu) poate fi considerat în mod unic ca o $\mathbf{Z}$-algebră (verificați!) via morfismul structural $\alpha : \mathbf{Z} \to A$, $\alpha(n) = n \cdot 1$, $n \in \mathbf{Z}$, 1 fiind elementul unitate din A.

3) Fie A un inel comutativ, $n \in \mathbf{N}^*$ și $M_n(A)$ inelul matricilor pătrate de ordin n peste inelul A. Considerăm funcția

$$\delta : A \to M_n(A), \quad \delta(a) = \begin{pmatrix} a & & 0 \\ & a & \\ & & \ddots \\ 0 & & a \end{pmatrix}, \quad a \in A.$$

Este clar că δ este un morfism unitar de inele și că $\delta(a) \cdot U = U \cdot \delta(a)$ pentru orice $a \in A$ și $U \in M_n(A)$. Așadar, $M_n(A)$ este o A-algebră via morfismul δ.

Fie (B, α) o A-algebră și u un element fixat din B. Pentru orice $f = a_n X^n + \ldots + a_1 X + a_0 \in A[X]$ vom nota

$$f(u) = \alpha(a_n)u^n + \ldots + \alpha(a_1) \cdot u + \alpha(a_0).$$

Elementul $f(u) \in B$ se numește *valoarea* lui $f \in A[X]$ în elementul u al A-algebrei (B, α).

De obicei, atunci cînd nu se poate face nici o confuzie, pentru $a \in A$ și $b \in B$, produsul $\alpha(a) \cdot b = b \cdot \alpha(a)$ se notează cu $a \cdot b = b \cdot a$. Cu această convenție, putem scrie

$$f(u) = a_n u^n + \ldots + a_1 u + a_0 \cdot e,$$

unde, pentru a-l distinge de elementul unitate 1 din A, am notat prin e elementul unitate din B.

Ținînd cont că $a \cdot u = u \cdot a$ pentru orice $a \in A$, se deduce imediat (verificați!) că pentru orice $f, g \in A[X]$ avem

$$(f + g)(u) = f(u) + g(u)$$
$$(f \cdot g)(u) = f(u) \cdot g(u),$$

* Urmare din nr. 8/1988

Scanned with OKEN Scanner

cu alte cuvinte, funcția

$$\alpha_u : A[X] \to B,\ \alpha_u(f) = f(u),\ f \in A[X]$$

este un morfism unitar de inele numit *morfismul de evaluare în u* al polinoamelor din $A[X]$. Elementul u se numește *rădăcină* al polinomului f dacă $f(u) = 0$.

În continuare vom folosi notația

$$A[u] = \{f(u) \mid f \in A[X]\}.$$

Așadar, $A[u]$ este exact imaginea $\mathrm{Im}(\alpha_u)$ a funcției α_u. Ținînd cont că α_u este un morfism de inele, rezultă imediat că $A[u]$ este un subinel comutativ al lui B, care are și o structură de A-algebră via morfismul

$$A \to A[u],\ a \mapsto a \cdot e.$$

Acest inel se numește *A-subalgebra lui B generată de elementul* $u \in B$.

Elementul $u \in B$ se numește *transcendent* peste A dacă nu există nici un $f \in A[X]$, $f \neq 0$ cu $f(u) = 0$, cu alte cuvinte, dacă singurul $f \in A[X]$ cu $\alpha_u(f) = 0$ este polinomul nul.
Este ușor de văzut că u este transcendent peste $A \Leftrightarrow$ morfismul α_u este injectiv $\Leftrightarrow \alpha_u$ este un izomorfism de inele.

Elementul $u \in B$ se numește *algebric* peste A dacă nu este transcendent peste A, cu alte cuvinte, dacă există $f \in A[X]$, $f \neq 0$ cu $f(u) = 0$, sau echivalent, dacă morfismul α_u nu este injectiv.

În cele ce urmează, vom presupune că inelul A este un corp comutativ, notat prin K iar (B, α) va desemna o K-algebră fixată. Este ușor de văzut că morfismul structural $\alpha : K \to B$ al acestei K-algebre este injectiv (demonstrați!).

2.1. Propoziție. *Fie $u \in B$ un element algebric peste K și $f \in K[X]$ un polinom nenul de grad minim, astfel încît $f(u) = 0$. Atunci, pentru orice $g \in K[X]$ cu $g(u) = 0$, avem $f \mid g$.*

Demonstrație. Conform teoremei de împărțire cu rest, există $q, r \in K[X]$ astfel încît $g = f \cdot q + r$ și $\deg(r) < \deg(f)$. Avem:

$$0 = g(u) = (f \cdot q + r)(u) = f(u)q(u) + r(u) = r(u).$$

Cum polinomul f are gradul minim printre toate polinoamele nenule din $K[X]$ ce admit pe u ca rădăcină, rezultă că $r = 0$, deci $g = f \cdot q$, adică $f \mid g$.

Dacă $f = a_n X^n + \ldots + a_1 X + a_0$, $a_n \neq 0$, este un polinom ca în 2.1, atunci $a_n^{-1} \cdot f = f_1$ este tot un polinom nenul din $K[X]$, unitar și admițînd rădăcina u. Rezultă că orice alt polinom unitar $f_2 \in K[X]$, de grad n, cu $f_2(u) = 0$, este egal cu f_1, deoarece $f_1 \mid f_2$ și $f_2 \mid f_1$ conform lui 2.1, deci $f_2 = af_1$ cu $a \in K^*$ și $a = 1$ căci f_2 și f_1 sînt unitare. Așadar, are sens următoarea:

Definiție. Fie u un element algebric al unei K-algebre B. Polinomul unitar din $K[X]$ de grad minim care admite pe u ca rădăcină și care este unic determinat de aceste condiții, se numește *polinomul minimal* (peste K) al lui u și se notează $\mathrm{Min}(u, K)$.

2.2. Propoziție. *Fie B o algebră peste corpul comutativ K, $u \in B$ un element algebric peste K, $f = \mathrm{Min}(u, K)$ și $n = \deg(f)$. Atunci:*

(1) Orice element $b \in K[u]$ se poate scrie în mod unic sub forma

$$b = a_0 e + a_1 u + \ldots + a_{n-1} u^{n-1},\ \text{cu } a_i \in K,\ i = \overline{0,\ n-1}.$$

(2) Funcția $\beta : K_f \to K[u]$ definită prin $\beta(g) = g(u)$, $g \in K_f$, stabilește un izomorfism canonic de inele.

(3) $K[u]$ este un domeniu de integritate $\Leftrightarrow K[u]$ este corp $\Leftrightarrow \mathrm{Min}(u, K)$ este un polinom ireductibil.

Demonstrație. (1) Fie $b \in K[u]$; atunci, există $g \in K[X]$ astfel încît $b = g(u)$. Dar, conform teoremei de împărțire cu rest, există $q, r \in K[X]$ cu $g = f \cdot q + r$ și $\deg(r) < n$, deci $g(u) = (f \cdot q + r)(u) = f(u) \cdot q(u) + r(u) = r(u) = a_0 e + a_1 u + \ldots + a_{n-1} u^{n-1}$, dacă $r = a_0 + a_1 X + \ldots + a_{n-1} X^{n-1}$. Presupunem că:

$$b = a_0 e + \ldots + a_{n-1} u^{n-1} = a_0' e + \ldots + a_{n-1}' u^{n-1}.$$

Atunci $(a_0 - a_0')e + \ldots + (a_{n-1} - a_{n-1}')u^{n-1} = 0$, deci u este rădăcină a polinomului $h = (a_0 - a_0') + \ldots + (a_{n-1} - a_{n-1}')X^{n-1} \in K[X]$. Conform definiției lui $\mathrm{Min}(u, K) = f$ rezultă că $h = 0$, de unde deducem unicitatea scrierii lui b.

(2) Funcția β este surjectivă, căci dacă $b \in K[u]$, atunci există $g \in K[X]$ cu $\deg(g) < n$, (adică $g \in K_f$) astfel încît $b = g(u)$, conform punctului (1). Ea este și injectivă deoarece $\beta(g_1) = \beta(g_2)$ implică $g_1(u) = g_2(u)$, deci $(g_1 - g_2)(u) = 0$. Cum $\deg(g_1 - g_2) < n = \deg(f)$, din definiția lui $f = \mathrm{Min}(u, K)$ deducem că $g_1 - g_2 = 0$, adică $g_1 = g_2$. În concluzie, funcția β este bijectivă.

Scanned with OKEN Scanner

Fie $g_1, g_2 \in K_f$; cum $g_1 * g_2$ este restul împărțirii lui $g_1 \cdot g_2$ la f, rezultă că există $q \in K[X]$ astfel încît

$$g_1 \cdot g_2 = f \cdot q + g_1 * g_2.$$

Deci

$$\beta(g_1 * g_2) = (g_1 * g_2)(u) = (g_1 \cdot g_2 - f \cdot q)(u) =$$

$$= g_1(u) \cdot g_2(u) - f(u) \cdot q(u) = g_1(u) \cdot g_2(u) = \beta(g_1) \cdot \beta(g_2).$$

În plus,

$$\beta(g_1 + g_2) = (g_1 + g_2)(u) = g_1(u) + g_2(u) = \beta(g_1) + \beta(g_2)$$

deci β este un izomorfism de inele.

(3) rezultă din 1.6 și din punctul (2) sau poate fi demonstrat direct, fără a face apel la izomorfismul $K_f \simeq K[u]$, urmînd o cale similară cu cea din demonstrația lui 1.6.

2.3. Observații. 1) Dacă $g \in K[X]$ este un polinom unitar, ireductibil și $g(u)=0$ pentru un anumit $u \in B$, atunci $g = \mathrm{Min}(u, K)$. Într-adevăr conform lui 2.1, $\mathrm{Min}(u, K) \mid g$; g este ireductibil și unitar iar $\mathrm{Min}(u, K)$ are gradul $\geqslant 1$, deci obligatoriu $g = \mathrm{Min}(u, K)$.

2) Izomorfismul de inele β din enunțul propoziției precedente are evident proprietatea că $\beta(a) = a \cdot e$, $(\forall) a \in K$. Se spune că β este un *izomorfism de K-algebre*, sau pe scurt, *K-izomorfism*.

3) Propoziția de mai sus nu funcționează în cazul elementelor algebrice peste un inel comutativ arbitrar A din simplul motiv că nu se poate defini noțiunea de polinom minimal al unui element algebric peste A.

De exemplu, numărul $\frac{1}{2} \in \mathbf{Q}$ este algebric peste $\mathbf{Z}$, fiind rădăcina polinomului $2X-1 \in \mathbf{Z}[X]$, dar nu există nici un polinom unitar cu coeficienți în $\mathbf{Z}$ care să aibă pe $\frac{1}{2}$ ca rădăcină.

2.4. Exemple. (1) Corpul $\mathbf{C}$ al numerelor complexe are în mod canonic o structură de $\mathbf{Q}$-algebră, via incluziunea canonică $\mathbf{Q} \hookrightarrow \mathbf{C}$, ca și o structură de $\mathbf{R}$-algebră via incluziunea canonică $\mathbf{R} \hookrightarrow \mathbf{C}$. Observăm că $\pi \in \mathbf{R}$ este algebric peste $\mathbf{R}$, fiind rădăcina polinomului $X - \pi \in \mathbf{R}[X]$, dar este transcendent peste $\mathbf{Q}$ după cum este bine știut.

(2) Se știe (folosind, de exemplu, criteriul lui *Eisenstein* și lema lui *Gauss* asupra polinoamelor primitive) că pentru orice $n \in \mathbf{N}^*$ și pentru orice număr prim $p > 0$, polinomul $X^n - p$ din $\mathbf{Q}[X]$ este ireductibil, deci $\mathrm{Min}(\sqrt[n]{p}, \mathbf{Q}) = X^n - p$ conform lui 2.3.(1), de unde, aplicînd 2.2, deducem că

$$\mathbf{Q}[\sqrt[n]{p}] = \{a_0 + a_1\sqrt[n]{p} + \ldots + a_{n-1}\sqrt[n]{p^{n-1}} \mid a_i \in \mathbf{Q},\ i = \overline{0,\ n-1}\},$$

$\mathbf{Q}[\sqrt[n]{p}]$ este un subcorp al corpului $\mathbf{R}$ al numerelor reale și că numerele $1, \sqrt[n]{p}, \ldots, \sqrt[n]{p^{n-1}}$ sînt liniar independente peste $\mathbf{Q}$, adică $a_0 + a_1\sqrt[n]{p} + \ldots + a_{n-1}\sqrt[n]{p^{n-1}} = 0$ și $a_i \in \mathbf{Q}$, $i = \overline{0,\ n-1}$ implică $a_0 = a_1 = \ldots = a_{n-1} = 0$.

Mai general, dacă f este un polinom ireductibil de grad n din $\mathbf{Q}[X]$ și $z \in \mathbf{C}$ este o rădăcină a lui f, atunci

$$\mathbf{Q}[z] = \{a_0 + a_1 z + \ldots + a_{n-1}z^{n-1} \mid a_i \in \mathbf{Q},\ i = \overline{0, n-1}\},$$

$\mathbf{Q}[z]$ este un subcorp al lui $\mathbf{C}$ și numerele complexe $1, z, z^2, \ldots, z^{n-1}$ sînt liniar independente peste $\mathbf{Q}$.

De pildă, dacă $d \in \mathbf{Z} \setminus \{0, 1\}$ este un număr întreg liber de pătrate, atunci polinomul $X^2 - d$ este ireductibil în $\mathbf{Q}[X]$, deci $\mathrm{Min}(\sqrt{d}, \mathbf{Q}) = X^2 - d$. Așadar,

$$\mathbf{Q}[\sqrt{d}] = \{a + b\sqrt{d} \mid a, b \in \mathbf{Q}\},$$

$\mathbf{Q}[\sqrt{d}]$ este un subcorp al lui $\mathbf{C}$ și numerele complexe $1, \sqrt{d}$ sînt liniar independente peste $\mathbf{Q}$. Să notăm că în manualul de Algebră de clasa a XII-a corpul pătratic $\mathbf{Q}[\sqrt{d}]$ este notat prin $\mathbf{Q}(\sqrt{d})$.

Scanned with OKEN Scanner

(3) Dacă f este un polinom unitar din $K[X]$ de grad $\geqslant 1$, K corp comutativ, putem considera K-algebra K_f a resturilor inelului $K[X]$ modulo f. Aplicînd 1.4 deducem că $X \in K_f$ este un element algebric peste K și $\mathrm{Min}(X, K) = f$.

§.3. POLINOMUL MINIMAL AL UNEI MATRICI, APLICAȚII

În cele ce urmează vom particulariza rezultatele prezentate în paragraful precedent, luînd pe postul K-algebrei B, K-algebra $M_n(K)$ a matricilor pătrate de ordin n peste corpul K, n fiind un număr natural $\geqslant 2$.

În principal se arată că orice polinom $f \in K[X]$ de grad $n \geqslant 1$ este polinomul minimal al unei matrici precis determinate $U_f \in M_n(K)$. Cuplînd acest rezultat cu cele din paragrafele precedente se deduce că orice K-algebră de tipul $K[u]$, unde u este un element algebric al unei K-algebre arbitrare B, se poate realiza *efectiv* ca o copie izomorfă a unui anumit subinel al inelului de matrici $M_n(K)$, mai precis $K[u] \simeq K[U_f]$.

Ca un caz particular se investighează K-algebrele de forma $K[U]$, unde $U \in M_2(K)$.

Reamintim că morfismul structural al K-algebrei $M_n(K)$ a fost notat în paragraful precedent prin δ.

Vom nota prin O matricea nulă din $M_n(K)$, prin E matricea unitate și prin $U, V, W, \ldots$ elemente oarecare din $M_n(K)$.

Se constată imediat că dacă $a \in K$ și $U = (a_{ij}) \in M_n(K)$, atunci matricea $\delta(a) \cdot U$, care conform convenției folosite în §.2 se mai notează și prin aU, este exact matricea $(aa_{ij}) \in M_n(K)$. Așadar, dacă $f = a_m X^m + \ldots + a_1 X + a_0 \in K[X]$ și $U \in M_n(K)$, atunci valoarea $f(U)$ a lui f în U este matricea

$$f(U) = a_m U^m + \ldots + a_1 U + a_0 E.$$

Se poate arăta că orice matrice $U \in M_n(K)$ este un element algebric peste K. Pentru aceasta se invocă fie teorema *Hamilton-Cayley*, care afirmă că orice matrice $U \in M_n(K)$ este rădăcină a polinomului său caracteristic p_U (vezi [5] pentru o demonstrație elementară a acestui fapt), fie se folosește faptul mai puțin elementar că $M_n(K)$ considerat ca spațiu vectorial peste K are dimensiunea n^2, deci matricile $E, U, U^2, \ldots, U^{n^2}$ sînt neapărat liniar dependente peste K, adică există $b_0, b_1, \ldots, b_{n^2} \in K$, nu toate nule, astfel încît

$$b_0 E + b_1 U + \ldots + b_{n^2} U^{n^2} = 0,$$

deci U este rădăcină a polinomului nenul

$$g = \sum_{i=0}^{n^2} b_i X^i \in K[X].$$

Reamintim că polinomul caracteristic p_U al unei matrici $U = (a_{ij}) \in M_n(K)$ este polinomul

$$p_U = \det \begin{pmatrix} X - a_{11} & -a_{12} & \ldots & -a_{1n} \\ -a_{21} & X - a_{22} & \ldots & -a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \ldots & X - a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Pentru orice $U \in M_n(K)$ are deci sens considerarea polinomului minimal $\mathrm{Min}(U, K)$ a lui U peste K. Acest polinom coincide cu polinomul notat în [5] prin m.

Particularizînd 2.2. pentru $B = M_n(K)$, se obține imediat următoarea propoziție :

3.1. Propoziție. *Fie $U \in M_n(K)$, $f = \mathrm{Min}(U, K)$ și m gradul polinomului $\mathrm{Min}(U, K)$. Atunci :*

(1) *Orice element W din K-subalgebra $K[U]$ a lui $M_n(K)$, generată de U, se scrie în mod unic sub forma*

$$W = a_0 E + a_1 U + \ldots + a_{m-1} U^{m-1}, \text{ cu } a_i \in K, \ i = \overline{0, \ m-1}.$$

(2) *Funcția $\beta : K_f \to K[U]$ definită prin $\beta(g) = g(U)$ stabilește un izomorfism canonic de inele.*

(3) *$K[U]$ este domeniul de integritate $\Leftrightarrow$ $K[U]$ este corp $\Leftrightarrow$ $\mathrm{Min}(U, K)$ este polinom ireductibil.*

Scanned with OKEN Scanner

3.2. Observații. (1) Cum $p_U(U) = 0$ și $\deg(p_U) = n$, pentru orice $U \in M_n(K)$, din definiția lui $\mathrm{Min}(U, K)$ se deduce că $\mathrm{Min}(U, K) \mid p_U$, deci $1 \leqslant \deg(\mathrm{Min}(U, K)) \leqslant n$. În plus, $\deg(\mathrm{Min}(U, K)) = n \Leftrightarrow \mathrm{Min}(U, K) = p_U$.

(2) Evident, $\deg(\mathrm{Min}(U, K)) = 1 \Leftrightarrow$ există $a \in K$ astfel încît $U = \delta(a) = aE$.

(3) Funcția $\tau : K[U] \to K[{}^tU]$ definită prin $\tau(V) = {}^tV$, $V \in K[U]$,

unde ${}^tV$ desemnează transpusa matricii V, este un izomorfism de K-algebre. Aceasta rezultă imediat din faptul că inelul $K[U]$ este comutativ și din binecunoscutele proprietăți de transpunere a matricilor:

$$
\begin{aligned}
{}^t(V_1 + V_2) &= {}^tV_1 + {}^tV_2 \\
{}^t(V_1 \cdot V_2) &= {}^tV_1 \cdot {}^tV_2 \\
{}^t(aV_1) &= a \cdot {}^tV_1
\end{aligned}
$$

unde $V_1, V_2 \in M_n(K)$ și $a \in K$. Se observă totodată că $\mathrm{Min}(U, K) = \mathrm{Min}({}^tU, K)$.

În cele ce urmează ne propunem să demonstrăm că orice polinom unitar f de grad $n \geqslant 1$ din $K[X]$ este polinomul minimal al unei matrici precis determinate $U_f \in M_n(K)$.

Fie deci $f = X^n - a_{n-1}X^{n-1} - a_{n-2}X^{n-2} - \ldots - a_1X - a_0$ un polinom unitar din $K[X]$.

$$
U_f = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 & a_0 \\ 1 & 0 & \ldots & 0 & a_1 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 & a_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & a_{n-1} \end{pmatrix} \text{ dacă } n \geqslant 2 \text{ și } U_f = (a_0) \text{ dacă } n = 1.
$$

Înmulțirea la stînga a matricii U_f cu matrici coloană peste K are următoarea interpretare interesantă, care constituie, de fapt, punctul cheie al demonstrării rezultatului anunțat și totodată puntea de legătură cu consideraţiile din §.1:

3.3. Lemă. *Pentru orice $b_0, b_1, \ldots, b_{n-1} \in K$ avem*

$$
U_f \cdot \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ \vdots \\ b_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ \vdots \\ c_{n-1} \end{pmatrix}
$$

unde $c_0 + c_1X + \ldots + c_{n-1}X^{n-1} = (b_0 + b_1X + \ldots + b_{n-1}X^{n-1}) * X$.

Demonstrație. Făcînd înmulțirea celor două matrici din enunț găsim imediat

$$
\begin{aligned}
c_0 &= a_0 b_{n-1} \\
c_1 &= b_0 + a_1 b_{n-1} \\
c_2 &= b_1 + a_2 b n_{n-1} \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
c_{n-1} &= b_{n-2} + a_{n-1} b_{n-1}.
\end{aligned}
$$

Pe de altă parte, conform lui 1.3. (1) avem

$$
X^{*n} = a_{n-1}X^{n-1} + \ldots + a_1X + a_0
$$

deci

$$
\begin{aligned}
&(b_0 + b_1X + \ldots + b_{n-1}X^{n-1}) * X = b_0X + \ldots + b_{n-2}X^{n-1} + b_{n-1}X^{*n} = \\
&= b_0X + \ldots + b_{n-2}X^{n-1} + b_{n-1}(a_0 + a_1X + \ldots + a_{n-1}X^{n-1}) = \\
&= a_0b_{n-1} + (b_0 + a_1b_{n-1})X + (b_1 + a_2b_{n-1})X^2 + \ldots \\
&\ldots + (b_{n-2} + a_{n-1}b_{n-1})X^{n-1} = c_0 + c_1X + \ldots + c_{n-1}X^{n-1}.
\end{aligned}
$$

Scanned with OKEN Scanner

3.4. Teoremă. *Cu notaţiile de mai sus, avem* $\mathrm{Min}(U_f, K) = f$.

Demonstraţie. Fie $b_0, b_1, \ldots, b_{n-1} \in K$. Este clar că pentru orice $V, W \in M_n(K)$ şi orice $a \in K$ avem :

$$(V + W)\begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ \vdots \\ b_{n-1} \end{pmatrix} = V\begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ \vdots \\ b_{n-1} \end{pmatrix} + W\begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ \vdots \\ b_{n-1} \end{pmatrix},$$

$$(aV)\begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ \vdots \\ b_{n-1} \end{pmatrix} = V\begin{pmatrix} ab_0 \\ ab_1 \\ \vdots \\ ab_{n-1} \end{pmatrix}, \quad (V \cdot W)\begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ \vdots \\ b_{n-1} \end{pmatrix} = V \cdot \left(W\begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ \vdots \\ b_{n-1} \end{pmatrix} \right),$$

Aşadar

$$U_f^2\begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ \vdots \\ b_{n-1} \end{pmatrix} = U_f \cdot \left(U_f\begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ \vdots \\ b_{n-1} \end{pmatrix} \right) = U_f \cdot \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ \vdots \\ c_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_0 \\ d_1 \\ \vdots \\ d_{n-1} \end{pmatrix},$$

unde $d_0 + d_1X + \ldots + d_{n-1}X^{n-1} = (c_0 + c_1X + \ldots + c_{n-1}X^{n-1}) * X =$

$= ((b_0 + b_1X + \ldots + b_{n-1}X^{n-1}) * X) * X = (b_0 + b_1X + \ldots + b_{n-1}X^{n-1}) * X^2$

şi în general, prin inducţie, rezultă că pentru orice $k \in \mathbf{N}$, $k \geqslant 1$,

$$U_f^k\begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ \vdots \\ b_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_0 \\ e_1 \\ \vdots \\ e_{n-1} \end{pmatrix},$$

unde

$$e_0 + e_1X + \ldots + e_{n-1}X^{n-1} = (b_0 + b_1X + \ldots + b_{n-1}X^{n-1}) * X^k.$$

Rezultă că pentru orice polinom

$$g = \alpha_m X^m + \ldots + \alpha_1 X + \alpha_0 \in K[X]$$

avem

$$(\alpha_m U_f^m + \ldots + \alpha_1 U_f + \alpha_0 E)\begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ \vdots \\ b_{n-1} \end{pmatrix} = g(U_f)\begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ \vdots \\ b_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_{n-1} \end{pmatrix}$$

unde

$$\beta_0 + \beta_1X + \ldots + \beta_{n-1}X^{n-1} = (b_0 + b_1X + \ldots + b_{n-1}X^{n-1}) * g.$$

În particular, pentru orice $b_0, b_1, \ldots, b_{n-1} \in K$,

$$f(U_f)\begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ \vdots \\ b_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_{n-1} \end{pmatrix}$$

unde

$$\beta_0 + \beta_1X + \ldots + \beta_{n-1}X^{n-1} = (b_0 + b_1X + \ldots + b_{n-1}X^{n-1}) * f =$$

$$= ((b_0 + b_1X + \ldots + b_{n-1}X^{n-1}) \cdot f) \bmod f = 0.$$

Scanned with OKEN Scanner

Rezultă atunci că $f(U_f) = 0$. Într-adevăr, dacă $V = (a_{ij}) \in M_n(K)$ este o matrice oarecare având proprietatea că

$$V\begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ \vdots \\ b_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

pentru orice $b_0, \ldots, b_{n-1} \in K$, atunci luînd pe rînd

$$\begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ \vdots \\ b_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ \vdots \\ b_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ \vdots \\ b_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

obținem

$$\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{n2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

adică $V = O$.

Arătăm acum că, dacă $g = \alpha_{n-1}X^{n-1} + \ldots + \alpha_1 X + \alpha_0 \in K[X]$ și $g(U_f) = 0$, atunci $g = 0$, de unde vom deduce că f este polinomul nenul unitar de grad minim admițînd pe U_f ca rădăcină, adică $f = \text{Min}\,(U_f, K)$.

Cum $g(U_f) = 0$, rezultă că avem

$$g(U_f)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

și

$$0 = 0 + 0 \cdot X + \ldots + 0 \cdot X^{n-1} = (1 + 0 \cdot X + \ldots + 0 \cdot X^{n-1}) * g = g,$$

deci $g = 0$, ceea ce încheie demonstrația.

3.5. Observații. 1) Cum $\deg(\text{Min}(U_f, K)) = \deg(f) = n$, din 3.2.(1) deducem că

$$\text{Min}(U_f, K) = p_{U_f} = f.$$

Egalitatea $p_{U_f} = f$ se poate proba și direct, calculînd

$$p_{U_f} = \det\begin{pmatrix} X & 0 & 0 \ldots 0 & -a_0 \\ -1 & X & 0 \ldots 0 & -a_1 \\ 0 & -1 & X \ldots 0 & -a_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 \ldots -1 & X - a_{n-1} \end{pmatrix}$$

dezvoltînd determinantul după prima linie și utilizînd un raționament prin inducție după n.

2) Fie $U \in M_n(K)$ și $f = \text{Min}(U, K)$. Conform lui 3.1.(2) $K_f \simeq K[U]$. Pe de altă parte, $\text{Min}(U_f, K) = f$ în baza lui 3.4, deci folosind din nou 3.1.(2) deducem că există un izomorfism canonic de inele $K[U] \simeq K[U_f]$, ambele inele fiind canonic izomorfe cu inelul K_f.

Să notăm că în general gradul m al polinomului $\text{Min}(U, K)$ este mai mic decît n, deci $K[U_f] \subseteq \subset M_m(K)$, pe cînd $K[U] \subseteq M_n(K)$. Avem $m = n \Leftrightarrow \text{Min}(U, K) = p_U$.

Exemplul care urmează arată că, în general, $K[U] \neq K[U_f]$. Să considerăm matricea $U = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{Q})$. Este clar că

$$\text{Min}(U, K) = p_U = \begin{vmatrix} X-1 & -1 \\ -1 & X+1 \end{vmatrix} = X^2 - 2, \text{ deci } U_f = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Avem

$$\mathbf{Q}[U] = \{aE + bU \mid a,b \in \mathbf{Q}\} = \left\{\begin{pmatrix} a+b & b \\ b & a-b \end{pmatrix} \middle| \, a, b \in \mathbf{Q}\right\},$$

$$\mathbf{Q}[U_f] = \{aE + bU_f \mid a, b \in \mathbf{Q}\} = \left\{\begin{pmatrix} a & 2b \\ b & a \end{pmatrix} \middle| \, a,b \in \mathbf{Q}\right\}.$$

Aşadar, $\mathbf{Q}[U] \neq \mathbf{Q}[U_f]$, cu toate că $\mathbf{Q}[U] \simeq \mathbf{Q}[U_f]$.

3) Dacă B este o K-algebră arbitrară şi $u \in B$ este un element algebric peste K, atunci notînd $f = \mathrm{Min}(U, K)$ avem conform lui 2.2.(2), $K[u] \simeq K_f$, deci $K[u] \simeq K[U_f]$, cu alte cuvinte, inelul $K[u]$ este izomorf cu subinelul $K[U_f]$ al inelului matricilor pătrate $M_n(K)$, unde $n = \deg(f)$.

În particular, dacă $K = \mathbf{Q}$ atunci pentru orice $u \in \mathbf{C}$, u algebric peste $\mathbf{Q}$, inelul $\mathbf{Q}[u]$ (care de fapt este corp, căci $\mathbf{Q}[u] \subseteq \mathbf{C}$ şi $\mathbf{C}$ este domeniu de integritate, deci $\mathbf{Q}[u]$ este domeniu de integritate şi în consecinţă corp, conform lui 2.2.(3)) este izomorf cu corpul $\mathbf{Q}[U_f]$ format din matrici pătrate din $M_n(\mathbf{Q})$, unde $f = \mathrm{Min}(u, K)$ şi $n = \deg(f)$.
De exemplu, dacă $d \in \mathbf{Z} \setminus \{0,1\}$ este un număr întreg liber de pătrate, atunci

$$f = \mathrm{Min}(\sqrt{d}, \mathbf{Q}) = X^2 - d \quad \text{şi} \quad U_f = \begin{pmatrix} 0 & d \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

deci

$$\mathbf{Q}[\sqrt{d}] \simeq \mathbf{Q}[U_f] = \{aE + bU_f \mid a, b \in \mathbf{Q}\} = \left\{\begin{pmatrix} a & bd \\ b & a \end{pmatrix} \middle| \, a, b \in \mathbf{Q}\right\}.$$

În continuare vom investiga inelele de forma $K[U]$, unde $U \in M_2(K)$. Există două posibilităţi :

(1) $U = \delta(a) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$ pentru un anumit $a \in K$, în care caz, $\mathrm{Min}(U, K) = X - a$, şi atunci $K[U] = \{bE \mid b \in K\} = \left\{\begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}, \; b \in K\right\}$ este un inel izomorf cu corpul K prin izomorfismul $\begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \mapsto b$.

(2) $U \neq \delta(b)$ pentru orice $b \in K$, în care caz $\mathrm{Min}(U, K) = p_U = \det \begin{pmatrix} X - a_1 & -a_2 \\ -a_3 & X - a_4 \end{pmatrix} =$
$= X^2 - (a_1 + a_4)X + (a_1a_4 - a_2a_3)$ unde $U = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix}$. Acest lucru rezultă din 3.2. (1), dar se poate proba şi direct, verificînd egalitatea

$$U^2 - (a_1 + a_4)U + (a_1a_4 - a_2a_3)E = 0.$$

Din definiţia lui $\mathrm{Min}(U, K)$ se deduce că $\mathrm{Min}(U, K)$ divide polinomul $X^2 - (a_1 + a_4)X + (a_1a_4 - a_2a_3)$; cum $\mathrm{Min}(U, K)$ nu are gradul 1 (altfel $\mathrm{Min}(U, K)$ ar fi un polinom de forma $X - b$, deci am avea $U - bE = 0$, adică $U = \delta(b)$, în contradicţie cu ipoteza făcută asupra lui U), rezultă că

$$\mathrm{Min}(U, K) = X^2 - (a_1 + a_4)X + (a_1a_4 - a_2a_3),$$

şi se observă imediat că

$$X^2 - (a_1 + a_4)X + (a_1a_4 - a_2a_3) = \det \begin{pmatrix} X - a_1 & -a_2 \\ -a_3 & X - a_4 \end{pmatrix}.$$

Aplicînd 3.1, deducem că în acest caz

$$K[U] = \{\lambda E + \mu U \mid \lambda, \mu \in K\}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Pentru prescurtare, notăm $f = \mathrm{Min}(U, K) = p_U$. Conform lui 3.5.(2) avem:

$$K[U] \simeq K[U_f] = \{\lambda E + \mu U_f \mid \lambda, \mu \in K\}.$$

Există 3 și numai 3 posibilități asupra lui f:

(1) f nu are nici o rădăcină în K, cu alte cuvinte f este ireductibil în $K[X]$. În acest caz, $K[U]$ este un corp în baza lui 3.1.(3).

(2) f are două rădăcini distincte a și b în K, adică $f = (X-a)(X-b)$. În acest caz $U_f \sim \begin{pmatrix} 0 & -ab \\ 1 & a+b \end{pmatrix}$ și atunci

$$K[U_f] = \{\lambda E + \mu U_f \mid \lambda, \mu \in K\} = \left\{ \begin{pmatrix} \lambda & -\mu ab \\ \mu & \lambda + \mu a + \mu b \end{pmatrix} \;\middle|\; \lambda, \mu \in K \right\}.$$

Funcția $\varphi : K[U_f] \to K \times K$,

$$\varphi\left(\begin{pmatrix} \lambda & -\mu ab \\ \mu & \lambda + \mu a + \mu b \end{pmatrix}\right) = (\lambda + \mu a,\ \lambda + \mu b)$$

este un izomorfism de inele, unde $K \times K$ este considerat ca inel cu operațiile uzuale efectuate pe componente.

Într-adevăr, se verifică cu ușurință (exercițiu!) că φ este un morfism de inele. Morfismul φ este bijectiv, căci pentru orice $(x,y) \in K \times K$, sistemul de ecuații liniare în necunoscutele λ și μ

$$\begin{cases} \lambda + \mu a = x \\ \lambda + \mu b = y \end{cases}$$

admite o soluție unică: $\mu = (a-b)^{-1}(x-y)$ și $\lambda = x - (a-b)^{-1} \cdot (x-y) \cdot a$, deoarece $a \neq b$.

Faptul că inelele $K[U_f]$ și $K \times K$ sînt izomorfe, se putea proba și altfel, utilizînd 2.2.3). Înainte de toate, inelul $K \times K$ are o structură de K-algebră via morfismul

$$\varepsilon : K \to K \times K,\ \varepsilon(x) = (x, x),\quad x \in K.$$

Considerăm elementul $u = (a, b) \in K \times K$, unde $a \neq b$. Cum $a \neq b$, $\mathrm{Min}(u, K)$ nu poate avea gradul 1, deci $\mathrm{Min}(u, K)$ are gradul cel puțin 2. Pe de altă parte, se observă că $f(u) = 0$, unde $f = (X-a)(X-b) = X^2 - (a+b)X + ab$. Într-adevăr,

$$\begin{aligned} f(u) &= (a, b)^2 - (a+b) \cdot (a, b) + ab \cdot (1, 1) = \\ &= (a^2, b^2) - (a^2 + ab,\ ab + b^2) + (ab, ab) = \\ &= (a^2 - a^2 - ab + ab,\ b^2 - ab - b^2 + ab) = (0,0). \end{aligned}$$

Așadar, $\mathrm{Min}(u, K) = f$, deci $K_f \simeq K[u]$. Dar

$$\begin{aligned} K[u] &= \{\lambda(1,1) + \mu(a, b) \mid \lambda, \mu \in K\} = \\ &= \{(\lambda + \mu a,\ \lambda + \mu b) \mid \lambda, \mu \in K\} = K \times K. \end{aligned}$$

Rezultă că avem:

$$K[U_f] \simeq K_f \simeq K[u] = K \times K.$$

(3) f are o rădăcină dublă a în K, adică $f = (X-a)^2$. În acest caz, $U_f = \begin{pmatrix} 0 & -a^2 \\ 1 & 2a \end{pmatrix}$ și atunci

$$K[U_f] = \{\lambda E + \mu U_f \mid \lambda, \mu \in K\} = \left\{ \begin{pmatrix} \lambda & -\mu a^2 \\ \mu & \lambda + 2\mu a \end{pmatrix} \middle| \lambda, \mu \in K \right\}.$$

Să notăm că matricea

$$V = U_f - aE = \begin{pmatrix} -a & -a^2 \\ 1 & a \end{pmatrix} \in K[U_f]$$

Scanned with OKEN Scanner

este nenulă, dar

$$V^2 = \begin{pmatrix} -a & -a^2 \\ 1 & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -a & -a^2 \\ 1 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

deci inelul $K[U_f]$ are un element nilpotent nenul și anume V, deci $K[U_f]$ nu este izomorf cu inelul $K \times K$ căci acesta din urmă nu are nici un element nilpotent nenul.

În cazul în care $a = 0$, adică $f = f_0 = X^2$, atunci $U_{f_0} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ și

$$K[U_{f_0}] = \left\{ \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ \mu & \lambda \end{pmatrix} \middle| \lambda, \mu \in K \right\}.$$

Să notăm acest inel prin K_0.
Se verifică fără dificultate (exercițiu!) că pentru orice $a \in K$ și $f = (X-a)^2$, funcția

$$\psi : K[U_f] \to K, \ \psi\left(\begin{pmatrix} \lambda & -\mu a^2 \\ \mu & \lambda + 2\mu a \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} \lambda + \mu a & 0 \\ \mu & \lambda + \mu a \end{pmatrix}$$

este un morfism de inele care este bijectiv, deci este un izomorfism de inele. Dacă $a = \hat{0}$ acest izomorfism este chiar morfismul identic 1_{K_0} al inelului K_0.
Am demonstrat în acest fel cea mai mare parte a următoarei teoreme:

3.6. Teoremă. *Fie $U \in M_2(K)$ o matrice nescalară (adică $U \neq \delta(a)$ pentru orice $a \in K$). Au loc următoarele afirmații:*

(1) *$K[U]$ este un corp $\Leftrightarrow$ $\mathrm{Min}(U, K)$ nu are nici o rădăcină în K.*

(2) *$K[U] \simeq K \times K \Leftrightarrow \mathrm{Min}(U, K)$ are două rădăcini distincte în K.*

(3) *$K[U] \simeq K_0 \Leftrightarrow \mathrm{Min}(U, K)$ are o rădăcină dublă în K, unde K_0 este următorul inel de matrici*

$$K_0 = \left\{ \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ \mu & \lambda \end{pmatrix} \middle| \lambda, \mu \in K \right\}.$$

Demonstrație. Punctul (1) rezultă din 3.1.(3). De asemenea, avem că:

$\mathrm{Min}(U, K)$ are o rădăcină în $K \Leftrightarrow \mathrm{Min}(U, K)$ are ambele rădăcini în $K \Leftrightarrow K[U]$ nu este corp $\Leftrightarrow K[U]$ nu este domeniu de integritate.

Pentru punctele (2) și (3) avem de demonstrat doar implicațiile „$\Rightarrow$". Dacă, de exemplu, $K[U] \simeq K \times K$ atunci, conform celor de mai sus, cum $K \times K$ nu este domeniu de integritate, rezultă că $\mathrm{Min}(U, K)$ are ambele rădăcini în K. Ele nu pot fi confundate căci atunci, conform celor demonstrate anterior ar rezulta că inelele $K[U]$ și K_0 ar fi izomorfe, deci $K \times K \simeq K_0$, imposibil, deoarece K_0 are elemente nenule nilpotente.

Analog, se probează și implicația „$\Rightarrow$" de la punctul 3).

3.7. Observații. (1) Fie $U \in M_2(K)$ o matrice nescalară astfel încît $\mathrm{Min}(U, K)$ să fie un polinom reductibil în $K[X]$. Dacă V este o matrice arbitrară din $M_2(K)$, teorema precedentă ne spune că inelele $K[U]$ și $K[V]$ sînt izomorfe dacă și numai dacă $\mathrm{Min}(V, K)$ este tot un polinom reductibil în $K[X]$ de gradul 2 și de același tip cu polinomul $\mathrm{Min}(U, K)$, adică $\mathrm{Min}(U, K)$ și $\mathrm{Min}(V, K)$ au rădăcinile din K fie toate simple, fie toate duble.

(2) În general dacă U și V sînt două matrici nescalare din $M_2(K)$ astfel încît $\mathrm{Min}(U, K)$ și $\mathrm{Min}(V, K)$ sînt ambele polinoame ireductibile în $K[X]$, nu rezultă că inelele $K[U]$ și $K[V]$ sînt izomorfe.

De exemplu, dacă $U = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ și $V = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, atunci

$$\mathbf{Q}[U] \simeq \mathbf{Q}[\sqrt{2}], \ \mathbf{Q}[V] \simeq \mathbf{Q}[\sqrt{3}]$$

(vezi 3.5.(3)) și cum $\mathbf{Q}[\sqrt{2}] \not\simeq \mathbf{Q}[\sqrt{3}]$ după cum este bine știut, deducem că $\mathbf{Q}[U] \not\simeq \mathbf{Q}[V]$.

Totuși, dacă K este corpul finit $\mathbf{Z}_p$, p prim, vom vedea în paragraful 5 că avem $K[U] \simeq K[V]$. (va urma).

Scanned with OKEN Scanner

UNELE CONSIDERAȚII METODICE ASUPRA TEOREMELOR DE MEDIE

de Ștefan Kudar, profesor, Baia Mare

În manualul pentru clasa a XI-a, *Elemente de analiză matematică*, ca și în alte manuale, mai multe observații, demonstrații, soluții ale unor probleme care au o importanță deosebită pentru a înțelege cît mai bine problemele puse în discuție apar tipărite cu „litere mici".

I. Astfel la teorema lui *Lagrange* se fac trei observații din care a doua se poate aplica în demonstrarea teoremei iar celelalte la rezolvarea unor probleme.

Este firească întrebarea : Pentru ce considerăm funcția auxiliară

$F(x) = f(x) + kx$; $x \in [a, b]$ cu $k \in \mathbf{R}$? [1], sau

$$g(x) = \lambda(x - a) - f(x),\ \lambda = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}\ ?\ [2].$$

Pornind de la interpretarea geometrică : există cel puțin un punct $c \in (a, b)$ pentru care tangenta la graficul lui f în $C(c.\ f(c))$ este paralelă cu „coarda" determinată de punctele $A(a, f(a))$ și $B(b.f(b))$, adică $CT \parallel AB$.

Scriem ecuația suportului coardei AB :

$$y = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) + f(a), \tag{1}$$

Notînd $y = g(x)$ funcția $d(x) = g(x) - f(x)$, adică

$$d(x) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) + f(a) - f(x);\ x \in [a, b] \tag{2}$$

are proprietățile : $d(a) = d(b)$, este continuă pe $[a, b]$ și derivabilă pe (a, b) (funcția auxiliară) și

$$d'(x) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} - f'(x), \tag{3}$$

Aplicînd teorema lui *Rolle*, există $c \in (a, b)$ astfel ca $d'(c) = 0$ și rezultă

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a), \tag{4}$$

În mod firesc s-a ajuns la funcția auxiliară (2) și la factorul liniar $\frac{f(b) - f(a)}{(b - a)}(x - a)$, și este mult mai ușor de reținut modul de pornire în demonstrație.

II. De o funcție auxiliară avem nevoie și la rezolvarea problemei nr. 13 din [1] pag. 160 :

Fie $f : [a, b]$ o funcție Rolle. Să se arate că există $c \in (a, b)$ astfel încît $f'(c) = \frac{f(a) - f(c)}{c - b}$.

Dacă propunem aplicarea teoremei lui *Lagrange*, considerăm funcția auxiliară $g : [a, b] \to \mathbf{R}$, $g(x) = f(x)(x - b) + f(a)$ continuă pe $[a, b]$, derivabilă în (a, b) ; $g'(x) = f'(x)(x - b) + f(x)$ și astfel din $\frac{g(b) - g(a)}{b - a} = g'(c)$ obținem relația cerută.

Observații : 1. Pentru $g(x) = f(x)(x - a) + f(b)$ se obține un rezultat analog și anume : există $c \in (a, b)$ astfel ca $\frac{f(b) - f(c)}{c - a} = f'(c)$.

2. Se poate apela și la teorema lui *Rolle*, dar funcția auxiliară g trebuie să satisfacă condiția ca $g(a) = g(b)$.

Scanned with OKEN Scanner

Pornind cu $g(x) = [f(x) - \alpha](x - \beta)$ vom avea

$$[f(a) - \alpha](a - \beta) = [f(b) - \alpha](b - \beta)$$

și are loc dacă

1) $\begin{cases} \alpha = f(a) \\ \beta = b \end{cases}$ sau 2) $\begin{cases} \alpha = f(b) \\ \beta = a. \end{cases}$

Deci $g : [a, b] \to \mathbf{R}$ poate avea forma:
(1) $g(x) = [f(x) - f(a)](x - b)$ și aplicînd teorema lui *Rolle* obținem relația cerută, sau
(2) $g(x) = [f(x) - f(b)](x - a)$, care conduce la existența lui $c \in (a, b)$ astfel ca $f'(c) = \dfrac{f(b) - f(c)}{c - a}$.

Astfel se observă și mai evident rolul factorului linear în construirea funcției g.

II. Problema prezintă interes și în clasa a XII-a. Pentru găsirea funcției $g(x)$ astfel încît să fie aplicabilă teorema lui *Rolle* înlocuim c prin x $(x \neq b)$ și obținem $f'(x) = \dfrac{f(a) - f(x)}{x - b}$ de unde

$$x \cdot f'(x) + f(x) - b \cdot f'(x) - f(a) = 0, \text{ iar}$$

$$g(x) = \int [xf'(x) + f(x) - bf'(x) - f(a)]\, dx = xf(x) - bf(x) - xf(a), (c = 0)$$

care verifică condițiile din teorema lui *Rolle*.
Avem $g(a) = af(a) - bf(a) - af(a) = -bf(a) = g(b)$. Conform teoremei lui *Rolle*, $(\exists)\ c \in (a, b)$ astfel încît $g'(c) = 0$ adică

$$c \cdot f'(c) + f(c) - b \cdot f'(c) - f(a) = 0 \text{ de unde } f'(c) = \frac{f(a) - f(c)}{c - b}.$$

IV. Dacă diferența $(b - a)$ este „destul de mică" atunci diferența $(c - a)$ este și mai mică, deci din $f'(c) \approx f'(a)$, rezultă $\dfrac{f(b) - f(a)}{b - a} \approx f'(a)$. Astfel $f(b) \approx f(a) + f'(a)(b - a)$ și se poate calcula o valoare aproximativă a numărului $f(b)$ cunoscînd $f(a)$ și $f'(a)$.

Exemplu: Să se calculeze $\sqrt[3]{26{,}94}$.

Considerăm $f(x) = \sqrt[3]{x}$; $f'(x) = \dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$. Avem:

$$a = 27;\ b = 26{,}94;\ b - a = -0{,}06;\ f(a) = 3;\ f'(a) = \frac{1}{27}.$$

Rezultă $\sqrt[3]{26{,}94} = f(26{,}94) \approx 3 + \dfrac{1}{27}(-0{,}06) = 3 - 0{,}0082$, deci $\sqrt[3]{26{,}94} \approx 2{,}9978$ (verificare: $(2{,}9978)^3 = 26{,}94$).

Bibliografie

[1] *Gh. Gussi, O. Stănășilă, T. Sloica*: Elemente de analiză matematică, manual cl. a XI-a, pag. 155.
[2] *Gh. Sireţchi* — Calcul diferențial și integral, vol. I, Editura științifică și enciclopedică 1985.
[3] *D. M. Bătineţu, I. V. Maftei, I. M. Stanciu-Minasian*, Exerciții și probleme de analiză matematică pentru clasele a XI-a și a XII-a, Edit. Didactică și pedagogică, 1981.

Scanned with OKEN Scanner

SOLUȚIILE PROBLEMELOR DATE LA CONCURSUL DE MATEMATICĂ PENTRU GIMNAZIU
ETAPA FINALĂ (PE ȚARĂ), BRAȘOV 1988, (II)

de N. Teodorescu, I. Mitrache, L. Pîrșan, P. Radovici-Mărculescu

Clasa a VIII-a
(Proba de algebră)

1. *Să se arate că pentru orice* $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 1$, *numărul*

$$A = \frac{1}{4} n^2 (n+1)^2 (n^2 + 2n - 1) + 3$$

este natural, multiplu de 3.

I. Mitrache

Soluție. a) Numărul A este natural deoarece numărul $n(n+1)$ reprezintă produsul a două numere naturale consecutive, prin urmare este un număr natural divizibil prin 2, iar pătratul său $n^2(n+1)^2$ este un număr natural divizibil prin 4.

b) Arătăm că numărul natural A este multiplu de 3.

Fie $n = 3k$, $k \in \mathbb{N}^* \Rightarrow A = \hat{3} + 3 = \hat{3}$.

Analog pentru $n = 3k - 1$, $k \in \mathbb{N}^*$.

Pentru $n = 3k + 1$, $k \in \mathbb{N}$, observăm că:

$$2n^2 + 2n - 1 = 2(3k+1)^2 + 2(3k+1) - 1 = \hat{3} + 2 + 2\hat{3} + 2 - 1 = \hat{3},$$

deci A este un multiplu de 3.

2. *Să se rezolve în numere întregi ecuația*

$$x(x+2)(x+4)(x+6) + 9 = y^2.$$

L. Pîrșan

Soluție. Grupînd termenii în primul membru urmează:

$$[x(x+6)]\,[(x+2)(x+4)] + 9 = y^2 \text{ sau } [x^2+6x]\,[(x^2+6x)+8] + 9 = y^2 \text{ sau}$$

$$(x^2+6x)^2 + 8(x^2+6x) + 16 + (9-16) = y^2 \text{ adică } (x^2+6x+4)^2 - 7 = y^2 \text{ sau}$$

$$(x^2+6x+4-y)(x^2+6x+4+y) = 7.$$

Deci rezolvarea problemei date se reduce la rezolvarea următoarelor sisteme:

$$\begin{cases} x^2+6x+4-y=7 \\ x^2+6x+4+y=1 \end{cases}; \quad \begin{cases} x^2+6x+4-y=1 \\ x^2+6x+4+y=7 \end{cases}; \quad \begin{cases} x^2+6x+4-y=-7 \\ x^2+6x+4+y=-1 \end{cases};$$

$$\begin{cases} x^2+6x+4-y=-1 \\ x^2+6x+4+y=-7 \end{cases}.$$

Soluțiile sistemelor sînt: $(0,-3), (-6,-3), (0,3), (-6,3), (-2,3), (-4,3), (-2,-3), (-4,-3)$.

3. *Fie polinomul* $P(X) = X^2 + 40$. *Să se demonstreze că dacă* $a, b \in \mathbb{N}$, $a > b$, *atunci cel puțin unul din numerele* $P(a) + P(b)$, $P(a) - P(b)$ *este diferit de* 1 *și nu este număr prim.*

I. Diaconu

Soluție. $P(a) + P(b) = a^2 + b^2 + 80$, $P(a) - P(b) = (a-b)(a+b) \geqslant 1$.

Scanned with OKEN Scanner

Distingem două cazuri:

a) $a - b \neq 1 \Rightarrow a + b \neq 1 \Rightarrow (a + b) \mid (P(a) - P(b))$

b) $a - b = 1 \Rightarrow P(a) + P(b) = 2b(b + 1) + 81$.

Dacă $b = 3k$, $k \in \mathbf{N}$ urmează:

$$P(a) - P(b) = 3[2k(3k + 1) + 27].$$

Dacă $b = 3k + 1$, $k \in \mathbf{N}$ urmează:

$$P(a) + P(b) = 2b + 1 = 2(3k + 1) + 1 = 3(2k + 1).$$

Dacă $b = 3k + 2$, $k \in \mathbf{N}$ urmează:

$$P(a) + P(b) = 3[2(3k + 2)(k + 1) + 27].$$

4. *Fie $x \geqslant 1$, $y \geqslant 1$, $z \geqslant 1$. Să se arate că*

a) $x + y \leqslant 1 + xy$ *și* $xy + yz + zx \geqslant -3 + 2(x + y + z)$;

b) $xyz \geqslant -1 + \frac{1}{4}(1 + x)(1 + y)(1 + z)$; *în ce caz are loc egalitatea?*

O. Stănășilă

Soluție. Deoarece $x - 1 \geqslant 0$ și $y - 1 \geqslant 0$ urmează

$$(x - 1)(y - 1) \geqslant 0 \text{ sau } xy - x - y + 1 \geqslant 0 \quad (1)$$

sau $x + y \geqslant 1 + xy$.
Similar urmează

$$yz - y - z + 1 \geqslant 0, \quad (2)$$

$$zx - z - x + 1 \geqslant 0, \quad (3)$$

Adunînd inegalitățile (1), (2) și (3) avem:

$$(xy + yz + zx) - 2(x + y + z) + 3 \geqslant 0 \text{ sau}$$

$$xy + yz + zx \geqslant -3 + 2(x + y + z).$$

b) Deoarece $x \geqslant 1$, $y \geqslant 1$ și $z \geqslant 1$ avem

$(xy - 1)(z - 1) \geqslant 0$, $(yz - 1)(x - 1) \geqslant 0$, $(zx - 1)(y - 1) \geqslant 0$ sau

$xyz - xy - z + 1 \geqslant 0$, $xyz - yz - x + 1 \geqslant 0$, $xyz - zx - y + 1 \geqslant 0$.

Adunînd ultimele trei inegalități avem

$3xyz - (xy + yz + zx) - (x + y + z) + 3 \geqslant 0$ sau

$3xyz \geqslant -3 + [xy + yz + zx + x + y + z + 1 + xyz] - 1 - xyz$ sau

$4xyz \geqslant -4 + [(xy + xyz) + (yz + y) + (zx + x) + (1 + z)]$ sau

$4xyz \geqslant -4 + (1 + z)[(xy + y) + (x + 1)]$ sau

$4xyz \geqslant -4 + (1 + x)(1 + y)(1 + z)$ sau

$$xyz \geqslant -1 + \frac{1}{4}(1 + x)(1 + y)(1 + z).$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă

$$(xy - 1)(z - 1) = 0, \quad (yz - 1)(x - 1) = 0 \text{ și } (zx - 1)(y - 1) = 0.$$

Vom distinge două cazuri:

1) $z = 1 \Rightarrow (y - 1)(x - 1) = 0$ adică

$x = 1$, $z = 1$ și y arbitrar, sau $y = 1$, $z = 1$ și x arbitrar.

Scanned with OKEN Scanner

2) $xy = 1 \Rightarrow x,\ y \neq 0 \Rightarrow y = \frac{1}{x}$; urmează

$$\left(\frac{x}{x} - 1\right)(x - 1) = 0 \text{ și } (zx - 1)\left(\frac{1}{x} - 1\right) = 0.$$

Deci avem : $x = 1$, $y = 1$, z arbitrar, sau

$$x \neq 1,\ z = x + \frac{1}{x} \text{ adică } x = -1,\ y = -1,\ z = -1.$$

Clasa a VIII-a
(Proba de geometrie)

1. *Fie ABC un triunghi dreptunghic isoscel ($AB \equiv AC$, $AB = a$). În punctul C se duce perpendiculara pe planul triunghiului pe care se ia un punct S astfel încît $SC = a$.*

a) *Dacă $CP \perp SB$, iar Q este mijlocul segmentului SA, să se demonstreze că patrulaterul $ABPQ$ este inscriptibil.*

b) *Să se calculeze aria totală și volumul piramidei $SABC$ în funcție de a.*

I. Diaconu

Soluție: a) Deoarece $SC \perp (ABC)$ și $CA \perp AB$ (triunghiul ABC este dreptunghic în A) urmează din teorema celor trei perpendiculare că $SA \perp AB$, adică $\widehat{QAB} = 90°$, (1). Din faptul că $SA \perp AB$ și $CA \perp AB$ rezultă că $AB \perp (SCA)$. Cum $CQ \subset (SCA)$ și $AB \perp (SCA)$ rezultă $AB \perp CQ$. Dar CQ este înălțime în triunghiul isoscel SCA, deci $CQ \perp SA$. Rezultă $CQ \perp (SAB)$ și deoarece $CP \perp SB$, din teorema celor trei perpendiculare avem $QP \perp SB$, adică $\widehat{QPB} = 90°$, (2). Din (1) și (2) rezultă că patrulaterul $PQAB$ este inscriptibil.

b) Triunghiurile SCA și CAB sînt triunghiuri dreptunghice isoscele congruente. Analog sînt congruente și triunghiurile dreptunghice SCB și SAB. Deci aria totală a piramidei va fi :

$$A_t = 2(A_{CAB} + A_{SAB}) = 2\left(\frac{a^2}{2} + \frac{a^2\sqrt{2}}{2}\right) = a^2(1 + \sqrt{2}),$$

unde $BC = a\sqrt{2} = SA$. Volumul piramidei $SABC$ va fi :

$$V = \frac{A_{CAB} \cdot SC}{3} = \frac{a^2}{6}.$$

2. *Fie piramida $OABC$ în care $OA \perp OB$, $OB \perp OC$, $OC \perp OA$. Să se arate că :*

a) *Proiecția lui O pe planul (ABC) coincide cu ortocentrul H al triunghiului ABC ;*

b) $\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2} + \frac{1}{OC^2}$.

* * *

Soluție: a) Fie H proiecția punctului O pe (ABC). Rezultă $OH \perp (ABC)$. Din ipoteza că $CO \perp OA$ și $CO \perp OB$ urmează faptul că $CO \perp (OAB)$. Din faptul că $AB \perp OC$ și $AB \perp OH$ rezultă că $AB \perp (COH)$ deci $AB \perp CH$.

Din ipoteză avem că $BO \perp OA$ și $BO \perp OC$, adică $BO \perp (COA)$. Deci $BO \perp AC$. Din faptul că $AC \perp OB$ și $AC \perp OH$ rezultă $AC \perp (BOH)$ adică $AC \perp BH$.

Deoarece $AB \perp CH$ și $AC \perp BH$ urmează că H este ortocentrul triunghiului ABC.

b) Fie $OS \perp BC$. Deoarece $OA \perp (OBC)$ și $BC \subset (OBC)$ și $OS \perp BC$ rezultă, din teorema celor trei perpendiculare, că $AS \perp BC$.

Dar $H \equiv AS$ deoarece AS este înălțime în triunghiul ABC.

Cum $OA \perp (OBC)$ iar $OS \subset (OBC)$ rezultă $OA \perp OS$.

Scanned with OKEN Scanner

Deci triunghiul AOS este dreptunghic. Cum $OH \perp (ABC)$ urmează că OH este înălțime în triunghiul dreptunghic OAS.
Dar într-un triunghi dreptunghic de catete b, c, ipotenuză a și înălțime coborîtă din vîrful unghiului drept pe ipotenuză h, este adevărată relația

$$\frac{1}{h^2} = \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}.$$

În cazul triunghiurilor dreptunghice BOC și OAS avem:

$$\frac{1}{OB^2} + \frac{1}{OC^2} = \frac{1}{OS^2} \quad \text{și} \quad \frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OS^2} + \frac{1}{OA^2}.$$

Înlocuind $\frac{1}{OS^2}$ din prima relație în cea de a doua obținem:

$$\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2} + \frac{1}{OC^2}.$$

3. *Se consideră rombul $ABCD$ în care diagonalele AC și BD se intersectează în O. Fie VO perpendiculara în O pe planul rombului.*
a) *Să se arate că $BD \perp VA$;*
b) *Să se determine raportul dintre volumele piramidelor $VABO$ și $VABCD$.*
Soluție: a) Din ipoteză urmează că $VO \perp BD$. Pe de altă parte BD și AC fiind diagonale în rombul $ABCD$ rezultă că $BD \perp AC$. Prin urmare, rezultă că $BD \perp (VOA)$, deci $BD \perp VA$.
b) Patrulaterul $ABCD$ fiind romb, determină patru triunghiuri dreptunghice congruente și anume:

$$\Delta OAB \equiv \Delta OBC \equiv \Delta OCD \equiv \Delta OAD.$$

Deci ariile lor vor fi egale, adică,

$$S_{OAB} = S_{OBC} = S_{OCD} = S_{OAD}.$$

Piramidele $VOAC$, $VOBC$, $VOCD$ și $VOAD$ avînd aceeași înălțime și ariile bazelor egale vor avea același volum $\mathcal{V}$. Deci:

$$\mathcal{V}_{VABCD} = 4\mathcal{V}_{VOAB}, \text{ adică } \frac{\mathcal{V}_{VABO}}{\mathcal{V}_{VABCD}} = \frac{1}{4}.$$

4. *Se consideră o piramidă patrulateră regulată $VABCD$ avînd toate cele opt muchii de lungime a. Fie C_1 mijlocul segmentului CV și $(\mathcal{C})$ cercul înscris în triunghiul VBC.*
a) *Să se arate că planele BDC_1 și VBC sînt perpendiculare;*
b) *Dacă M este un punct oarecare pe cercul $(\mathcal{C})$ și N un punct oarecare pe diagonala BD a bazei, să se determine minimul posibil al lungimii segmentului MN.*

O. Stănășilă

Soluție: a) Deoarece triunghiurile VDC și VCB sînt echilaterale, medianele DC_1 și BC_1 sînt și înălțimi, adică $VC \perp DC_1$ și $VC \perp BC_1$. Prin urmare $VC \perp (C_1DB)$. Deoarece VC este normală la (C_1DB) și $VC \subset (VCB)$ rezultă că: $(C_1DB) \perp (VCB)$.
b) Fie $\{E\} = BC_1 \cap (\mathcal{C})$, $MM_1 \perp BC_1$, $M_1 \in BC_1$ și $M_1N_1 \perp BD$, $N_1 \in BD$. Din faptul că planele (C_1DB) și (VCB) sînt perpendiculare avem $MM_1 \perp (C_1BD)$ adică $\widehat{NM_1M} = 90°$ și $\widehat{N_1M_1M} = 90°$.
Din triunghiurile dreptunghice NM_1M și MN_1M_1 avem

$$MN^2 = M_1N^2 + MM_1^2 \text{ și } MN_1^2 = MM_1^2 + M_1N_1^2.$$

Din $M_1N_1 \perp BD$ rezultă $M_1N_1 < M_1N$. Deci:

$$MN_1^2 = MM_1^2 + M_1N_1^2 < MM_1^2 + M_1N^2 = MN^2.$$

Scanned with OKEN Scanner

Fie $EE_1 \perp BD$ și $\{O\} = AC \cap BD$. Deci minimul posibil se realizează pentru $M=E$ și $N=B_1$.

Să calculăm în funcție de a lungimea segmentului EE_1.

Avem $C_1B = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ (înălțimea triunghiului echilateral VCB de laturi a), iar aria triunghiului VCB va fi $s = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$. Prin urmare raza cercului înscris în triunghiul VCB va fi

$$r = \frac{s}{p} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{2}{3a} = \frac{a\sqrt{3}}{6}$$

și rezultă

$$BB_1 = BC_1 - 2r = \frac{a\sqrt{3}}{2} - \frac{a\sqrt{3}}{3} = \frac{a\sqrt{3}}{6}.$$

Avem $C_1O = \frac{a}{2}$ (mediană ce pornește din vîrful unghiului drept al triunghiului dreptunghic VOC).

Din asemănarea triunghiurilor dreptunghice C_1OB și EE_1B rezultă

$$\frac{EE_1}{C_1O} = \frac{BE}{BC_1} \text{ de unde } EE_1 = \frac{a}{2} \cdot \left(\frac{a\sqrt{3}}{6} \cdot \frac{2}{a\sqrt{3}} \right) = \frac{a}{6}.$$

Comentarii și concluzii

Prima problemă de clasa a VI-a a mai avut o soluție dată de mai mulți elevi. S-au notat cîturile cu q_1, q_2 și q_3 iar numărul căutat cu x și s-a rezolvat apoi un sistem de patru ecuații liniare cu patru necunoscute, determinîndu-se astfel numărul $x = 171$.

Cea de a doua problemă a avut o soluție elegantă dată de eleva *Rădulescu Anca Ruxandra* de la liceul industrial nr. 32 București. Se grupează schema tuturor numerelor în trei categorii de termeni și anume $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{9}$, $\frac{1}{11} + \ldots + \frac{1}{88}$ și $\frac{1}{89} + \frac{1}{91} + \ldots + \frac{1}{999}$ și se arată că fiecare categorie de termeni este strict mai mică decît 5, respectiv 8 și 9.

Soluții remarcabile au mai dat elevii *Tărnăuceanu Marius*, Șc. gen. nr. 8 din Bîrlad (jud. Vaslui) și *Laza George* de la Liceul „Ion Slavici" din Arad.

Cea de a treia problemă, pe lîngă soluția dată, a mai avut unele soluții ce au discutat în anumite cazuri posibilitatea sau imposibilitatea problemei.

Lucrarea de geometrie de la clasa a VIII-a a vut foarte multe note mari, elevii dînd în special la problemele 1 și 3,4 soluții ingenioase, ceea ce denotă o bună înțelegere a geometriei și a eficienței manualului.

Lucrarea de algebră de la aceeași clasă a pus în evidență buna pregătire a elevilor *Iancu Aurelia Karina* de la Șc. gen. nr. 27 din Bacău, *Ungarcovici Ilie Drăgan* de la Șc. gen. nr. 26 din Timișoara (aceștia obținînd nota maximă), *Cojocaru Alin Dan* de la Șc. gen. nr. 7 din Botoșani, *Dumitru Dan Mihai* de la Lic. „N. Bălcescu" din Craiova (jud. Dolj), *Stanciu Adrian* de la Șc. gen. nr. 1 din Măcin (jud. Tulcea) și *Castravel Ana Maria* de la Șc. gen. nr. 30 din Brăila.

Lucrarea de geometrie de la clasa a VIII-a a fost rezolvată complet de elevii *Slessar Vladimir* de la școala generală nr. 18 din Craiova (jud. Dolj) și de *Birsan Mircea* de la Liceul „Negruzzi" din Iași, care din păcate au avut lucrări mai slabe la algebră. Soluții foarte bune au avut și elevii *Todor Radu*, de la Liceul pedagogic din Brașov, *Huți Mihaela* de la Șc. gen. nr. 7 din Botoșani, *Ionescu Adrian* de la Șc. gen. 278 din București.

La algebră lucrări foarte bune au avut elevii *Todor Radu* de la Liceul pedagogic din Brașov, *Lucan Anca* de la Șc. gen. nr. 7 Botoșani, *Brașoveanu Viorel* de la Șc. gen. nr. 4

Scanned with OKEN Scanner

Țăndărei (jud. Ialomița), *Bădifoiu Gabriel* de la Șc. nr. 1 Roșiorii de Vede (jud. Teleorman) și *Zugravu Alexandru* de la Șc. nr. 10 din Pitești (jud. Argeș).

Elevii participanți la faza națională a concursului de matematică din gimnaziu au dat dovadă de o bună pregătire, mărturie fiind și rezultatele strînse ce au departajat în special pe elevii claselor a șaptea și a opta, cît și mediile ridicate obținute de județele participante.

Sugerăm că ar fi utilă o modificare a regulamentului de concurs în sensul că ar trebui stabilite criterii mai largi în acordarea premiilor (de exemplu, între 9^{75}—10 premiul I pentru toți elevii ce îndeplinesc această condiție, apoi pentru mediile 9^{50}—9^{75} să se acorde premiul II și pentru mediile cuprinse între 9^{25}—9^{50} să se acorde premiul III, menținîndu-se actualul criteriu că premiul întîi să fie obținut cu o medie de cel puțin 9^{50}.

ELEVII DE GIMNAZIU PREMIAȚI LA CONCURSUL DE MATEMATICĂ ETAPA FINALĂ (PE ȚARĂ) — BRAȘOV 1988

Clasa a VI-a

1.	*Rădulescu Anca*, Lic. ind. nr. 32 București	Premiul I	10,00
2.	*Dumitrescu Oana*, Șc. gen. 201 București	Premiul II	9,66
3.	*Stanciu Anca*, Șc. gen. nr. 10 Călărași	Premiul II	9,66
4.	*Radu Cristian*, Șc. gen. nr. 23 Brăila	Premiul II	9,66
5.	*Santa Ionel*, Șc. gen. nr. 6 Botoșani	Premiul II	9,66
6.	*Constantinescu Iulian*, Șc. gen. nr. 8 Slatina	Premiul II	9,66
7.	*Șuteu Raluca*, Șc. gen. 20 Baia Mare	Premiul II	9,66
8.	*Laza George*, Lic. „Ion Slavici" Arad	Premiul II	9,66
9.	*Amurăriței Marius*, Șc. gen. nr. 13 Botoșani	Premiul III	9,33
10.	*Cosmaciuc Bogdan*, Șc. gen. nr. 3 Suceava	Premiul III	9,33
11.	*Dinică Robert*, Șc. gen. nr. 30 Ploiești	Premiul III	9,33
12.	*Burdun Constantin*, Șc. gen. nr. 26 Ploiești	Premiul III	9,33
13.	*Bădescu Ciprian*, Șc. gen. nr. 3 București	Premiul III	9,33
14.	*Földes Maria Eva*, Șc. gen. nr. 16 Oradea	Premiul III	9,33
15.	*Lungeanu Vlad*, Șc. gen. nr. 24 Galați	Premiul III	9,33
16.	*Luca Valentina*, Șc. gen. nr. 19 Sibiu	Premiul III	9,33
17.	*Petcu Dorel*, Șc. gen. nr. 5 Roman	Premiul III	9,33
18.	*Levcovici Cristian*, Șc. gen. nr. 9 Galați	Premiul III	9,33
19.	*Tărnăuceanu Marius*, Șc. gen. nr. 8 Bîrlad	Premiul III	9,33
20.	*Balogh Attila-Jenö*, Lic. mat-fiz. Sf. Gheorghe	Premiu III	9,33
21.	*Zălinescu Adrian*, Lic. „C. Negruzzi" Iași	Premiul III	9,33
	PREMII S.S.M.		
22.	*Popa Vlad Liviu*, Lic. „E. Racoviță" Iași		9,20
23.	*Arsenie Marilena*, Lic. ind. Isaccea (Tulcea)		9,16
24.	*Teci Ovidiu C-tin*, Șc. gen. 10 Tg. Mureș (Mureș)		9,16
25.	*Stîngă Valentin*, Șc. gen. nr. 9 Slatina (Olt)		9,16

Clasa a VII-a

1.	*Iancu Karina Aniela*, Șc. gen. 27 Bacău	Premiul I	9,93
2.	*Cojocaru Alin*, Șc. gen. 7 Botoșani	Premiul II	9,84
3.	*Ugarcovici Ilie*, Șc. gen. 26 Timișoara	Premiul III	9,75
	PREMII S.S.M.		
4.	*Albu Dragoș*, Șc. gen. 9 Pitești		9,57
5.	*Ionescu Mihai*, Șc. gen. 45 București		9,37
6.	*Coldea Ionuț*, Șc. gen. 23 București		9,35
7.	*Ciuclam Rafael*, Șc. *gen.* 5 Mangalia (Constanța)		9,35

Scanned with OKEN Scanner

Clasa a VIII-a

1. *Todor Radu*,	Lic. Ped. Braşov	Premiul I	9,93
2. *Huţu Mihaela*,	Şc. gen. 7 Botoşani	Premiul II	9,88
3. *Lucan Anca*,	Şc. gen. 7 Botoşani	Premiul III	9,78

Premii S.S.M.

4. *Braşovcanu Viorel*, Şc. gen. 4 Tăndărei (Ialomiţa)	9,62
5. *Bădiţoiu Gabriel*, Şc. gen. 1 Roşiorii de vede (Teleorman)	9,59
6. *Zugravu Alexandru*, Şc. gen. 10 Piteşti (Argeş)	9,53

BARAJELE DE LA CRAIOVA PENTRU ALCĂTUIREA ECHIPEI R. S. ROMÂNIA PARTICIPANTĂ LA OLIMPIADA INTERNAŢIONALĂ DE MATEMATICĂ DIN AUSTRALIA, IULIE 1988

Barajul 1 din 10 iunie 1988

1. Să se determine sistemele de n numere reale, $n \geqslant 2$, care au proprietatea că oricare dintre ele este suma inverselor celorlalte.

Mircea Becheanu

2. Se consideră în plan dreptele d_1 şi d_2. Fie $\mathscr{C}$ un cerc cu centrul pe d_1, tangent dreptei d_2 şi $\mathscr{C}_1$ un cerc tangent la d_1, d_2 şi $\mathscr{C}$. Să se afle locul geometric al punctelor de tangenţă ale cercurilor $\mathscr{C}$ şi $\mathscr{C}_1$ cînd centrul lui $\mathscr{C}$ parcurge d_1.

Mircea Becheanu

3. Fie n un număr natural, $n \geqslant 1$. Pentru orice k natural $1 \leqslant k \leqslant n$, se notează cu $a_{k,n}$ numărul tuturor şirurilor de numere naturale, de lungime k, notate $(i_1, i_2, \ldots, i_k)$ pentru care sînt verificate condiţiile:

a) $1 \leqslant i_1 < i_2 < \ldots < i_k \leqslant n$; b) $i_{s+1} - i_s \equiv 1 \pmod 2$, $(\forall)\ s = 1,2,\ldots,k-1$.

Să se determine $a(n) = \sum_{k=1}^{n} a_{k,n}$.

Ioan Tomescu

4. Să se demonstreze că pentru orice număr natural $n \geqslant 1$ numărul $\prod_{k=1}^{n} k^{2k-n-1}$ este întreg.

Laurenţiu Panaitopol

Barajul 2 din 11 iunie 1988

1. Fie $n > 2$ un număr natural. Să se determine cel mai mic număr natural $a > 0$ pentru care există polinoamele cu coeficienţi întregi $f(X)$ şi $g(X)$ astfel încît $a = (X-1)f(X) + (X^{n-1} + X^{n-2} + \ldots + X + 1)g(X)$.

Mircea Becheanu

2. Fie $x, y, z \in \mathbb{R}$ astfel încît $x + y + z = 0$. Să se arate că $|\cos x| + |\cos y| + |\cos z| \geqslant 1$.

* * *

3. Din vîrfurile unui pătrat, considerate ca centre, se descriu patru cercuri astfel încît suma ariilor lor este egală cu aria pătratului. În interiorul fiecărui cerc se alege cîte un punct. Să se demonstreze că cele patru puncte astfel alese sînt vîrfurile unui patrulater convex.

Laurenţiu Panaitopol

Scanned with OKEN Scanner

4. Fie $a \geq 1$ un număr întreg. Se consideră șirul $(x_n)_{n\geq 1}$ definit prin $x_1 = 1$, $x_2 = a$ $x_{n+2} = a\,x_{n+1} + x_n$ pentru $n \geq 1$. Să se arate că o pereche (y, x) de numere naturale nenule este soluție a ecuației $|y^2 - axy - x^2| = 1$ dacă și numai dacă există un întreg $k \geq 1$ astfel încît $(y, x) = (x_{k+1}, x_k)$.

Șerban Buzeteanu

Barajul 3 din 12 iunie 1988

1. Fie $\mathcal{T}$ mulțimea triunghiurilor din plan. Se definește funcția $f : \mathcal{T} \to \mathbf{R}_+^*$ după cum urmează: pentru orice triunghi $T_{a,b,c} \in \mathcal{T}$ de laturi $a \leq b \leq c$, $f(T_{a,b,c}) = \min\left(\frac{b}{a}, \frac{c}{b}\right)$. Să se determine mulțimea valorilor funcției f.

* * *

2. Fie $[a, b] \subset \mathbf{R}$ un interval care nu conține numere întregi. Să se arate că există $n \in \mathbf{N}^*$ astfel încît intervalul $[na, nb]$ are lungimea mai mare sau egală cu $\frac{1}{6}$ și nu conține numere întregi.

* * *

3. Se dau n mulțimi finite $A_1, A_2, \ldots, A_n$. Se notează cu $d(A_1, A_2, \ldots, A_n)$ numărul elementelor care aparțin exact unui număr impar dintre mulțimile $A_1, A_2, \ldots, A_n$. Să se demonstreze că numărul

$$d(A_1, A_2, \ldots, A_n) = \sum_{i=1}^{n} |A_i| + 2 \sum_{1\leq i<j\leq n} |A_i \cap A_j| - \ldots +$$
$$+ (-1)^k 2^{k-1} \sum_{1\leq i_1<i_2<\ldots<i_k\leq n} |A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots \cap A_{i_k}|$$

este multiplu de 2^k pentru orice $k = 1, 2, \ldots, n$.
(Se notează cu $|A|$ numărul elementelor mulțimii A).

Dragoș Popescu și *Ioan Tomescu*

PROBLEME REZOLVATE PENTRU GIMNAZIU

Clasa a V-a

Problema E : 9253 * (G.M. 10/1987, pag. 360)

Să se determine toate numerele de forma $\overline{aabb}$ $(a \neq b)$ diviziile cu numărul compus $\overline{ab}$ în a cărui descompunere se află factorul 3^{2k}, $k \in \mathbf{N}^*$.

Maria Vizuroiu, Nicolae Vizuroiu, profesori, Pitești

Soluție. Pentru că în descompunerea lui $\overline{ab}$ apare factorul 3^{2k}, $k \in \mathbf{N}^*$, rezultă că numărul k ia valorile posibile 1 sau 2. Deci $\overline{ab} \in \{2 \cdot 3^2, 2^2 \cdot 3^2, 2^3 \cdot 3^2, 2 \cdot 3^4, 5 \cdot 3^2, 5 \cdot 3^4, 7 \cdot 3^2, 7 \cdot 3^4, 11 \cdot 3^2\}$. Dacă $\overline{ab} = 2 \cdot 3^2 = 18$ atunci $\overline{aabb} = 1188$ și deoarece 1188 se divide cu 18 rezultă că numărul 188 corespunde enunțului.

Scanned with OKEN Scanner

Dacă $\overline{ab} = 2^2 \cdot 3^2 = 36$ atunci $\overline{aabb} = 3366$ număr care nu se divide cu 36.
Dacă $\overline{ab} = 2^3 \cdot 3^2 = 72$ atunci $\overline{aabb} = 7722$ număr care nu se divide cu 72.
Dacă $\overline{ab} = 2 \cdot 3^2 \cdot 5 = 90$ atunci $\overline{aabb} = 9900$ și deoarece 9900 se divide cu 90 rezultă că numărul 9900 corespunde enunțului.
Dacă $\overline{ab} = 3^2 \cdot 5 = 45$ atunci $\overline{aabb} = 4455$ și deoarece 4455 se divide cu 45 rezultă că numărul 4455 corespunde enunțului.
Dacă $\overline{ab} = 3^2 \cdot 7 = 63$ atunci $\overline{aabb} = 6633$ însă 6633 nu se divide cu 63.
Cazul $\overline{ab} = 3^2 \cdot 11 = 99$ nu este posibil deoarece $a \neq b$.
Dacă $\overline{ab} = 3^4 = 81$ atunci $\overline{aabb} = 8811$ însă numărul 8811 nu se divide cu 81.
Rezultă că numerele de forma $\overline{aabb}$ care corespund enunțului problemei sînt : {1188, 9900, 4455}.

Soluție bună au dat : *Iulian Răducan*, cl. a VI-a, Șc. gen. 8 Slatina ; *Daniela Pătrașcu*, cl. a V-a Șc. gen. 5 Tecuci ; *Raluca Simion*, cl. a V-a Lic. „Național" Iași.

Problema E : 9256 * (G.M. 10/1987, pag. 360)

Dacă $n \in \mathbf{N}$ să se demonstreze că :

$$A = 7^n \cdot 3^{n+1} + 3^n \cdot 7^{n+1} + 7 \cdot 21^n \text{ este divizibil cu } 17;$$

$$B = 5^n \cdot 7^{n+1} + 7^n \cdot 5^{n+1} + 17 \cdot 35^n \text{ este divizibil cu } 29.$$

Ion Predescu, profesor, Rast, Dolj

Soluție. Avem succesiv :

$$A = 7^n \cdot 3^n \cdot 3 + 3^n \cdot 7^n \cdot 7 + 7 \cdot (3 \cdot 7)^n =$$

$$= 7^n \cdot 3^n \cdot 3 + 3^n \cdot 7^n \cdot 7 + 7 \cdot 3^n \cdot 7^n = 3^n \cdot 7^n \cdot (3 + 7 + 7) = 3^n \cdot 7^n \cdot 17.$$

Deci A se divide cu 17.

$$B = 5^n \cdot 7^n \cdot 7 + 7^n \cdot 5^n \cdot 5 + 17 \cdot 7^n \cdot 5^n = 7^n \cdot 5^n \cdot (7 + 5 + 17) = 7^n \cdot 5^n \cdot 29.$$

Rezultă că B se divide cu 29.

Soluție bună au dat : *Andrei Păun*, cl. a VI-a, Șc. gen. 164 București ; *Ștefan Boiciuc*, cl. a VI-a, Șc. gen. 80 București ; *Iulian Răducan*, cl. a VI-a, Șc. gen. 8 Slatina.

Clasa a VI-a

Problema E : 9234 * (G.M. 9/1987, pag. 327)

Să se determine toate numerele naturale x, y, z pentru care $xy + yz + zx = 11$. (Presupunem $x \leqslant y \leqslant z$).

Aurel Ene, profesor, Rm. Vîlcea

Soluție : Să observăm că dacă $2 \leqslant x \leqslant y \leqslant z$, atunci $xy + yz + zx \geqslant 4 + 4 + 4 = 12 > 11$ și deci nu avem soluții. Prin urmare, cel puțin unul din numere este 0 sau 1. Ținînd seama de $x \leqslant y \leqslant z$, avem cazurile :

a) Dacă $x = 0$ atunci $yz = 11$, de unde obținem $y = 1$ și $z = 11$ sau $y = 11$ și $z = 1$ (aceasta nu convine, deoarece $y > z$), deci avem soluția $x = 0$, $y = 1$, $z = 11$.

b) Dacă $x = 1$, atunci $1 = x \leqslant y \leqslant z$ și ecuația dată este echivalentă cu $yz + y + z = 11$. Avem subcazurile :

i) dacă $y = 1$ atunci $z + z + 1 = 11$, de unde $2z = 10$ și $z = 5$; rezultă soluția $x = 1$, $y = 1$, $z = 5$.

ii) dacă $y = 2$ atunci $2z + 2 + z = 11$, de unde $3z = 9$, adică $z = 3$; rezultă soluția $x = 1$, $y = 2$, $z = 3$.

iii) dacă $y \geqslant 3$ rezultă $z \geqslant 3$ (deoarece $z \geqslant y$) ; atunci $yz + y + z \geqslant 9 + 3 + 3 = 15 > 11$ și deci nu avem soluții.

Prin urmare, soluțiile (x, y, z) ale ecuației sînt : (0, 1, 11), (1, 1, 5), (1, 2, 3).

Soluție bună au dat : *Peraicu Corina*, cl. a VI-a, Șc. gen. 18 Bacău ; *Lalu Anca*, cl. a VI-a, Lic. „Spiru Haret" Tulcea ; *Bîrceanu Florin*, cl. a VI-a, Șc. gen. 3 Alexandria.

Scanned with OKEN Scanner

Problema E : 9235 * (G.M. 9/1987, pag. 327)

Fie ABC un triunghi oarecare. Se notează cu E intersecția bisectoarei unghiului ABC cu perpendiculara în C pe bisectoarea unghiului ACB, cu F intersecția bisectoarei unghiului ACB cu perpendiculara în B pe bisectoarea unghiului ABC și cu D intersecția dreptelor CE și BF. Să se demonstreze că :

1) *Punctele A, E și F sînt coliniare ;*
2) *Dacă $AE \equiv AF$, atunci triunghiul ABC este isoscel ($AB \equiv AC$) ;*
3) *DEF este triunghi echilateral dacă și numai dacă ABC este triunghi echilateral.*

(În legătură cu problema IV de la faza locală a Olimpiadei de Matematică, București 1987).

Irina Albu, elevă, București

Soluție. Vom aminti în prealabil următoarele teoreme :

Teorema 1. Bisectoarea unghiului exterior unui triunghi este perpendiculară pe bisectoarea unghiului interior alăturat.

Demonstrația este imediată ținînd seama că unghiurile exterior și interior alăturat sînt suplementare.

Teorema 2. Bisectoarele a două unghiuri exterioare și bisectoarea unghiului interior opus al unui triunghi sînt concurente.

Demonstrație. Fie P intersecția bisectoarelor unghiurilor exterioare din B și C ale triunghiului ABC. Atunci $d(P, AB) = d(P, BC)$ și $d(P, AC) = d(P, BC)$, de unde $d(P, AB) = d(P, AC)$, deci AP este bisectoarea unghiului $\widehat{BAC}$.

Soluția problemei. 1) Conform T.1 rezultă că DF și DE sînt bisectoarele unghiurilor exterioare din B și respectiv C ale triunghiului ABC. Atunci, conform T.2, AD este bisectoarea unghiului $\widehat{BAC}$. Deoarece $\{E\} = BE \cap CE$ rezultă, conform T.2 că AE este bisectoarea unghiului exterior din A, de unde $AE \perp AD$, (1), conform T.1. Analog, rezultă că AF este bisectoarea unghiului exterior din A, deci $AF \perp AD$, (2). Din (1) și (2) deducem că F, A, E sînt coliniare.

2) Dacă $AE \equiv AF$ și $AD \perp EF$ rezultă că AD este mediană și înălțime în triunghiul DEF, deci triunghiul DEF este isoscel, cu $DF \equiv DE$ și $\widehat{DFE} \equiv \widehat{DEF}$. De asemenea, triunghiul DEF fiind isoscel, înălțimile FC și EB sînt congruente, de unde $FB \equiv EC$. Triunghiurile AFB și AEC sînt congruente ($AF \equiv AE$, $\widehat{AFB} \equiv \widehat{AEC}$, $FB \equiv EC$, caz L.U.L) deci $AB \equiv AC$, prin urmare triunghiul ABC este isoscel.

3) a) Dacă triunghiul DEF este echilateral, avem $DE \equiv EF \equiv FD$, $\widehat{DFE} \equiv \widehat{DEF} \equiv \widehat{FDE} = 60°$ și înălțimile DA, FC și EB sînt și mediane, prin urmare $DC \equiv CE \equiv EA \equiv AF \equiv FB \equiv BD$. Rezultă că triunghiurile BCD, ACE și ABF sînt echilaterale congruente, deci $AB \equiv AC \equiv BC$ și triunghiul ABC este echilateral.

b) Dacă triunghiul ABC este echilateral avem $AB \equiv AC \equiv BC$, $\widehat{ACB} \equiv \widehat{BAC} \equiv \widehat{ABC} = 60°$ și AD, BE și CF fiind bisectoare rezultă că $\widehat{ABE} \equiv \widehat{EBC} \equiv \widehat{BCF} \equiv \widehat{FCA} \equiv \widehat{CAD} \equiv \widehat{DAB} = 30°$.

Cum $AD \perp EF$, $BE \perp FD$ și $CF \perp DE$ deducem că $\widehat{EAC} \equiv \widehat{ECA} \equiv \widehat{BCD} \equiv \widehat{CBD} \equiv \widehat{FBA} \equiv \widehat{FAB} = 60°$. Prin urmare, triunghiurile AFB, AEC și BCD sînt echilaterale congruente, deci $AE \equiv AF \equiv FB \equiv BD \equiv DC \equiv CE$, de unde $BF \equiv FD \equiv DE$ și triunghiul DEF este echilateral.

Soluție bună au dat : *Arsenie Marilena*, cl. a VI-a, Lic. ind. Isaccea ; *Darban Oana*, cl. a VI-a, Șc. gen. 5 Tecuci ; *Mihală Lucia*, cl. a VI-a, Șc. gen. 7, Caracal.

Clasa a VII-a

Problema E : 9240 * (G.M. 9/1987, pag. 328)

Considerăm sumele :

$$S_n = \pm 1 \pm 2 \pm 3 \pm \ldots \pm n,$$

unde $n \in \mathbf{N}^*$ iar semnele $+$ și $-$ se iau în toate modurile posibile.

Scanned with OKEN Scanner

a) *Să se arate că* $|S_n| \leqslant \frac{n(n+1)}{2}$ pentru orice $n \in \mathbf{N}^*$ *și pentru orice sumă* S_n.

b) *Câți termeni are suma alternată* $S_n = 1 - 2 + 3 - 4 + \ldots - (n-1) + n$ *știind că* $S_n = 1987$?

(*Concursul de matematică, etapa județeană, Giurgiu, 1987*)

Ionel Tudor, profesor, Călugăreni, Giurgiu și *Mircea Trifu*, inspector școlar, Giurgiu

Soluția autorilor: Evident, cea mai mică sumă S_n cu $n \in \mathbf{N}^*$, se obține luînd toate semnele cu $-$ și deci:

$$s = -1 - 2 - 3 - \ldots - n,$$

iar cea mai mare sumă S_n, $n \in \mathbf{N}$, se obține luînd toate semnele cu $+$ și atunci avem suma:

$$S = 1 + 2 + 3 + \ldots + n.$$

Deci $s = -S$ și $-S \leqslant S_n \leqslant S$, de unde $|S_n| \leqslant S$, $n \in \mathbf{N}^*$, iar $S = 1 + 2 + 3 + \ldots + n$. Pentru calculul sumei S deosebim două cazuri:

1) Pentru n par, deci $n = 2k$, $k \in \mathbf{N}^*$, avem:

$$\begin{aligned} S &= 1 + 2 + 3 + \ldots + (2k-2) + (2k-1) + (2k) = \\ &= (1 + 2k) + (2 + 2k - 1) + (3 + 2k - 2) + \ldots + (k + 2k - (k-1)) = \\ &= \underbrace{(2k+1) + (2k+1) + \ldots + (2k+1)}_{\text{de } k \text{ ori}} = (2k+1)k = \frac{n(n+1)}{2}. \end{aligned}$$

2) Pentru n impar, deci $n = 2k - 1$, $k \in \mathbf{N}^*$, avem:

$$\begin{aligned} S &= 1 + 2 + 3 + \ldots + (k-1) + k + (k+1) + \ldots + (2k-3) + (2k-2) + (2k-1) = \\ &= (1 + 2k - 1) + (2 + 2k - 2) + (3 + 2k - 3) + \ldots + (k - 1 + k + 1) + k = \\ &= \underbrace{2k + 2k + \ldots + 2k}_{\text{de } (k-1) \text{ ori}} + k = 2k(k-1) + k = k(2k-1) = \frac{n(n+1)}{2}. \end{aligned}$$

Deci $S = \frac{n(n+1)}{2}$, oricare ar fi $n \in \mathbf{N}^*$ și prin urmare

$$|S_n| \leqslant \frac{n(n+1)}{2}.$$

b) Cum ultimul termen al sumei alternate S_n are semnul $+$ rezultă că el este impar și atunci $(n-1)$ este par, iar pentru $n = 2k + 1$ avem $k = \frac{n-1}{2} \in \mathbf{N}$ și avem:

$$\begin{aligned} S_n &= 1 - 2 + 3 - 4 + \ldots + (n-2) - (n-1) + n = \\ &= (1 - 2) + (3 - 4) + (5 - 6) + \ldots + (n - 2 - n - 1) + n = \\ &= \underbrace{(-1) + (-1) + \ldots + (-1)}_{\text{de } k \text{ ori}} + n = (-1)k + n = \\ &= n - k = n - \frac{n-1}{2} = \frac{n+1}{2}. \end{aligned}$$

Știind că $S_n = 1987$ obținem ecuația $\frac{n+1}{2} = 1987$, de unde $n = 3973$. Prin urmare suma S_n are 3973 termeni.

Scanned with OKEN Scanner

Problema E: 9244* (G.M. 9/1987, pag. 328)
Pe latura AB a unui triunghi dreptunghic ABC cu $AB \perp AC$ se consideră un punct M oarecare, iar pe latura AC un punct N, astfel încît $\widehat{AMN} \equiv \widehat{ACB}$. Să se afle:
1) locul geometric al mijlocului segmentului MN;
2) locul geometric al picioruluí perpendicularei din A pe MN.

Alexandru Ofel, profesor, Brașov

Soluție. 1) Fie T mijlocul segmentului MN. Avem MT mediană în triunghiul dreptunghic MAN ($\widehat{A} = 90°$), deci $\widehat{MAT} \equiv \widehat{AMN}$; dar $\widehat{AMN} \equiv \widehat{ACB}$, rezultă $\widehat{MAT} \equiv \widehat{ACB}$. Cum $\widehat{ACB} + \widehat{ABC} = 90°$ avem $\widehat{MAT} + \widehat{ABC} = 90°$. Prin urmare, triunghiul BAD (unde $\{D\} = AT \cap BC$) este dreptunghic cu $\widehat{BDA} = 90°$. Rezultă că $AT \perp BC$, deci locul geometric al punctului T este înălțimea AD a triunghiului.

2) Fie $AR \perp MN$. În triunghiul dreptunghic MAN ($\widehat{A} = 90°$) rezultă $\widehat{AMN} \equiv \widehat{RAN}$ (au același complement, pe $\widehat{MAR}$); dar $\widehat{AMN} \equiv \widehat{ACB}$ deci $\widehat{RAN} \equiv \widehat{ACB}$. Notînd $AR \cap BC = \{E\}$ rezultă că triunghiul AEC este isoscel, cu $AE \equiv EC$ și mai rezultă că $\widehat{ABE} \equiv \widehat{BAE}$ (au complemente unghiuri congruente) deci și triunghiul ABE este isoscel cu $AE \equiv BE$.

Din $AE \equiv BE$ și $AE \equiv EC$ rezultă $BE \equiv EC$, deci AE este mediană în triunghiul dreptunghic ABC.

Prin urmare, locul geometric al piciorului perpendicularei din A pe MN este mediana AE a triunghiului.

Soluție bună au dat: *Sava Clement*, cl. a VII-a, Șc. gen. 18 Bacău; *Sechei Adina*, cl. a VIII-a, Șc. gen. 2 Dej.

Clasa a VIII-a

Problema E: 9224* (G.M. 7–8/1987, pag. 282)
Se dă:

$$E(x) = x^2 + \frac{1}{x^4} + \frac{1}{x^2} + x^4 + \left(x^3 + \frac{1}{x^3}\right) \cdot \frac{x^3 + 3x + \frac{1}{x^3} + \frac{3}{x}}{x^2 + \frac{1}{x^2} - 1}.$$

Știind că a este soluție a ecuației $x + \frac{1}{x} = 3$ să se calculeze $E(a)$.

Ion M. Trică, institutor, Curtea de Argeș

Soluție. Expresia se poate scrie:

$$E(x) = \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + \left(x^4 + \frac{1}{x^4}\right) + \left(x^3 + \frac{1}{x^3}\right) \cdot \frac{x^3 + \frac{1}{x^3} + 3\left(x + \frac{1}{x}\right)}{x^2 + \frac{1}{x^2} - 1}.$$

Avem:

$$\left.\begin{aligned} \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 &= x^2 + 2 + \frac{1}{x^2} \\ \text{dar } \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 &= 3^2 = 9 \end{aligned}\right\} \Rightarrow x^2 + 2 + \frac{1}{x^2} = 9 \Leftrightarrow x^2 + \frac{1}{x^2} = 7, \qquad (1)$$

$$\left.\begin{aligned}&\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)^2=x^4+2+\frac{1}{x^4}\\ &\text{dar}\quad \left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)^2=7^2=49\end{aligned}\right\}\Rightarrow x^4+2+\frac{1}{x^4}=49\Leftrightarrow x^4+\frac{1}{x^4}=47, \qquad (2).$$

$$\left.\begin{aligned}&\left(x+\frac{1}{x}\right)^3=x^3+\frac{1}{x^3}+3x+\frac{3}{x}=x^3+\frac{1}{x^3}+3\left(x+\frac{1}{x}\right)=x^3+\frac{1}{x^3}+3\cdot 3=x^3+\frac{1}{x^3}+9\\ &\text{dar}\quad \left(x+\frac{1}{x}\right)^3=3^3=27\end{aligned}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^3+\frac{1}{x^3}+9=27\Leftrightarrow x^3+\frac{1}{x^3}=18, \qquad (3).$$

Ținînd seama de (1), (2) și (3) obținem:

$$E(a)=\left(a^2+\frac{1}{a^2}\right)+\left(a^4+\frac{1}{a^4}\right)+\left(a^3+\frac{1}{a^3}\right)\cdot\frac{a^3+\frac{1}{a^3}+3\left(a+\frac{1}{a}\right)}{a^2+\frac{1}{a^2}-1}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow E(a)=7+47+18\cdot\frac{18+3\cdot 3}{7-1}\Leftrightarrow E(a)=54+18\cdot\frac{27}{6}\Leftrightarrow E(a)=54+81,$$

deci $E(a)=135$.

Soluție dată de *Simona Câmpian*, cl. a VIII-a, Lic. ind. 8 Baia Mare; *Topan Liana*, cl. a IX-a, Lic. ind. „A. Mureșanu" Dej.

PROBLEME REZOLVATE PENTRU LICEU

Clasa a IX-a

Problema 21206 * (G.M. 9/1987, pag. 330)

Într-un triunghi oarecare ABC se duce mediana AD și fie E, F mijloacele laturilor (AB), respectiv (AC). Notăm cu $M\in(AB)$ și $N\in(AC)$ picioarele bisectoarelor unghiurilor $\widehat{BDA}$, respectiv $\widehat{ADC}$. Se consideră intersecțiile: $\{O\}=AD\cap MN$, $\{P\}=AB\cap FO$ și $\{R\}=AC\cap EO$. Să se arate că $(PR)\equiv(AD)$.

Nicolae Oprea, profesor, Livada, Satu Mare

Soluție. În triunghiurile ADB și ADC aplicăm teorema bisectoarei și rezultă că $\frac{MB}{AM}=\frac{BD}{AD}$ respectiv $\frac{NC}{AN}=\frac{DC}{AD}$. Dar $BD=DC$ deci $\frac{MB}{AM}=\frac{NC}{AN}$ adică $MN\parallel BC$. Deoa-

vece $MN \parallel BC$ rezultă că $\frac{AB}{AM} = \frac{BC}{MN}$. Din această relație și din relația $\frac{MB}{AM} = \frac{BD}{AD}$ rezultă că

$$\frac{BD + AD}{AD} = \frac{BD}{AD} + 1 = \frac{MB}{AM} + 1 = \frac{MB + AM}{AM} = \frac{AB}{AM} = \frac{BC}{MN},$$

deci $$\frac{BD + AD}{AD} = \frac{BC}{MN}, \quad (1).$$

Dar EF este linie mijlocie în triunghiul ABC, deci $EF \parallel BC$, $BD = EF$ și $BC = 2EF$. Din aceste relații împreună cu (1) obținem că

$$\frac{BD + AD}{AD} = \frac{BC}{MN} \Leftrightarrow \frac{BD + AD}{AD} = \frac{2EF}{MN} \Leftrightarrow \frac{2}{MN} = \frac{BD + AD}{AD \cdot EF} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{MN} = \frac{1}{AD} + \frac{1}{EF}, \quad (2).$$

Deoarece $MN \parallel BC$ și $EF \parallel BC$ rezultă că $EF \parallel MN$, deci $\frac{AE}{EM} = \frac{AF}{FN}$, (3).

Pe de altă parte, aplicînd teorema lui *Menelaus* triunghiului AMN cu transversalele ER, respectiv PF, obținem că

$$\frac{AR}{NR} = \frac{AE}{EM} \cdot \frac{MO}{ON} \text{ respectiv } \frac{AP}{MP} = \frac{AF}{FN} \cdot \frac{MO}{ON},$$

și ținînd cont de relația (3) obținem că $\frac{AP}{MP} = \frac{AR}{NR}$ adică $PR \parallel MN$.

Dar $MN \parallel EF$ deci patrulaterul $EPRF$ este trapez. Deoarece EF este paralelă cu bazele trapezului prin punctul de intersecție al diagonalelor, rezultă că $\frac{1}{PR} + \frac{1}{EF} = \frac{2}{MN}$, deci, conform relației (2) obținem că $\frac{1}{PR} = \frac{1}{AD}$, adică $PR \equiv AD$.

Soluție bună au dat: *Medrea Ioana*, cl. a IX-a, Lic. „Horia, Cloșca și Crișan" Alba Iulia; *Ștefu Ștefania*, cl. a IX-a, Lic. „N. Bălcescu" Pitești; *Schmoll Ingrid*, cl. a IX-a, Lic. ind. „Unirea" Focșani.

Problema 21211 * (G. M. 9/1987, pag. 331)

În triunghiul isoscel ABC ($AB = AC$), $m(\hat{A}) = 80°$. Bisectoarele unghiurilor $\widehat{ACO}$, $\widehat{ABO}$ intersectează dreptele BO și CO în D, respectiv E (O este centrul cercului circumscris triunghiului ABC). Să se arate că triunghiul ADE este echilateral.

Doru Isac, profesor, Sibiu

Soluție. Fie $\{P\} = BE \cap AO$ și $\{Q\} = CO \cap AB$. Deoarece $m(\hat{A}) = 80°$ rezultă că $m(\widehat{BOC}) = 160°$, deci $m(\widehat{OBC}) = m(\widehat{OCB}) = 10°$. Dar $m(\widehat{APB}) = m(\widehat{APC}) = 180° - \frac{1}{2} m(\hat{A}) - m(\widehat{ABP})$, deci $m(\widehat{APB}) = m(\widehat{APC}) = 120°$. Rezultă că patrulaterul $AQEP$ este inscriptibil deci $m(\widehat{AEP}) = m(\widehat{AQP})$, (1). Pe de altă parte $m(\widehat{APB}) = m(\widehat{APC}) = m(\widehat{BPC}) = 120°$ și

$m(\widehat{BQC}) = 120°$ deci patrulaterul $BQPC$ este inscriptibil. Rezultă că $m(\widehat{AQP}) = m(\widehat{PCB}) = 30°$, deci conform (1) avem că $m(\widehat{AEP}) = 30°$, (2).

Dar patrulaterul $BCDE$ este trapez isoscel, deci $m(\widehat{PED}) = m(\widehat{PBC}) = 30°$, (3). Din relațiile (2) și (3) rezultă că $m(\widehat{AED}) = m(\widehat{AEP}) + m(\widehat{PED}) = 60°$, adică $m(\widehat{AED}) = 60°$. Analog se arată că $m(\widehat{ADE}) = 60°$, deci triunghiul AED este echilateral.

Soluție bună au dat: *Bălăeti Marius*, cl. a IX-a, Lic. „Unirea" Focșani; *Bara Gabriela*, cl. a IX-a, Lic. „N. Bălcescu" București; *Costea Viorel*, cl. a IX-a, Lic. mat. fiz. Zalău.

Clasa a X-a

Problema 21240 * (G.M. 10/1987, pag. 364)

Fie ABC un triunghi isoscel, $(AB) \equiv (AC)$, în care $m(\widehat{BAC}) = 36$ și $BC = a$, $AB = AC = b$, $a < 2b$. Arătați că $a^4 + b^4 = 3a^2b^2$.

Nicolae Soare, asist. univ., București

Soluție. Avem egalitățile: $\operatorname{ctg}^2 36° \cdot \operatorname{ctg}^2 72° = (\operatorname{ctg}^2 36° \cdot \operatorname{ctg}^2 72° - 1) + 1 = \frac{\cos 108° \cdot \cos 36°}{\sin^2 36° \cdot \sin^2 72°} + 1 = 1 - (\operatorname{ctg} 36° \cdot \operatorname{ctg} 72°)^2 \cdot \frac{1}{\cos 36° \cdot \cos 72°} = 1 - \operatorname{ctg}^2 36° \cdot \operatorname{ctg}^2 72° \cdot \frac{2 \cdot 2 \sin 36°}{\sin 144°} = 1 - 4 \operatorname{ctg}^2 36° \cdot \operatorname{ctg}^2 72°$ de unde rezultă că $5 \operatorname{ctg}^2 36° \cdot \operatorname{ctg}^2 72° = 1$ deci $\operatorname{tg}^2 36° \cdot \operatorname{tg}^2 72° = 5$.

Se obțin cu ușurință relațiile:

$$AD = \frac{\sqrt{4b^2 - a^2}}{2}, \quad BE = \frac{a\sqrt{4b^2 - a^2}}{2b}, \quad AE = \frac{2b^2 - a^2}{2b} \text{ de unde}$$

$$\operatorname{tg} 36° = \frac{a\sqrt{4b^2 - a^2}}{2b^2 - a^2}, \quad \operatorname{tg} 72° = \frac{\sqrt{4b^2 - a^2}}{a}.$$

Dar $\operatorname{tg}^2 36° \cdot \operatorname{tg}^2 72° = 5$, atunci înlocuind obținem:

$\frac{a^2(4b^2 - a^2)}{(2b^2 - a^2)^2} = 5\frac{a^2}{4b^2 - a^2}$, relație echivalentă cu relația $a^4 + b^4 = 3a^2b^2$.

Soluție bună au dat: *Petrea Adrian*, cl. a X-a, Lic. „Unirea" Focșani.

Clasa a XI-a

Problema 21220 * (G.M. 9/1987, pag. 332)

Fie șirul $(a_n)_{n \geq 1}$, unde $a_n = \frac{1^2C_{2n}^1 + 2^2C_{2n}^2 + \ldots + n^2C_{2n}^n}{(n+1)^2C_{2n}^{n+1} + \ldots + (2n)^2C_{2n}^{2n}}$.

Să se calculeze $\lim_{n \to \infty} a_n$.

Traian Dara, profesor, Jara, Cluj

Soluție. Mai întâi vom demonstra că

$$\sum_{k=2}^{n} kC_{2n}^k = 2n \cdot 2^{2n-2} - 2n; \quad (1).$$

Scanned with OKEN Scanner

Pentru aceasta dăm lui k valorile 1,2, ..., n în formula $kC_{2n}^{k} = 2n\,C_{2n-1}^{k-1}$ și adunăm egalitățile obținute. Rezultă

$$\sum_{k=1}^{n} kC_{2n}^{k} = 2n \sum_{k=1}^{n} C_{2n-1}^{k-1}.$$

Dar $\sum_{k=1}^{2n} C_{2n-1}^{k-1} = 2^{2n-1}$ sau, ținînd cont de formula combinărilor complementare, $2\sum_{k=1}^{n} C_{2n-1}^{k-1} = 2^{2n-1}$.

Deci $\sum_{k=2}^{n} kC_{2n}^{k} = 2n \cdot 2^{2n-2}$ și $\sum_{k=2}^{n} kC_{2n}^{k} = 2n \cdot 2^{2n-2} - 2n$, adică (1).

Mai avem și $\sum_{k=0}^{2n-2} C_{2n-2}^{k} = 2^{2n-2}$, de unde $2\sum_{k=0}^{n-2} C_{2n-2}^{k} + C_{2n-2}^{n-1} = 2^{2n-2}$ (am avut în vedere aceeași formulă a combinărilor complementare). Obținem

$$\sum_{k=0}^{n-2} C_{2n-2}^{k} = 2^{2n-3} - \frac{1}{2} \cdot \frac{(2n-2)!}{[(n-1)!]^2}, \qquad (2)$$

În formula $k(k-1)C_{2n}^{k} = 2n(2n-1)C_{2n-2}^{k-2}$, (3), dăm lui k valorile 2, 3, ..., n și însumăm. Rezultă

$$\sum_{k=2}^{n} k^2 C_{2n}^{k} - \sum_{k=2}^{n} kC_{2n}^{k} = 2n(2n-1) \cdot \sum_{k=0}^{n-2} C_{2n-2}^{k}, \qquad (4)$$

Utilizînd formulele (1) și (2), din (4) găsim

$$\sum_{k=2}^{n} k^2 C_{2n}^{k} = 2n \cdot 2^{2n-2} - 2n + 2n(2n-1)\,2^{2n-3} - \frac{1}{2} \cdot \frac{(2n)!}{[(n-1)!]^2} \text{ sau}$$

$$k^2 \cdot C_{2n}^{k} = n(2n+1)2^{2n-2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{(2n)!}{[(n-1)!]^2}, \qquad (5)$$

Tot în (3) dăm lui k valorile 2,3, ..., 2n, adunăm și găsim

$$\sum_{k=2}^{2n} k^2 C_{2n}^{k} - \sum_{k=2}^{2n} kC_{2n}^{k} = 2n(2n-1) \sum_{k=2}^{2n} C_{2n-2}^{k-2}.$$

Dar $\sum_{k=2}^{2n} kC_{2n}^{k} = 2n \cdot 2^{2n-1}$ (vezi Algebra cl. a X-a pag. 71, ex. 11 c), iar $\sum_{k=2}^{2n} C_{2n-2}^{k-2} = 2^{2n-2}$. Rezultă

$$\sum_{k=2}^{2n} k^2 \cdot C_{2n}^{k} = 2n(2n-1)\,2^{2n-2} + 2n \cdot 2^{2n-1} - 2n \text{ sau}$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 C_{2n}^{k} = 2n(2n+1)2^{2n-2} \text{ sau}$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 C_{2n}^{k} + \sum_{k=n+1}^{2n} k^2 C_{2n}^{k} = 2n(2n+1)2^{2n-2}$$

și folosind (5) se obține

$$\sum_{k=n+1}^{2n} k^2 \cdot C_{2n}^{k} = n(2n+1)2^{2n-2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{(2n)!}{[(n-1)!]^2}. \qquad (6)$$

Scanned with OKEN Scanner

Din (5) și (6) avem

$$a_n = \frac{n(2n+1)\cdot 2^{2n-2} - \frac{1}{2}\cdot\frac{(2n)!}{[(n-1)!]^2}}{n(2n+1)\cdot 2^{2n-2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{(2n)!}{[(n-1)!]^2}}.$$

Pentru a calcula limita șirului $(a_n)_{n\geq 1}$, împărțim numărătorul și numitorul fracției ce reprezintă pe a_n cu $n(2n+1)\cdot 2^{2n-2}$.

Notăm $b_n = \frac{(2n-2)!}{[(n-1)!]^2\cdot 2^{2n-2}}$ și a_n la forma $a_n = \frac{1 - \frac{2n(2n-1)}{2n(2n+1)}\cdot b_n}{1 + \frac{2n(2n-1)}{2n(2n+1)}\cdot b_n}$

iar b_n se mai scrie:

$$b_n = \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n-3)\cdot(1\cdot 2)(2\cdot 2)(2\cdot 3)\cdot\ldots\cdot 2(n-1)}{(n-1)!\,(n-1)!\,2^{n-1}\cdot 2^{n-1}} =$$

$$= \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n-3)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot(n-1)2^{n-1}} = \frac{1\cdot 3\cdot 5\ldots\cdot(2n-3)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot\ldots\cdot(2n-2)} =$$

$$= \sqrt{\frac{1\cdot 3}{2^2}\cdot\frac{3\cdot 5}{4^2}\cdot\frac{5\cdot 7}{6^2}\cdot\ldots\cdot\frac{(2n-5)\cdot(2n-3)}{(2n-4)^2}\cdot\frac{(2n-3)}{(2n-2)^2}} <$$

$$< \sqrt{1\cdot 1\cdot 1\cdot\ldots\cdot 1\cdot\frac{1}{2n-2}} = \frac{1}{\sqrt{2n-2}}.$$

Am folosit $\frac{(2k-1)(2k+1)}{(2k)^2} = \frac{(2k)^2-1}{(2k)^2} < 1$, unde luăm pe $k = 1, 2, 3, \ldots, n-2$.

Rezultă că $\lim\limits_{n\to\infty} b_n \leqslant \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{2n-2}} = 0$.

Pe de altă parte $b_n > 0$ pentru orice $n > 1$ și deci $\lim\limits_{n\to\infty} b_n \geqslant 0$.

Găsim $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$ iar $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \frac{1-1\cdot 0}{1+1\cdot 0} = 1$.

Soluție bună au dat: *Brustur Horia*, cl. a XI-a, Lic. „Gh. Lazăr" Sibiu; *Safta Cosmin*, cl. a XI-a, Lic. mat. fiz. 1 București.

Clasa a XII-a

Problema 21256 * (G.M. 10/1987, pag. 367)

Să se calculeze limita șirului (a_n) *dat de:*

$$a_n = \frac{\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{n^k}{k+1}\cdot C_n^k}{n^{n-1}},\ n\in\mathbf{N}^*.$$

Gh. Neagu, profesor, Bacău

Soluția autorului. Fie funcția $f:[0,1]\to\mathbf{R}$ dată de $f(x) = (1+nx)^n$.

Avem:

$$\int_0^1 (1+nx)^n\,dx = \int_0^1 (C_n^n n^n x^n + C_n^{n-1}\cdot n^{n-1}\cdot x^{n-1} + \ldots + C_n^1 n^1\cdot x^1 + C_n^0)dx =$$

$$= C_n^n \cdot n^n \int_0^1 x^n \, dx + C_n^{n-1} \cdot n^{n-1} \int_0^1 x^{n-1} \, dx + \ldots + C_n^1 n \int_0^1 x \, dx + C_n^0 \int_0^1 1 \, dx =$$

$$= C_n^n \cdot \frac{n^n}{n+1} + C_n^{n-1} \cdot \frac{n^{n-1}}{n} + \ldots + C_n^1 \cdot \frac{n}{2} + C_n^0.$$

Pe de altă parte, efectuînd schimbarea de variabilă $1+nx = t$, $x = \frac{t-1}{n}$, avem:

$$\int_0^1 (1+nx)^n \, dx = \int_1^{n+1} t^n \cdot \frac{1}{n} \, dt = \frac{1}{n} \cdot \frac{t^{n+1}}{n+1} \Bigg|_1^{n+1} = \frac{(n+1)^{n+1}-1}{n(n+1)}.$$

Deci am obținut identitatea:

$$C_n^n \cdot \frac{n^n}{n+1} + C_n^{n-1} \cdot \frac{n^{n-1}}{n} + \ldots + C_n^1 \cdot \frac{n}{2} + C_n^0 = \frac{(n+1)^{n+1}-1}{n(n+1)}.$$

Rezultă că

$$a_n = \frac{(n+1)^{n+1}-1}{n^n(n+1)} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n - \frac{1}{n^n(n+1)}.$$

Deci $\lim a_n = e$.

Soluție bună au dat: *Jugănaru Ion*, cl. a XII-a, Lic. ind. Strehaia.

PROBLEME PENTRU CICLUL PRIMAR

65. M-am gîndit la un număr. Dacă am adăugat o sută, am aflat un număr format din 8 unități, 2 sute și 3 mii. Care este numărul la care m-am gîndit?

Piroska Miklos, învățătoare, Tg. Lăpuș

66. Ioana și Călin au rezolvat 35 probleme împreună. Ce număr de probleme a rezolvat fiecare, dacă Ioana a rezolvat de două ori și jumătate mai multe probleme decît colegul său Călin?

Ana Boga, învățătoare, Tg. Lăpuș

67. Să se calculeze suprafața unei grădini, știind că ea are formă dreptunghiulară cu lungimea gardului ce o împrejmuiește de 140 m și că lungimea grădinii întrece cu 14 m lățimea sa.

Lucreția Pop, profesoară, Răzoare

68. Cinci elevi de la Tg. Lăpuș pleacă în excursie la Baia Mare, avînd asupra lor sumele de 90 lei, 120 lei, 115 lei, 140 lei și 100 lei. Ei cheltuiesc în oraș aceeași sumă fiecare. La întoarcere constată că mai au împreună 140 lei. Să se afle cîți lei cheltuiește fiecare elev în oraș și cu cîți lei mai rămîne fiecare elev?

Regina Demian, învățătoare, Tg. Lăpuș

69. Două brigăzi de la S.M.A. Tg. Lăpuș au în total 18 tractoare. Ele au arat în campania agricolă de toamnă în 8 zile o suprafață de 656 ha

teren arabil. Un tractor din prima brigadă ară 4 ha pe zi iar unul din brigada a doua 5 ha pe zi. Cîte tractoare sînt în fiecare brigadă?

Rodica Roman, învățătoare, Tg. Lăpuș

70. Reconstituiți înmulțirea $\overline{abc} \times 3 = \overline{bcc}$.

Vasile Berinde, matematician, Baia Mare

71. Trei elevi au culeș 94 alune. Cîte alune a culeș fiecare, dacă primul și al doilea au culeș 57 alune, iar al doilea și al treilea 64 alune?

Rodica Pop, învățătoare, Tg. Lăpuș

72. Numerele a, b, c satisfac egalitățile:

$$a + b = 100 \text{ și } b + c = 70.$$

Să se calculeze $a - c$.

* * *

PROBLEME PENTRU GIMNAZIU

Clasa a V-a

E : 9515. Cîți elevi sînt în clasa a V-a A a Școlii cu cl. I—X Lăpuș știind că formînd grupe din cîte o fată și un băiat rămîn 8 fete, iar dacă formăm grupe din cîte 3 fete și un băiat rămîn 4 băieți?

Vasile Nedea, profesor, Lăpuș, Maramureș

E : 9516*. Determinați cifrele a, b, c consecutive astfel încît numărul

$$\overline{abc} + \overline{acb} + \overline{bac} + \overline{bca} + \overline{cab} + \overline{cba}$$

să fie divizibil cu 30.

Vasile Nedea, profesor, Lăpuș, Maramureș

E : 9517. Un număr natural scris în baza zece sau în baza opt este format din trei cifre a căror sumă este 14. Să se afle numărul.

Tânde N. Ravai, profesor, Baia Mare

E : 9518*. Determinați cifrele a, b, c, d pentru care

$$\overline{abcd} = \overline{cd} \cdot \overline{bcd}.$$

Vasile Berinde, matematician, Baia Mare

E : 9519*. 1) Să se arate că fracția $\dfrac{4a+1}{4a^2+2a}$ este ireductibilă pentru orice $a \in \mathbf{N}^*$.

2) Scrieți fracția dată ca sumă de două fracții ireductibile și calculați diferența lor.

Oana Dochia, profesoară, Tg. Lăpuș

Scanned with OKEN Scanner

E : 9520. Să se calculeze perimetrul unui dreptunghi care are aria de 375 m² iar lățimea este $\frac{3}{5}$ din lungime.

Lucreția Pop, profesoară, Răzoare

Clasa a VI-a

E : 9521*. Să se arate că dacă numerele întregi a, b, c, d sînt nedivizibile cu 5, atunci numărul :

$$A = 4a^4 + 8b^8 + 12c^{12} + 16d^{16}$$

este divizibil cu 5.

Ștefan Sabău, profesor, Baia Mare

E : 9522. Determinați numerele $\overline{abc}$ pentru care

$$3 \cdot \sqrt{\overline{a,(bc)} + \overline{b,(ca)} + \overline{c,(ab)}} = \overline{ab}.$$

Vasile Berinde, matematician, Baia Mare

E : 9523. Să se demonstreze că diferența dintre nu număr natural de patru cifre $\overline{abcd}$ scris în baza zece și răsturnatul lui este divizibilă cu 33, dacă $a - d = b - c$.

Aurica Nechita, profesoară, Tg. Lăpuș

E : 9524. Dacă între numerele întregi a, b, c are loc relația $7a - 5b + 28c = 0$ atunci $b(a - c)$ este divizibil cu 35.

Ioan Ungur, elev, Lăpuș

E : 9525*. În triunghiul ABC, în care $m(\widehat{ABC}) = 2 \cdot m(\widehat{ACB})$ se duce bisectoarea BB', $B' \in (AC)$.

1) Dacă $B'M$ este mediana corespunzătoare laturii BC a triunghiului $B'BC$, $M \in (BC)$ și B'' este simetricul punctului B' față de M, să se demonstreze că patrulaterul $B'BB''C$ este un romb.

2) Dacă $m(\widehat{ACB}) = 30°$ să se demonstreze că $BB'' = B'B''$.

3) Să se demonstreze că dacă $B'M \parallel AB$, atunci patrulaterul $B'BB''C$ este un pătrat.

Gheorghe Pop, profesor, Suciu de Sus

E : 9526*. Știind că într-un poligon convex cu toate unghiurile congruente se pot duce 35 de diagonale, să se calculeze măsura unui unghi al poligonului.

Oana Dochia, profesoară, Tg. Lăpuș

Clasa a VII-a

E : 9527*. Să se rezolve în mulțimea numerelor naturale ecuația :

$$3^x + 3^y = 738, \; x < y.$$

Vasile Nedea, profesor, Lăpuș, Maramureș

Scanned with OKEN Scanner

E : 9528. a) Exprimați cu ajutorul modulelor următoarele inegalități :

1) $b - 8 < a < b + 8$;
2) $-2 < a < 6$;
3) $a \geqslant 5 - b$, $a \leqslant -b - 5$;

b) Rezolvați :

1) $|x + 3| \geqslant 3$.
2) $|x - 2| \leqslant 1$.

Ioan Boga, profesor, Tg. Lăpuș, Maramureș

E : 9529. Să se determine mulțimea M și $\mathscr{P}(M)$ (mulțimea părților mulțimii M) știind că elementele mulțimii M sînt soluțiile ecuației

$$\left(\frac{3x+1}{x-2}\right)^2 + \left(\frac{x+a}{2x+3a}\right)^2 = -9x^2 - 6x - 1, \quad a \in \mathbf{R}.$$

Ioan Boga, profesor, Tg. Lăpuș, Maramureș

E : 9530*. În triunghiul dreptunghic ABC avem $m(\hat{A}) = 90°$ și $m(\hat{C}) = 30°$. Prelungim mediana AM cu $MD = 2AM$ și ipotenuza BC cu $CE = AB = a$. Dacă $AE \cap BD = \{F\}$ și N este mijlocul lui DE să se demonstreze că :

1) punctele F, M, N sînt coliniare ;
2) patrulaterul $ABDE$ este inscriptibil ;
3) Exprimați aria triunghiului EDF cu ajutorul ariei triunghiului ABC ;
4) Verificați dacă problema rămîne adevărată în cazul în care prelungim BC cu $BE = AB = a$ și $AE \cap DC = \{F\}$.

Ștefan Sabău, profesor, Baia Mare

E : 9531*. Să se demonstreze că într-un triunghi oarecare ABC avem inegalitatea :

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b} \geqslant \sin\frac{A}{2} + \sin\frac{B}{2} + \sin\frac{C}{2}.$$

Laszlo Balog, inginer, Baia Mare

E : 9532. Un trapez dreptunghic $ABCD$ este format din două triunghiuri isoscele care au ca latură comună diagonala $AC = a\sqrt{2}$. Să se calculeze cealaltă diagonală și laturile trapezului.

Ștefan Sabău, profesor, Baia Mare

Clasa a VIII-a

E : 9533*. Pe muchiile AB, BC, CD și DA ale unui tetraedru regulat $ABCD$ se iau punctele M, N, P și respectiv Q astfel încît să avem $AM \equiv BN \equiv CP \equiv DQ$. Notăm cu O mijlocul segmentului NQ. Să se demonstreze că planul MOP este perpendicular pe dreapta NQ.

Ioan Ungur, profesor, Lăpuș

Scanned with OKEN Scanner

E : 9534. Dacă a, b, c, d sînt numere reale pozitive, să se demonstreze inegalitatea :

$$\frac{1}{(ab)^2+(bc)^2+(ca)^2+abcd}+\frac{1}{(ab)^2+(bd)^2+(da)^2+abcd}+$$

$$+\frac{1}{(ad)^2+(dc)^2+(ca)^2+abcd}+\frac{1}{(db)^2+(bc)^2+(cd)^2+abcd}\leqslant\frac{1}{abcd}.$$

Laszlo Balog, inginer, Baia Mare

E : 9535. Să se arate că nici un număr de forma n^2+2^n, $n\in\mathbf{N}^*$, nu se divide cu 7.

Tudor Lese, profesor, Baia Mare

E : 9536. Să se afle numerele naturale care au 8 divizori, suma divizorilor fiind 3984.

Adrian Cindrea, profesor, Bistriţa-Năsăud

E : 9537*. Fie a, b, c, d numere reale pozitive. Arătaţi că :

$$\sqrt{a^2+c^2}+\sqrt{b^2+d^2}>\frac{2\sqrt{2}}{\frac{1}{a+b}+\frac{1}{c+d}}.$$

Gheorghe Marghescu

E : 9538*. Să se arate că pentru orice $m\in\mathbf{N}^*$ ecuaţiile :

a) $x^2+y^2=z^{2m}$; b) $x^{2m}+y^{2m}=z^2$,

nu au soluţii în mulţimea numerelor prime.

Teodor Bănică, elev, Bucureşti

PROBLEME PRELIMINARE DE TIP O.I.M. PENTRU ELEVII DIN GIMNAZIU

O.G : 79. Să se demonstreze că pentru $n, k\in\mathbf{N}^*$ expresiile

$$n^2+2k^2 \text{ şi } 3^n+k^3$$

nu pot fi simultan numere prime.

I. Cucurezeanu, Constanţa

O.G : 80. Să se determine cifrele a, b, c, d, e care să îndeplinească condiţiile :

1) $\overline{ab}+\overline{bc}+\overline{cd}+\overline{de}=(b+c+d+e)^2$,

2) $a>b>c>d>e$.

Dana Paponiu, profesoară, Drobeta Tr. Severin

Scanned with OKEN Scanner

Clasa a IX-a

21541. Într-un triunghi ABC se consideră cevienele (AA'), (BB'), (CC') concurente în P. Dacă este îndeplinită una din condițiile:
1) Patrulaterele $ABA'B'$ și $ACA'C'$ sînt inscriptibile;
2) $PA \cdot PA' = PB \cdot PB' = PC \cdot PC'$,
atunci (AA'), (BB'), (CC') sînt înălțimile triunghiului.

Aurel Ioanoviciu, profesor, Baia Mare

21542. Fie I, H respectiv centrul cercului înscris și ortocentrul triunghiului ABC. Condiția necesară și suficientă ca patrulaterul $ACIH$ să fie inscriptibil este ca măsurile unghiurilor triunghiului ABC să fie în progresie aritmetică.

Aurel Ioanoviciu, profesor, Baia Mare

21543*. Fie $n \in \mathbf{N}^*$ un număr dat. Să se găsească cel mai mic număr natural p, pentru care $(\forall)\ M \subset \mathbf{Z}$, $M = \{x_1, x_2, \ldots, x_p\}$, $(\exists)\ x_i, x_j \in M$ distincte, astfel încît $x_i + x_j$ se divide cu n sau $x_i - x_j$ se divide cu n.

Gh. Szöllösy, profesor, Sighetu Marmației

21544. Fie mulțimile $A = \{x \in \mathbf{R} \mid x^2 - (m+1)x + n = 0\}$ și $B = \{x \in \mathbf{R} \mid x^2 - (n+1)x + m = 0\}$,
unde $m, n \in \mathbf{R}$.
a) Să se arate că $(\forall) m, n \in \mathbf{R}$, $A \cup B \neq \emptyset$.
b) Să se determine o condiție necesară și suficientă pentru numerele m și n așa încît $A \cap B \neq \emptyset$.

Ioan Stoica, profesor, Baia Mare

21545*. Să se determine funcțiile $f, g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, g bijectivă, care verifică relațiile:

$$1)\ f(x) + f(g(x)) - 2g(x) = 3,\ (\forall)x \in \mathbf{R}.$$

$$2)\ f(g(x)) + f(g^{-1}(x)) - 2x = 4,\ (\forall)x \in \mathbf{R}.$$

Ivan Cernea și *Gavril Teonian*, profesori, Baia Mare

21546*. Se consideră patrulaterul inscriptibil $ABCD$ și două cercuri variabile, tangente exterioare, primul conținînd vîrfurile A și B iar al doilea cercul conținînd vîrfurile C și D. Să se găsească locul geometric al punctului M de intersecție a celor două cercuri.

Iulian Indre, profesor, Tg. Lăpuș

Scanned with OKEN Scanner

21547. Fie $\alpha, \beta, \gamma \in (0, \infty)$ numere fixate, astfel încît $\alpha \leqslant \frac{\beta+\gamma}{2}$. Să se demonstreze inegalitatea:

$$(1) \qquad \frac{x}{\alpha x+\beta y+\gamma z}+\frac{y}{\alpha y+\beta z+\gamma x}+\frac{z}{\alpha z+\beta x+\gamma y} \geqslant \frac{3}{\alpha+\beta+\gamma},$$

$(\forall)\ x, y, z > 0$. În ce caz avem egalitate?

Gh. Szöllösy, profesor, Sighetu Marmației

Clasa a X-a

21548. Fie triunghiurile ABC și $A'B'C'$ cu notațiile obișnuite. Să se arate că dacă $\frac{R}{R'}=\frac{r}{r'}=\sqrt{\frac{S}{S'}}$ atunci triunghiurile sînt asemenea.

Ioan Stoica, profesor, Baia Mare

21549. Să se rezolve în $\mathbf{Z}$, sistemul:

$$\begin{cases} x^3+3^x=y^3+ \\ x^3+24=2^y. \end{cases}$$

Nicolae Mușuroia, profesor, Baia Mare

21550*. Fie $p > 2$ un număr prim și a, b, c relativ prime cu p. Atunci p divide numărul

$$\left(a^{\frac{p-1}{2}}-b^{\frac{p-1}{2}}\right)\left(b^{\frac{p-1}{2}}-c^{\frac{p-1}{2}}\right)\left(c^{\frac{p-1}{2}}-a^{\frac{p-1}{2}}\right).$$

Aurel Ioanoviciu, profesor, Baia Mare

21551*. Fie ABC un triunghi ascuțitunghic, $H \in \mathrm{Int}\,ABC$ iar $k \in \mathbf{N}^*$. Pe semidreptele $(HA$, $(HB$, $(HC$ considerăm punctele $A' \in (HA$, $B' \in (HB$, $C' \in (HC$ astfel încît $HA' = k \cdot BC$, $HB' = k \cdot AC$, $HC' = k \cdot AB$. Să se arate că H este ortocentrul triunghiului ABC dacă și numai dacă H este centrul de greutate al triunghiului $A'B'C'$.

Dan Bărbosu, profesor, Baia Mare

21552. Să se demonstreze că în orice triunghi nedreptunghic avem inegalitatea

$$\frac{a^4}{\cos A}+\frac{b^4}{\cos B}+\frac{c^4}{\cos C} \geqslant 6\sqrt{3}R \cdot abc;$$

egalitatea are loc în triunghiul echilateral.

Iulian Coroian, conf. univ., Baia Mare

Scanned with OKEN Scanner

21553. Să se arate că oricare ar fi un număr natural $n \neq 0$, numărul: $2^{2^n} + 2^{11 \cdot 3^n}$ este divizibil cu 41 și cu 100.

Ștefan Sabău, profesor, Baia Mare

21554*. Să se determine partea întreagă a numărului

$$S_n = \sqrt[a_2]{\frac{a_2}{a_1}} + \sqrt[a_3]{\frac{a_3}{a_2}} + \ldots + \sqrt[a_{n+1}]{\frac{a_{n+1}}{a_n}}$$

unde a_i, $i = 1, \ldots, n$ sînt termenii unei progresii aritmetice cu $a_1 \in \mathbf{N}^*$, rația $r \in \mathbf{N}^*$.

Laszlo Balog, inginer, Baia Mare

Clasa a XI-a

21555. Fie $(b_n)_{n \in \mathbf{N}}$ un șir cu termeni pozitivi, $b_0 = 1$, $b_1 = \frac{1}{2}$ și

$$b_n \leqslant \frac{1}{(n+1)2^n} \sum_{k=0}^{n} (kn + n - k^2 + 1) b_k b_{n-k}, \quad (\forall)\ n \geqslant 2.$$

Să se calculeze $\lim\limits_{n \to \infty} b_n$.

Nicolae Mușuroia, profesor, Baia-Mare

21556. Se consideră ecuația:

$x^m - a_1 x^{m-1} - \ldots - a_{m-1} x - a_m = 0$, cu $a_i \geqslant 0$, $i = 1,2, \ldots, m-1$ și $a_m > 0$; $m \in \mathbf{N}^*$ număr par.

Fie $x_1, x_2, \ldots, x_k$ rădăcinile reale ale ecuației date și $x_p = \max \{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$.

Să se demonstreze că șirul definit prin termenul general:

$$a_n = \left(1 + \frac{x_1 + \ldots + x_{p-1} + x_{p+1} + \ldots + x_k}{(k-1)x_p}\right)^n$$

este convergent și să se calculeze $\lim\limits_{n \to \infty} a_n$.

Idan Mureșan, profesor, Baia Mare

21557. Fie $A, B, C \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$, care verifică relația:

$$A + B + C + I_n = O_n.$$

Să se arate că: $\det[(AB - C)(BC - A)(CA - B)] \geqslant 0$.

Nicolae Mușuroia, profesor, Baia Mare

21558*. Fie $n \in \mathbf{N}^*$, $n \geqslant 2$, $A \in M_n(\mathbf{R})$ iar $p \in \mathbf{N}^*$ un număr impar astfel încît matricea $A^p + I_n$ este inversabilă. Să se arate că dacă $A^{4p} = A^{2p} + A^p + I_n$, unde I_n este matricea unitate de ordinul n, atunci $\det A \geqslant 0$.

Dan Bărbosu, profesor, Baia Mare

Scanned with OKEN Scanner

21559*. Dacă funcția $f:[a,b]\to[a,b]$ este surjectivă și derivabilă pe (a,b), atunci există cel puțin un punct $c\in(a,b)$ astfel încît $f'(c)=1$ sau $f'(c)=-1$.

Iulian Indre, profesor, Tg. Lăpuș

21560. Fie $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ o funcție derivabilă, mărginită și $f(0)\neq 0$. Să se arate că există $c\in\mathbf{R}$ așa încît $f(c)\cdot f'(c)=c$.

Ioan Stoica, profesor, Baia Mare

21561*. Fie ABC un triunghi, $A'\in(BC)$, $B'\in(CA)$, $C'\in(AB)$. Oricare ar fi $A_1\in(BC)$ construim „succesorul" său A_2 prin construcțiile: $A_1B_1\parallel BB'$, $B_1\in(AC)$; $B_1C_1\parallel CC'$, $C_1\in(AB)$; $C_1A_2\parallel AA'$, $A_2\in(BC)$. Dacă A_n este „succesorul" lui A_{n-1} să se arate că:
1) Șirul (A_n) este convergent, oricare ar fi A_1;
2) Limita șirului (A_n) nu depinde de A_1 și să se determine această limită.

Aurel Ioanoviciu, profesor, Baia Mare

Clasa a XII-a

21562. Fie A o mulțime nevidă și „$\cdot$" o operație binară asociativă pe A cu proprietatea că există $n\in\mathbf{N}^*$ astfel încît $x^n\cdot y^n=y\cdot x$, $(\forall)$ $x,y\in A$. Arătați că operația dată este comutativă.

Răzvan Satnoianu, student, București

21563*. Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\lim\limits_{k\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{k}\sqrt{\dfrac{k}{3k^3-i^3}}\right)^n$.

Willy Portal, Galați

21564. Fie legea $x\top y=\dfrac{x+y}{1+xy}$, $x,y\in(-1,1)$.

Calculați $x\top x\top x\top\ldots\top x=\top^n x$, unde $n\geqslant 2$, $n\in\mathbf{N}$.

Ioan Toderiță, profesor, Galați

21565. Să se determine polinoamele neconstante $f\in\mathbf{R}[X]$ astfel încît $f(x^2-x+1)=[f(x)]^2-f(x)+1$, pentru $(\forall)x\in\mathbf{R}$ și $f(0)=0$.

Ioan Toderiță, profesor, Galați

21566*. Fie $f:[a,b]\to[m,M]$, $0\leqslant a<b$, $0<m<M$, o funcție integrabilă așa încît și $\dfrac{1}{f}$ este integrabilă și, în plus, $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\geqslant M-m$. Să se arate că în aceste condiții are loc inegalitatea:

$$\frac{4m(b-a)}{(m+M)^2}\leqslant\int_a^b\frac{\mathrm{d}x}{f(x)}\leqslant\frac{b-a-1}{m}+\frac{b-a+1}{M}.$$

Iulian Coroianu, conf. univ., Baia Mare

Scanned with OKEN Scanner

21567*. Fie $f, g \in \mathbb{Q}[X]$ și mulțimea de matrici

$$A = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ f(b) & g(a) \end{pmatrix} \middle| \; a, b \in \mathbb{Q} \right\}.$$

Să se arate că: $(A, +, \cdot)$ este corp $\Leftrightarrow g(X) = X$ și $f(X) = kX$, unde $k \in \mathbb{Q}$, $\sqrt{k} \notin \mathbb{Q}$.

Laurențiu Panaitopol, lector univ., București

21568. Să se determine funcțiile continue $f : [1, +\infty) \to \mathbf{R}$ care au proprietatea că:

$$\int_1^x f(t)\mathrm{d}t = \int_{x^k}^{x^{k+1}} f(t)\mathrm{d}t, \quad (\forall) x \in [1, +\infty), \quad (\forall) k \in \mathbf{N}.$$

Dan Bărbosu, profesor, Baia Mare

PROBLEME PREGĂTITOARE PENTRU O.I.M ȘI O.B.M.

O : 560. Diagonalele patrulaterului convex $ABCD$ se taie în O. Fie $M \in (AB)$, $N \in (BC)$, $P \in (CD)$. Să se demonstreze că dacă oricare ar fi punctul Q din plan paralelele din N, O, M respectiv la AQ, BQ, CQ sînt concurente și de asemenea paralelele din P, O, N respectiv la BQ, CQ, DQ sînt concurente, atunci patrulaterul este paralelogram.

D. M. Bătinețu-Giurgiu

O : 561. Notînd cu φ indicatorul lui *Euler*, să se arate că $\sum_{d|n} \frac{1}{\varphi(d)} \geq \frac{n}{\varphi(n)}$ cu egalitate pentru n liber de pătrate.

I. Cucurezeanu

O : 562. Să se rezolve în numere naturale nenule ecuația $x^2 + y^4 = y^3$.

Florin Vulpescu-Jalea

PROBLEME PENTRU CONCURSUL ANUAL AL REZOLVITORILOR

Clasele a IX-a și a X-a

C : 317. Pentru un punct M din plan și o mulțime $\mathscr{X}$ de puncte din plan, numim „*distanța*" de la punctul M la mulțimea $\mathscr{X}$ numărul real pozitiv, definit prin egalitatea $\mathrm{d}(M, \mathscr{X}) = \inf_{N \in \mathscr{X}} MN$.

Să considerăm în plan două puncte fixe A, B și două semidrepte h, k cu aceeași origine, care determină unghiul $\widehat{hk}$.

a) Să se afle locul geometric al punctelor M din plan cu proprietatea că $d(M, h) = d(M, k)$.

b) Să se afle locul geometric al punctelor M din plan cu proprietatea că $d(M, h) = d(M, k)$ și $MA = MB$.

M. Nicolae, profesor, București

C : 818. Dacă $0 \leqslant a_1 \leqslant a_2 \leqslant \ldots \leqslant a_n \leqslant \frac{\pi}{2}$, $n \in \mathbf{N}^* \setminus \{1\}$, să se demonstreze inegalitățile :

a) $\sin(a_1 - a_2) + \sin(a_2 - a_3) + \ldots + \sin(a_{n-1} - a_n) + \sin(a_n - a_1) \leqslant 0$;

b) $\operatorname{tg}(a_1 - a_2) + \operatorname{tg}(a_2 - a_3) + \ldots + \operatorname{tg}(a_{n-1} - a_n) + \operatorname{tg}(a_n - a_1) \geqslant 0$.

Alin Pop, profesor, Zagra, Bistrița-Năsăud

C : 819. Să se demonstreze că oricare ar fi $n \in \mathbf{N}^*$, $m \in \mathbf{N}^* \setminus \{1\}$ are loc identitatea :

$$\sum_{h=1}^{n} \sum_{\substack{k_i \geqslant 0 \\ k_1 + k_2 + \ldots + k_m = h \\ k_1 + 2k_2 + \ldots + mk_m = n}} \binom{h}{k_1, k_2, \ldots, k_m} = x_n,$$

unde șirul $(x_n)_{n \geqslant 1}$ este definit prin $x_n = 2^{n-1}$ pentru $1 \leqslant n \leqslant m$ și $x_n = \sum_{k=1}^{m} x_{n-k}$ pentru $n \geqslant m + 1$.

C. Gonciulea, student, București

C : 820. Să se determine numerele naturale $n \geqslant 3$ cu proprietatea că sistemul de ecuații $x_1 = x_2 x_n$, $x_n = x_{n-1} x_1$, $x_k = x_{k-1} x_{k+1}$, $k = \overline{2, n-1}$ admite soluții reale $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ cu $a_i \neq a_j$, $(\forall)\ i \neq j$; $i, j = \overline{1, n}$.

D. M. Bătinețu-Giurgiu

Clasele a XI-a și a XII-a

C : 821. Fie $a, b \in \mathbf{R}_+^*$, $a < b$ și $(x_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ un șir recurent definit astfel :

$$x_0 = \frac{1}{2}(a + b);\quad x_{n+1}^2 + ab = (a + b)x_n,\quad (\forall) n \in \mathbf{N}^*.$$

Să se arate că acest șir este convergent și să se determine $\lim_{n \to \infty} x_n$.

N. Soare, asist. univ., București

C : 822. Fie $p > 2$ un număr prim fixat. Pentru fiecare număr întreg n se consideră mulțimea de matrici

$$K_n = \left\{ \begin{pmatrix} a & nb \\ b & a \end{pmatrix} \middle|\ a, b \in \mathbf{Z}_p \right\}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Să se demonstreze că:
1° Mulțimea K_n este inel comutativ față de adunarea și înmulțirea uzuală a matricilor;
2° Inelul K_n este izomorf cu inelul $\mathbf{Z}_p \times \mathbf{Z}_p$ dacă și numai dacă

$$n^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1 \pmod{p};$$

3° Inelele K_n și K_m sînt izomorfe dacă și numai dacă este îndeplinită una din condițiile de mai jos:

i) $n \equiv 0 \pmod{p}$ și $m \equiv 0 \pmod{p}$,

ii) $n^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1 \pmod{p}$ și $m^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1 \pmod{p}$,

iii) $n^{\frac{p-1}{2}} \equiv -1 \pmod{p}$ și $m^{\frac{p-1}{2}} \equiv -1 \pmod{p}$.

Toma Albu, București

C : 823. Fie $(A, +, \cdot)$ un inel cu proprietatea că există $n \in \mathbf{N}^* \setminus \{1\}$, astfel încît dacă $x^n = 0$, atunci $x = 0$. Să se arate că inelul $(A, +, \cdot)$ nu conține elemente nilpotente.

I. Savu, București

C : 824. Fie $f : \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \to \left[\frac{2}{\pi}, 1\right]$, $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right] \\ 1, & x = 0. \end{cases}$

Să se arate că f este inversabilă, integrabilă pe $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ și că oricare ar fi $n \in \mathbf{N}^*$ avem:

$$(n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \, dx + n\int_1^{\frac{2}{\pi}} x^{n-1}(f^{-1}(x))^{n+1} dx = \frac{\pi}{2}.$$

Virgil Nicula, profesor, București

CONCURSUL DE INFORMATICĂ
ETAPA PE ȚARĂ, BUCUREȘTI, APRILIE 1988

CLASA A IX-A — SECȚIUNEA INFORMATICĂ

Proba teoretică

1. Descrieți fazele de pregătire a lucrărilor pentru execuție și execuția propriu-zisă.
2. Se consideră formula logică:

$$\alpha = (\forall y)\,((\exists x))\neg\,((x, u(y)) \vee g(h(x, y))) \to$$
$$\to (\exists z)\,((\forall x) r(x, z) \wedge (\forall x)\neg l(x, y, z))).$$

Scanned with OKEN Scanner

Să se nege formula dată, formula rezultată avînd negațiile numai în fața predicatelor și să nu conțină negații multiple în fața aceluiași predicat.

3. Fie dată o mulțime E nevidă și finită și fie $A, B \subseteq E$ submulțimi nevide date. În ce condiții există submulțimi $X \subseteq E$ astfel încît să avem $A \cup X = B$? În caz afirmativ, să se determine toate soluțiile X.

4. Se dau 3 numere reale:

$$x_1 = 302{,}597\,;\ x_2 = 0{,}71854132\,;\ x_3 = 2{,}018345.$$

Numerele x_1 și x_3 sînt reprezentate în virgulă mobilă, cu 7 cifre exacte, iar x_2 este reprezentat în virgulă mobilă cu 20 cifre exacte. Să se determine numărul de cifre exacte ale produsului $p = x_1x_2x_3$.

Observație. În reprezentările numerelor x_1, x_2, x_3 cifrele neprecizate sînt egale cu 0.

5. Fie mulțimile $M = \{A, B, C, \ldots, X, Y, Z, U\}$, $|M| = 27$, $N = \{0, 1, 2, \ldots, 8\}$, $|N| = 9$, unde M este tot alfabetul la care se adaugă U spațiul (blancul) și o funcție injectivă $f: M \to \{\overline{ab} \mid a, b \in \mathbf{N},\ a \neq 0\}$ cu $\overline{ab}$ numere naturale de două cifre.

Furnizînd imaginea unui text cifră cu cifră, să se determine mulțimea frecvențelor elementelor din M pentru textul considerat. Se consideră că fiecare element din M apare măcar o dată în text și că imaginea textului se termină cînd s-a furnizat cifra 9.

Să se întocmească schema logică a algoritmului.

Proba practică

Să se scrie un program care să realizeze următoarele funcții:

Se citește un text format din propoziții etichetate. Fiecare etichetă este o secvență de cifre 0÷9 urmată de simbolul „:”.

În funcție de opțiunea formulată, să se realizeze oricare dintre cerințele următoare (și în orice ordine):

1. listarea textului considerînd propozițiile în ordinea dată inițial;
2. listarea textului considerînd propozițiile în ordinea crescătoare a etichetelor;
3. eliminarea unei propoziții din text, dacă se indică eticheta corespunzătoare ei;
4. inserarea unei noi propoziții în text, astfel încît dacă pentru noua propoziție eticheta coincide cu eticheta unei propoziții deja existente în text, atunci aceasta va substitui vechea propoziție;
5. listarea unei propoziții a cărei etichetă este indicată;

Textul citit va fi introdus într-o singură variabilă de tip șir.

Date test:

```
1000 : for x = 1 to lena $ 10 : let n = 1000 20 : let linie = 0
999 :stop 1030 :if x = lena $ then beep 1,30 1040 : next x
1035 : beep 1,20 1060 : return 1050 : let linie = linie + 1
```

Pentru inserție:

```
1030 : if x = len a $ then let a = a + 1
   1 : let a = a + 1
```

Să se elimine propozițiile de etichete 999 și respectiv, 1999

Să se listeze propozițiile de etichete 1000 și, respectiv, 2000.

Observație: În propozițiile din text nu apare caracterul „:”.

CLASA A X-A – SECȚIUNEA INFORMATICĂ

Proba teoretică

1. Fie $k \in \mathbf{N}$ dat. Considerăm laticea $L = < \{x \in \mathbf{N} \mid x \text{ divizor al lui } k\}, \text{cmmdc}, \text{cmmmc} >$

a) Ce proprietăți cunoașteți pentru L?

b) Există un algoritm pentru a verifica dacă L este complementată (definiție, justificare, exemplu)?

2. Fie T un tablou unidimensional cu N componente numerice. Se cere un algoritm pentru a transfera eventualele valori nule în pozițiile finale ale lui T.

3. Definim, pentru un graf neorientat (T, X) conex și fără bucle diametrul $\Delta = \max_{x,y \in T} d(x, y)$, unde $d(x,y)$ este distanța dintre nodurile x și y (numărul de muchii ale drumului de lungime minimă dintre x și y). Fie $n \in \mathbf{N}$. Să se găsească graful neorientat cu n noduri

Scanned with OKEN Scanner

care are diametrul maxim. Să se demonstreze că graful găsit are această proprietate și să se arate unicitatea sa pînă la o permutare a nodurilor.

4. Să se scrie instrucțiunea de tipărire a următoarei configurații:

```
1 1
1—2
1——3
1———4
.....................
1—...............—20
```

19 spații

Precizare: Se va folosi o singură instrucțiune WRITE și o singură instrucțiune FORMAT.

Proba practică

Se consideră un labirint format din n camere, astfel încît între anumite perechi de camere este permisă trecerea într-un anumit sens. În momentul inițial, în două din camerele labirintului se află plasați un șoarece și, respectiv, o pisică. La fiecare moment, atît șoarecele cît și pisica schimbă (dacă este posibil) camera în care se află după următoarele reguli:

— șoarecele alege la întîmplare una din ieșirile posibile;

— dacă pisica se află într-o cameră încă nevizitată de șoarece atunci alege la întîmplare una din ieșirile posibile; dacă se află într-o cameră ce a fost vizitată cel puțin o dată de către șoarece, atunci alege ultima ieșire folosită de acesta.

Jocul se termină cînd au fost $n$max deplasări sau cînd pisica și șoarecele se află simultan în aceeași cameră.

Să se scrie un program care să simuleze acest joc listînd traiectoriile urmate de șoarece, și, respectiv, pisică, indicîndu-se dacă și cînd unul dintre cei doi a intrat într-o capcană.

CLASA A XI-A — SECȚIUNEA INFORMATICĂ

Proba teoretică

1. Să se prezinte sub forma unei scheme logice fazele de concepție și de execuție a programelor în limbaj simbolic.

2. Să se scrie secvența de instrucțiuni ASSIRIS care realizează calculul expresiei FORTRAN, $IFIX(X + SQRT(Y + 5)) \cdot GT.0$. echivalenta expresiei $[x + \sqrt{y + 5}] > 0$.

Pentru conversii și extragerea rădăcinii pătrate se vor presupune rutine existente. Se pot folosi funcțiile standard FORTRAN:

I % ITOR — pentru conversia întreg-real
I % RTOI — pentru conversia real-întreg
F % VSQRT — pentru extragerea rădăcinii pătrate
F % VIFIX — pentru conversia real-întreg

Funcțiile întorc rezultatele în registrul R0, iar parametrul de intrare trebuie depus în registrul R2.

3. Fie dat $a \in \mathbf{R}$. Se definește șirul $\{x_n\}_{n \in \mathbf{N}}$ prin

$$x_0 = 1 \text{ și } x_{n+1} = 1 + ax_n \qquad (1).$$

a) Se cere să se calculeze numărul de multiplicări necesare pentru obținerea sumei

$$s_p = 1 + a + \ldots + a^p, \text{ cu } p \in \mathbf{N}^* \qquad (2)$$

prin algoritmul (1).

b) Se cere să se definească o nouă metodă printr-un șir $\{y_n\}$, $n \in \mathbf{N}$, de forma

$$y_0 = 1 \text{ și } y_{n+1} = f(y_n) \qquad (3)$$

prin care să se calculeze suma (2), cu un număr mai mic de multiplicări decît prin (1), pentru un p suficient de mare.

c) Se cere să se indice o extindere a algoritmului (1) de la numere la un cadru mai larg.

Scanned with OKEN Scanner

Proba practică

Fie formula logică:

$$\exists Z(Z \leqslant Z1,\ Z > Z0)[(X - Y \geqslant Z + 1) \wedge \neg (X \cdot Y \leqslant 0) \vee (Z \leqslant |X/Y|)]$$

unde X, Y, $Z0$, $Z1$ sînt numere întregi obținute prin conversia unor șiruri de caractere (secvențe de cifre precedate sau nu de semn) date în zonele de memorie etichetate cu X, Y, $Z0$ și, respectiv, $Z1$. Lungimea fiecărei zone este de 3 cuvinte.

Să se scrie în limbaj ASSIRIS programul de evaluare a formulei logice.

CLASA A XII-A — SECȚIUNEA INFORMATICĂ

Proba teoretică

1. Sistemul de operare ca element de conducere a unui *SPAD*.
2. Să se găsească greșelile de concepție (dacă există) din secvența:

```
. SYSRUN INVFICH
% DUMP, (ABC, XF132)
% DFIE DY: RDI, FN: 'FIS', BEG, (AAB, XAB)
```

3. Să se răspundă la următoarele întrebări:

a) care dintre opțiunile COBOL conduc la rezervarea de spații de memorie minime?

b) cînd nu este necesară clauza PICTURE?

c) fie descrierea:

```
01X.
    02 X1 PIC S9(4) USAGE IS COMP-3
       VALUE - 1234.
    02 X2 PIC S9(5)V9 USAGE IS COMP-3
       VALUE 12345.6.
```

Ce lungimi au zonele X1, X2?

4. Se dă mulțimea $E = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ și legea de compoziție $* : E \times E \to E$, definită prin $a * b = c$, unde c este ultima cifră a produsului uzual ab.

Se cere să se facă schema logică pentru soluția generală a ecuației $a * x = b$, cu $a, b \in E$ parametri.

5. Definiți funcții comune ale generării, inițializării sistemului de operare, precum și a dialogului operator.

Proba practică

Se dau k cuvinte, fiecare de lungime n, formate din 0 și 1. Să se afișeze cuvintele care verifică următoarele trei condiții:

a) un cuvînt nu se poate obține prin concatenarea de m ori a unui subcuvînt al său ($m \geqslant 2$);

b) cuvîntul obținut prin citirea în ordine inversă a cifrelor nu coincide cu cel inițial;

c) orice permutare circulară duce la un cuvînt diferit de cel inițial.

Observație: Se va alcătui un program într-unul din limbajele cunoscute. Se va rula programul conceput pentru $k = 10$, $n = 9$ și lista de cuvinte:

```
010101011
101101101
110110110
111111111
100010001
100100010
111000111
100111011
000000001
100000001
```


Scanned with OKEN Scanner

TREAPTA I — SECȚIUNEA UTILIZATORI

Proba teoretică

1. Tipuri de variabile și operațiile specifice acestora, în limbajul BASIC.
2. Să se arate că:

$$(a \vee b) \wedge (b \vee c) \wedge (c \vee a) \equiv (a \wedge b) \vee (b \wedge c) \vee (c \wedge a)$$

unde a, b, c sînt propoziții oarecare.

3. Fie $x^2 + bx + c = 0$, o ecuație cu coeficienți întregi avînd rădăcinile x_1 și x_2 și n un număr natural.
Să se elaboreze un algoritm care să calculeze valoarea $S_n = x_1^n + x_2^n$, fără a se calcula rădăcinile.

4. Fie $b \geqslant 2$ un număr natural; să se stabilească condiția ca un număr $\overline{a_n a_{n-1} \ldots a_0}$ scris în baza b să fie par, respectiv, impar.

5. Fie m și n numere naturale pentru care $m > n > 0$ și $(m, n) = 1$. Să se descrie un algoritm care să verifice dacă $\frac{n}{m}$ scris ca număr zecimal este o fracție periodică sau nu.

Proba practică

Se consideră perechile de numere naturale:
$(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_n, y_n)$ cu $x_i \in [0,250]$; $y_i \in [0,170]$.
Valorile perechilor sînt date în orice ordine.
Știind că aceste perechi reprezintă coordonatele unui poligon convex, să se reprezinte grafic pe ecran poligonul respectiv și să se calculeze aria acestuia.

Aplicație pentru: (20,70), (90,30), (50,120), (180,20), (120,140), (220,70), (200,110).

TREAPTA A II-A — SECȚIUNEA UTILIZATORI

Proba teoretică

1. Organizarea memoriei la calculatoarele personale.
2. Instrucțiuni pentru producerea sunetelor și controlul culorilor în limbajul BASIC (HC—85 și compatibile).
3. Fiind date numerele naturale $x_1, x_2, \ldots, x_n$ și $m_1, m_2, \ldots, m_n$ să se elaboreze un algoritm care să genereze toate numerele de forma $x_1^{i_1} \cdot x_2^{i_2} \ldots x_n^{i_n}$ unde $0 \leqslant ij \leqslant mj$, $j = 1,2, \ldots, n$ cu un număr cît mai mic de înmulțiri.
4. Să se descrie un algoritm pentru generarea numerelor prime dintr-un interval dat.
5. Să se genereze toate matricile cu 6 linii și 6 coloane, cu elemente în mulțimea $\{-1, 1\}$ astfel încît pe fiecare linie și pe fiecare coloană să fie un număr impar de -1.

Observație: la punctele 3, 4, 5 nu se cere program.

Proba practică

Să se scrie un program în limbaj BASIC care, pentru un număr natural $n \geqslant 2$ și o permutare $p \in S_n$, listează ciclurile disjuncte al căror produs este p și apoi permutarea inițială (nu se vor folosi vectori suplimentari).

Să se includă în program și calculul signaturii permutării p.

Aplicație pentru $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 5 & 7 & 2 & 8 & 1 & 6 & 9 & 4 & 3 \end{pmatrix}$.

Indicații:
1. Fiind dată o permutare $p \in S_n$ spunem că $(i_1, i_2, \ldots, i_k)$ este un ciclu dacă $Pi_1 = i_2$, $Pi_2 = i_3$; $\ldots$; $Pi_{k-1} = i_k$ și $Pi_k = i_1$.
2. Două cicluri se numesc disjuncte dacă nu au nici un element comun.
3. Exemplu: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 6 & 5 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} = (1\ 3\ 5)\ (2\ 6)\ (4)$.

Scanned with OKEN Scanner

FĂGĂRAȘ (BRAȘOV) S.g. 1 cl. VII Budnar George (79); S.g. 6 cl. III Bogdan Nicolae (141); S.g. 7 cl. VI Florea Sebastian (70), Rădulescu Răzvan (44), cl. VII Boeriu Gheorghe (50). **FĂGET** (TIMIȘ) S.g. cl. V Băban Carmen (66). **FĂUREȘTI** (VÎLCEA) S.g. cl. VIII Tudoraşcu Adrian (66). **FIENI** (DÎMBOVIȚA) S.g. 1 cl. VI Dragomir Valentina (92), Dumitrache Ramona (85), Gheorghiu Cătălin (87). **FOCȘANI** (VRANCEA) S.g. 1 cl. VI Ciobanu Alexandru Gabriel (58); S.g. 2 cl. V Ardeleanu Iulian (90), Florea Oana (115), cl. VI Panfil Nicoleta Lala (76), Tenescu Tiberiu Dan (80); S.g. 5 cl. V Iftimie Marian (55), cl. VI Pătrașcu Radu (60); S.g. 7 cl. VII Stoica Vicențiu (60); S.g. 9 cl. V Enache Iulian (35); S.g. 10 cl. VI Dumitrache Valentin Viorel (93), Panaite Cezar (81), Răşcanu Ionuț (159), Străoanu Alin (233), cl. VII Avram Iuliana (115), Badiu Iuliana (103), Crețu Ilie (100), Crețu Vasile (129), Dediu Sava (110), Hăineală Bogdan (140), Mocanu Florentina (102), Zugravu Mihaela Lavinia (117).

GALAȚI (GALAȚI) S.g. 6 cl. V Bratoveanu Elena (82), Ciocan Mihai (72), Gîlea Ionuț 59), Niculiță Bogdan (65), Stan Clara Daniela (93), cl. VII Giuscă Claudiu (138), Sprînceană Gabriela (93); S.g. 10 cl. IV Diaconu Marius (69), cl. V Cilincă Radu (50), Conțolencu Monica (73), Giol Mihaela (62), Isac Lenuța (73), cl. VI Amariei Rodica (121), Arteni Oana (76), Efimov Ina (81), Enache Marian (79), Moisă Carmen (71), Negoiță Aura (63), Parfenie Raluca (140), Pelin Adina (92), Popovici Valentin (62), Rădulescu Laura (117), Stoica George (53), Verga Alina (58), Visalon Monica (71), Voiculescu C. (60), cl. VII Amariei Cezar (102), Bobocea Sorin (87), Rădulescu Laura (97); S.g. 18 cl. V Burghelea Laurențiu (50), Manole Nicoleta Daniela (48), Rusu Marcel (40), Scutaru Adina (110), Silvestru Violeta (97), Toma Georgiana (56), Vilcea Anișoara (87) cl. VI Aleaz Cezar Eduard (100), Popoiu Alexandru (100), Popoiu Gigi (86); S.g. 24 cl. V Codrescu Andreea (120), Mantale Raluca (93), Nat Roxana Cristina (108), Pugacev Mihaela (103), cl. VI Arsene Aurelian (110), Hendoreanu Cristian (90); S.g. 25 cl. V Batog Camelia (119), Enache Oana (116), Gheorghiu C. (115), Trifan Paula (94); cl. VI Bulgaru Camelia (340), CiobanuAl exandru (167), Georgescu Bogdan (150), Gheorghiu Ionuț (182), Ilie Monica (177), Mihai Iulia Delia (319), Monica Andreea Daniela (198), Sabău Daniela (171), Stoica Florența (191), Sain Alice (150); S.g. 26 cl. VI Burtea Raluca (110), Dafinoiu Cristian (70), Deju Bogdan (105), Hurjui Adrian (198), Istrate Claudiu (80), cl. VII Bodi Cristian (136); S.g. 28 cl. V Munteanu Adrian (90), cl. VI Andone Carmen Iuliana (134), Ganea Gabriela (118), Giurgea Mădălina (143), Marinescu Ionuț (118), Memet Sitare (142), Micu Traian Marius (71), Modiga Odeta (139), Popescu Alin (89), Seibovici Andy Radu (139), Togan Ana Maria (150), cl. VII Cristofor Adelina Olivia (64), Hapenciuc Iuliana (111); S.g. 38 cl. V Florea Adrian (105), Sandu Oana (85); cl. VI Berbecel Cosmina (148), Ciuchină Ioana (98), Chiriac Iulian (104), Colea Alina-Nicoleta (44), Dragomir Ovidiu (73), Istrate Monica (110), Lazăr Cristina (120), Moise Valentin (125), Năstase Raluca Eugenia (155), Ticu Ciprian (100), Torică Daniela (143), Trifan Tamara (125), Trifan Valentin (125), Tudose Cerasela (130), Vlad Laura (135); S.g. 40 cl. III Purdilă Octavian (36), cl. VII Ministreanu Ana (87); Lic. „V. Alecsandri" cl. IX Dumitrache Iulius Cezar (89). **GĂIEȘTI** (DÎMBOVIȚA) S.g. 6 cl. VI Velicescu Sorina (115). **GHEORGHE-GHEORGHIU-DEJ** (BACĂU) S.g. 8 cl. II Martin Maria (37). **GURGHIU** (MUREȘ) S.g. cl. VI Truța Cosmin (50).

HAȚEG (HUNEDOARA) S.g. 2 cl. V Păsărel Alina Domnița (71), cl. VI Bicăzan Mihaela (230), Fulop Bobi Bianca (110), Hauptmann Karyna (97), Lucaci Diana (100), Pop Cristina (130), cl. VII Proca Carmen Amalia (160). **HOREZU** (VÎLCEA) S.g. cl. V Antonie Sorin (64); Lic. ind cl. VI Armășescu Robert (49), Rabeci Maria (130), Stănescu Felicia (144), cl. VII Rada Alexandru (80). **HORIA** (NEAMȚ) S.g. 15 cl. VI Grigoraș Petronela (100). **HUNEDOARA** (HUNEDOARA) S.g. 1 cl. V Mariș Mircea (89); S.g. 4 cl. VI Coman Alexandru (60), Nimirceag Remus-Victor (47); S.g. 6 cl. VI Andrei Adina (90); S.g. 7 cl. V Prejban Monica (98), cl. VII Mărginean Radu (192). **HUȘI** (VASLUI) S.g. 1 fără mențiune de clasă: Bogdan Eduard (72), Iordache Sorin (85), Matei Viorica (72), Pancu Toader (45), cl. V Mititelu Ciprian (150), Tighiceanu Mihaela (69); S.g. 2 cl. V Bugeac Costel (86), cl. VI Blesneac Cătălin (100), Chetran Cornelia (98), Ciupilan Corina (98), Ciupilan Mihai (150), Mihulcă Marcela (85), Plugaru Mariana (100), Scurtu Mihaela (100), cl. VII Ceaicovschi Lenuța (180), Chetran Corneliu (118), Ciobanu Anca (92), Cocîrtă Iulian (78), Codreanu Simona (116), Oanea Cătălin (96), cl. VIII Codreanu Simona (99); S.g. 3 cl. V Chiriac Cristian (90), Crudu Mirela (43), Dogaru Victor (40), Hotnag Tamara (110), Liliac Irina (40), Musteață Miu (90), Salajan Adriana (99), Toncu Cătălin (40), cl. VI Cărare Adina (75), Hobjilă Angelica (103), Ovac Oana(70), Timofte Andro-Fleno (80).

IAȘI (IAȘI) S.g. 1 „Gh. Asachi" cl. III Barbacaru Lucian (120), Tuțurman Robert (160), cl. IV Ciobanu Oana (190); S.g. 3 cl. IV Omer Levin (100); S.g. 6 cl. VI Balica Ioan (70), Dumea Paul Eduard (90); S.g. 8 cl. V Gorea Diana (89); S.g. 10 cl. IV Lazăr Mircea (135); S.g. 17 cl. V Dupu Irina (35); S.g. 21 cl. VII Baraboi Tudor (144); S.g. 22 cl. IV Hogea Vlad Daniel (300), cl. V Ariton Alina (180), cl. VI Manole Mugur (65), cl. VII Caba Cătălin-Eugen

Scanned with OKEN Scanner

(80); S.g. 31 cl. III Achizei Adrian (92), Alexandrescu Teona (318); Lic. „C. Negruzzi" cl. V Felea Violeta (50), Zălinescu Adrian (211), cl. VI Chiriac Andreea (180), Petruș Adrian (160), Rujoiu Mădălina (156), cl. VII Apostol Radu (80), Brassat Constantin (87), Felea Maura (150), Luca Andra (111), Neculau George (100), Rădeanu Iulian (90), Sandu Daniel (90), Sîncu Gelu Cătălin (90); Lic. „Național" cl. V Lăpușneanu Cristian (100), Nițu Mihaela (112), cl. VI Hara Otilia Beatrice (30), Munteanu Cristian-Mircea (100), Pieptu Alina (105), cl. VII Ruscanu Rodica (80), cl. VIII Apostol Petronela (62), Căruceru Oreste (117), Chistruga Laura (63), Ghermman Cezarina (45), Grădinariu Anca (67), Grămescu Lucian (49), Ioniță Daniel (50), Panaite Everald (130), Pekar Cătălin (79), Pintilie Nicoleta (48), Preotu Alin (119), Ringhiescu Petronela (62), Smău Lorena (60), Tănase Octavian (84); Sc. de aplic. a Lic. ped. „V. Lupu" Adamovici Monica (43), Bătagă Ovidiu (112), Căzănaru Matei (78), Furnică Aida (106), Georgescu Roxana (150), Gologan Liviu-George (89), Marfievici Răzvan (36), Munteanu Smaranda (69), Neamțu Cristina (70), Pasăre Răzvan (74), Popa Alexanda (122), Popa Ana Maria (142), Toma Alina (149), Ungureanu Cristina (113); Lic. „E. Racoviță" cl. V Palăghiu Radu (119), cl. VII Iacob Lavinia (80), Munteanu Răzvan (81), cl. VIII Giongradi Iulia (90), Petrușca Florena (170), Tănculescu Oana (90). **INDEPENDENȚA** (CĂLĂRAȘI) S.g. Potcoava cl. V Ene Ileana Doina (310). ISACCEA (TULCEA) Lic. ind. cl. V Arsenie Marilena (90). **IZBICENI** (OLT) S.g. cl. III Fotă Camelia (380), cl. VI Guilea Cosmin (240). **INSURĂȚEI** (BRĂILA) S.g. 3 cl. VIII Alexe Daniela (220).

JIBOU (SĂLAJ) S.g. 1 cl. VII Kadar Czilla (79); S.g. 2 cl. V Prodan Daiana (80), Turba Adrian (84). **JIRLĂU** (BRĂILA) S.g. cl. VII Manta Corneliu (48),

LĂPUȘNICU MARE (CARAȘ SEVERIN) S.g. cl. IV Obersterescu Sofia (80), cl. V Balaure Gigi (40). **LEBIȘ**(ARAD) S.g. cl. VI Vasilciuc Aurelia (80). **LIEȘTI** (GALAȚI) S.g. 1 cl. VIII Stan Daniela (80), Panaite Cristina (74). **LIUTEREAG** (BISTRIȚA) S.g. cl. V Lupșa Mihai (158). **LUDUȘ**(SIBIU) S.g. cl. V Rusoian Cosmin (205), Tărcuș Ioana (60). **LUDUȘ** (MUREȘ) S.g. 2 cl. V Anichiti Lavinia (69), Botezan Claudia (80), Paratei Simona (48). **LUGOJ** (TIMIȘ) S.g. 2 cl. VI Muntean Mihaela (90); S.g. 4 cl. III Marcu Monica (281), Trautmann Mihai (2 0), cl. VI Trautmann Ludovic (94); S.g. 5 cl. V Stefănuț Adelina (80). **LUNCA** (BOTOȘANI) S.g. cl. III Murărașu Liviu (431). **LUNCANI DE JOS** (HUNEDOARA) S.g. cl. VII Toda Gabriela (38). **LUPENI** (HUNEDOARA) S.g. 2 cl. V Albieru Florin (70), Ciorlia Mugurel (110), cl. VI Pătruțoiu Adrian (100), Stan Gigi (110), Suciu Gabriela (68), Szatmari Haynal (100), Szekely Simona (90).

MARGHITA (BIHOR) S.g. cl. V Chitulea Ioana (59), cl. VII Petrescu Nicoleta (118). **MASTACANI** (GALAȚI) S.g. cl. VI Maxim Daniel (100), cl. VII Grigoraș Daniela (78), Jarcă Dragoș (159). **MĂRĂȘEȘTI** (VRANCEA) S.g. 2 cl. III Beraru Florentina (40). **MĂURENI** (CARAȘ-SEVERIN) S.g. cl. V Virțan Nicolae-Filip (50); cl. VI Pețan Dana (75). **MEDGIDIA** (CONSTANȚA) S.g. 6 cl. VI Moleavin Mihaela (80), Mutafis Filip (100). **MEDIAȘ** (SIBIU) S.g. 2 cl. III Plopeanu Doru (90), cl. IV Moldovanu Radu (139), Plopeanu Doru-Alin (238); Lic. ind. „A. Sever" cl. VIII Fickl Andras (97), cl. IX Birsan Mihaela (99). **MIOVENI** (ARGEȘ) S.g. cl. VI Bechet Daniela (34). **MIZIL** (PRAHOVA) S.g. 2 cl. VI Dumitru Marius și Florin (87). **MORENI** (DÎMBOVIȚA) S.g. 3 cl. V Mihai Sebastian (50); S.g. 4 cl. V Florea Iulian (57), Ivan Iuliana (60), Oprescu Cristina (40), cl. VI Brânzan Celestin (120), Constantinescu Mihaela (135), Ivan Iuliana (120), cl. VII Bădeanu Răzvan (130), Ghiță Ioana Florentina (130), Marinescu Marian (130), Stoica Aida (138), cl. VIII Dedu Eduard (125). **MOTRU** (GORJ) S.g. 1 cl. V Grecu Dragoș Eugen (52), Murgulescu Adriana (73), cl. VI Paicu Marius (111), Bordic Marina (90), Părîianu Ramona (259), Răducu Ionela (100), Todea Delia (128), cl. VII Aniniș Maria (80), Danciu Paula (70), Drulă Maria (145), Mustăreață Cristina (120), cl. VIII Dumitrescu Alin (60); S.g. 2 cl. VIII Luță Florian (99). **MOVILENI** (GALAȚI) S.g. 1 cl. V Mindrescu Violeta (100). **MURGENI** (VASLUI) S.g. cl. VI Focșa Ina (225).

NEGREȘTI-OAȘ (SATU MARE) S.g. 3 cl. VI Fanea Lucian (126). **NICULIȚEL** (TULCEA) S.g. cl. V Grigorași Elena (157).

ORADEA (BIHOR) S.g. 11 cl. VII Moza Simona (80), Naghiu Mihaela (80); S.g. 14 cl. VI Stancu Bogdan (120); S.g. 16 cl. VI Foldes Maria Eva (120), Mihăilă Mircea (120); fără mențiune de școală : cl. V Vătăman Dan (59); fără mențiune de școală și clasă : Ilie Bogdan (216). **ORĂȘTIE** (HUNEDOARA) S.g. 2 cl. IV Jianu Oana Irina (190). **ORȘOVA** (MEHEDINȚI) S.g. cl. III Bagrinovschi Gabriela (200), Călianu Stefan (39), cl. IV Animari Cerasela (60), Barbu Cristian Constantin Jan (60), Miloșescu Georgeta (60), Panaiac Florina (40), Vlădescu Alina Denis (60), cl. V Geblești eanu Jean (76), Lăpădățescu Ion Liviu (75), Oarză Liviu (73), cl. VI Megan Silviu Augustin (162). **OȚELU ROȘU** (CARAȘ-SEVERIN) S.g. 3 cl. VI Beg Daniel Simion (80), Bosioc Ion Marius (90), Palcanin Loredana (80).

AIUD (ALBA) Ș.g.1 cl. VI Cristea Anca (79); **ALBA IULIA** (ALBA) Ș.g.1 cl. V Corpade Sorin (60), Popovici Raluca (98); Ș.g.7 cl. V Jelea Ioana (190), Papiuc Iulia (63); Ș.g. 8 Bercu Eugen (75), Coman Carmen (88); Lic „Horia, Cloșca și Crișan" cl. IX Berinde Ștefan (108), Popa Florin (86); fără mențiune de clasă Bolog Andrada (94); **ALEXANDRIA** (TELEORMAN)

Scanned with OKEN Scanner

Ş.g. 3 cl.VI Ciuperică Florina-Gina (100), cl. VII Giţi Adrian (115), Ionescu Alina-Corina (110); **ALMAŞU** (SĂLAJ) Ş.g. cl. VI Buzea Felicia (80), Petruş Marius (90), Pop Ancuţa (90), Strant Anişoara (80); fără menţiune de clasă: Ripaş Anca (100); **AMĂRĂŞTI** (VÎLCEA) Ş.g. cl. V Predescu Elena-Daniela (69).

BACĂU Ş.c. 4 cl. V Nazaret Alina (107); Ş.g. 5 cl. V Balan Raluca (90), cl. VI Munteanu Codrina (90); Ş.g. 8 cl. V Faghican Radu-Mihai (64); Ş.g. 10 cl. VI Gherceanu Alina Maria (62), Mireanu Andreea (100), Sociu Euseblu (60), Şerban Cristina Constantina (77). Tanţoş Iulian-Mihai (75); Ş.g 15 cl. V Asaftei Dăn-George (46), cl. VI Asaftei Laura (140); Ş.g. 18 cl. VI Iancu Anca (75), Sârbu Ionuţ (90); Ş.g. 19 cl. IV Ciobotaru Daniela (10), Petraru Crina (72), cl. VI Munteanu Cornelia (60), Uricariu Cristina (75); Ş.g. 28 cl. VI Berdilă Cristian (56), cl. VII Nedelcu Malina (80), **BAIA MARE** Ş.g. 11 cl. VI Cîrţ Ciprian (80). **BEIUŞ** (BIHIOR) Ş.g. cl. VI Mocuţa Cristian (89); Lic. „S. Vulcan" cl. V Mateaş Monica (75), cl. VI Hoza Alina (200), Popa Adela (75), cl. VII Brad Daniela (59), Herman Ciprian (96), cl. VIII Magda Dolina Daniela (78), Stanciu Claudia (75). **BENEŞTI** (SĂLAJ) Ş.g. Aluniş cl. VI Pop Flavia (86). **BERCENI** (SECT. AGRIC. ILFOV) Ş.g. 299. cl. VII Bacauer Alina (100). **BISTRIŢA** Ş.g. 3 cl. VII Anghel Ciprian Adrian (147); Lic. „L. Rebreanu" cl. VI Cătană Oana Camelia (136). **BIRLAD** Ş.g. 8 cl. V Vasiliu Mihaela (110), cl. VI Mardare Radu (80). **BIRZEŞTI** (ARGEŞ) Ş.g. cl. VIII Pătrulescu Cornelia-Elena (80), **BLAGEŞTI** Ş. g. 1 Radu Corina Gabriela (79). **BOTOŞANI** Ş. g.7 cl. VII Calusche Anamaria (98), Ochişor Mihaela (98), cl. VIII Carp Cătălin Livius (145), Iliescu Constantin Radu (110); Ş. g. 8 cl. V Aexuc Dragoş (64), cl. VI Canon Ana (85); Ş. g. 12 cl. V Alexoaei Emanuela (79), Mihalache Sebstian (77), Moraru Camelia (77), Pocol Cătălin (79), cl. VII Alboiu Silviu (90), Gheorghiţă Cătălin (137), Huţanu Emy (30), cl. VIII Ciormea Daniel (116); Ş. g. 13 cl. V Alexe Mihaela (78), Grăzaru Simona (96), Livadaru Viorela (80), Mintici Alice-Roxana (90), Mocanu Gabriela (130), Picealcă Corina Bogdana (120), cl. VI Honcic Ticu (152), Piuleac Corneliu (150), Popovici Cristian (130), Ştirbu Ana (130), cl. VII Baciu Silvia (170), Chiriac Roberta (170), Creţu Daniela (160), Răileanu Iulian (100), Sinescu Ionuţ (109), Spiridon Loredana (100), cl. VIII Andrici Larisa (116), Arcălianu Florin (120), Arhip Ioana Claudia (107). **BRAŞOV** Ş. g. 3 cl. V Iosiv Adriana (90); Meirosu Cătălin (90), Vileciu Adrian (90); Ş. g. 5 cl. V Segărceanu Mihai (47); Ş. g. 6 cl. V Creangă Simona (98), Cristescu Ruxandra (110); Ş. g. 27 cl. V Roşca Roxana (240), Tampa Carmen (69), cl. VI Cristolovean Paul (72); Lic. pedagogic cl. VI Voina Liana (80), **BRĂILA** Ş. g. 7 cl. V Burlui Elisabeta Raluca (90); Ş. g. 17 Jeles Ornela (90); Ş. g. 22 cl. V Vâlcu Steluţa (100); Ş. g. 23 cl. V Bahmacenco Felicia (100); Ş. g. 31 cl. V Petre Oana Mihaela (62). **BUCUREŞTI** Ş. g. 2 cl. VI Tofan Laura (69); Ş. g. 12 cl III Toma Elena (170), cl. V Toma Mihai (230); Ş. g. 24 cl. V Patriciu Şerban (133); Ş. g. 30 cl. VII Alexandru Mihaela-Magdalena (158); Ş. g. 57 cl. VI Ceapă Paul Adrian (150); Ş. g. 73 cl. VI Raischi Alina (80); Ş. g. 75 cl. VI Tinca Ioana (90); Ş. g. 79 cl. VI Stinoiu Mihai Alexanru (136); Ş. g. 93 cl. VII Paşca Mihaela Georgiana (80), Plopeşteanu Anca (80); Ş. g. 108 cl. V Coman Cătălin (79), cl. VII Dîrlea Cristina (130); Ş. g. 117 cl. VII Tabarcea Constantin (150); Ş. g. 133 cl. V Boneanu Loredana (50); Ş. g. 155 cl. V Balea Mihai Sorin (103), cl. VI Nenciu Florentina (107); Ş. g. 156 Bulgaru Cristian (30), cl. VI Dumitrescu Robert (20), cl. VII Munteanu Anca (210), Preda Monica (148), Spineanu Anca (314); Ş. g. 157 cl. VI Popescu Elena (99); Ş. g. 169 cl. VI Dăncilă Eduard (116); Ş. g. 174 cl. VI Ardeleanu Monica-Petricia (100), Cernica Mariana (96), Nicolae Andra (108), Popescu Oana (101), cl. VIII Stroe Raluca (116); Ş. g. 176 cl V Grădeanu Ionuţ (250); Ş. g. 190 cl. IV Stănculescu Andrada (78); Ş. g. 196 cl. V Niţu Adrian Costin (80); Ş. g. 201 cl. VI Ungureanu Ştefan (125); Ş. g. 204 cl. V Donescu Smaranda-Oana (40), Rusu Radu (83); Lic. „Zoia Kosmodemianskaia" cl. VI Bălan Ioana-Mădălina (210); Lic. „N. Bălcescu" cl. IX Nichita Mihaela Octavia (326); Lic. „I. L. Caragiale" cl. IX Filip Raluca (96); Lic. „M. Viteazul" cl. IX Borconean Ioan Călin (30). **BUDA-CORBIŢA** (VRANCEA) Ş. g. cl. VI Ionaşcu Teodor (109). **BUZĂU** Ş. g. 11 cl. VI Duşmănescu Adriana (84). **CALVINI** (BUZĂU) Ş. g. cl. V Bulfei Gheorghe (40), Moise Cristina (30). **CARACAL** (OLT) Ş. g. 2 cl. VI Popescu Iulian-Mihail (67); Ş. g. 6 cl. V Gitan Iuliana (80), Roşianu Mihăiţă (69), Matescu Costin (60); Ş. g. 7 cl. VI Dragu George (180), Lazăr Monica Gabriela (97), Dincă Viorel Sorin (90), Niţu Marius (80), Nicu Marllena-Theodora (60); fără menţiune de şcoală cl. V Tăndărică Viorel (180). **CARANSEBEŞ** (CARAŞ-SEVERIN) Ş. g. 8 cl. V Birză Ilie (90), Cranciova Carmen (93), Gruneanţu Anelore (60), Iurcec Fleming (160). **CĂLĂRAŞI** (CĂLĂRAŞI) Ş. g. 1 cl. VIII Dobrescu Cătălin (80); Ş. g. 4 cl. V Cîrjilă Marius (88), cl. VII Culea Mariana (140), Decu Mihaela (127), Iovescu Narcisa (110), Trandafir Răzvan (100), fără menţiune de clasă: Andrei Cristina (100), Chiriac Daniela (130), Jelescu Cătălina (150), Popescu Felix (110); Ş. g. 5 cl. V Moga Peggy (60), cl. VII Coman Daniela (80), Vişan Petruţă (80). fără menţiune de clasă: Gheorghiţă Laurenţiu (80), Harabagiu Claudiu (80); Ş. g. 9 cl. VI Cataloi Laurenţiu (120); fără menţiune de şcoală cl. VII Flangea Roberta (80). **CĂLINEŞTI** (MARAMUREŞ) Ş. g. cl. VI Fonta Petru (180). **CĂLUGĂRENI** (GIURGIU) Lic. agroind. cl. IX Albu Cristina (95), Artin Nina (135), Badea Traian (85), Bădeci Lenuţa (79), Bădănace Angela (130), Brebenel Maria (120), Ciobotaru Carmen (135), Ciufu Vivi (130), Dobre Daniel

Scanned with OKEN Scanner

(140), Dumitru Maria (125), Mihai Viorica (150), Mirea Lucica (130), Mirea Mirela (100), Munteanu Cristina (110), Nițu Daniela (150), Năstase Marinela (118), Nicolae Leonard (80), Rădoi Mihaela (120), Răbinică Nicușor (100), Răgălie Adriana (89), Ilicu Gherghina (115), Stanciu Marius (90), Vișan Liliana (140), cl. X Dinu Florina (90), Ene Paulina (85), Florea Iuliana (85), Giscă Dan-Eugen (100), Pircălabu Dumitra (100), Pircălabu Irina (100), Velea Petronela (89). **CONSTANȚA** (CONSTANȚA) Lic. ind. 10 cl. IX Stoian Loredana (80).

DĂBULENI (DOLJ) Ș. g. 3 cl. V Pîrva Gigi (70), cl. VI Epure Mihaela-Cristiana (90), cl. VII Dragu Mihaela (117), Nan Alina-Daniela (137), Nicolița Ovidiu (90), Teau Ileana (80). **DĂRĂBANI** (BOTOȘANI) Ș. g. 1 cl. V Crețu Letiția-Marcela (161), cl. VI Alonese Otilia-Alina (130), Atodiresei Mihaela (109), Aroșoaie Mihaela (110), Apostoaie Romică (110), Barbariu Silviu (90), Ciobotaru Lăcrămioara (120), Cîrneală Ștefan (90), Gabor Mariana (130), Hrbi Cristian Clara (90), Hriței Cătălina Oana (110), Ilaș Ciprian (80), Iordache Liviu (80), Lazăr Răzvan (90), Lupașcu Costel (90), Nisfoleanu Mona (110), Onciu Gabriela (97), Onofrei Mirela (73), Plămadă Mihaela (100), Scutaru Mihaela (120), Zaharia Dan (80), cl. VII Bivoleanu Diana (112), Pădurariu Dorel (100). **DEJ** (CLUJ) Ș. g. 1 cl. VI Ciupe Stanca (230), cl. VII Lenchințean Catinca (90);

GALAȚI (GALAȚI) Ș. g. 6 cl. VI Dumitru Nicoleta (160), cl. VII Aștefănoaie Marius (130), Franga Carmen (140); Ș. g. cl. 7 VI Cănănău Iulian (73); Ș. g. 10 cl. VI Barbu Lăcrămioara (110), Mitroi Mihaela (140), Peceli Daniela (80), Vișalov Monica (80), cl. VII Plânge Cornelia (108), Popescu Ligia (83), Vasiliu Marinela (100); Ș. g. 15 cl. V Dima Cătălin (50); Ș. g. 16 cl. V Andrășescu Iulia (54), Condruz Lucian (48); Ș. g. 18 cl. V Bulancea Luminița (178), Cocu Emil (78), Gherasim Claudia (75), Mazuru Violeta-Alina (70), Mălindoiu Cristina (99), Sandu Gianina Luminița (133), Ursu Mariana (60), cl. VI Bulancea Gabriel (240), Burlacu Fănel (100), Costache Mihaela (100), Cordoneanu Ion (100), Panaite Violeta (160), Pavel Daniela (100), cl. VII Gudană Tincuța (112); Ș. g. 20 cl. VI Cristofor Adelina-Olivia (110); Ș. g. 24 cl. IV Tănăsescu Camelia (140), cl. V Arfire Liliana (80), Bușilă Alina-Cristina (79), Budei Simona (78), Codrescu Andreea (100), Lupică Dana (82), Pamfil Mariana (80), Popescu Luminița (78), Pugacev Mihaela (100), Ștefănescu Bogdan (99), cl. VI Mitu George (130), Munteanu Dănuț (79), Pleșu Gabriela (98), Spânache Dan (121), Tănăsescu Camelia (100); Ș. g. 25 cl. V Gaiu Mariana (96), Gheorghiu Carmen (106), Ivan Aura (100), Moșinschi Liliana (110), Scarlat Romică (92), Trifu Răzvan-Cosmin (220), Zvic Aurelia (110), cl. VI Călina Oana (137), Chirilă Marian (150), Ciupitu Vasile (150), Gheorghiu Ionuț (128), Gheller Daniel (109), Ilie Monica (108), Irimia Oana (110), Mocanu Andreea-Daniela (148), Munteanu Răzvan (140), Slivneanu Eleny-Daniela (150), Stoica Florența (150).

HAȚEG (HUNEDOARA) Ș. g. 1 cl. VI Stefoni Flavius (80), cl. VII Bencău Narcis (50), Foarce Călin (80); Ș. g. 2 cl. VIII Pop Cristina (130). **HOREZU** (VÎLCEA) Lic. ind. cl. VI Rada Alexandru (52), cl. VIII Bem Anișoara (80). **HUNEDOARA** (HUNEDOARA) Ș. g. 4 cl. VI Nimirceag Victor-Remus (60); Lic. mat. fiz. cl. VIII Stoica Crinela (80), cl. IX Broască Cosmin (86), Ghinea Lucian Laurențiu (84), cl. X Gruian Octavian-Ovidiu (120). **HUȘI** (VASLUI) Ș. g. 2 cl. V Mitcu Mihaela (90); Ș. g. 3 cl. V Cristea Răzvan (79), Timofti Andra-Elena (84), cl. VI Mărgian Lăcrămioara (90).

IACOBENI (SUCEAVA) Ș. g. 1 cl. VII Chiriac Cornelia (80); **IAȘI** (IAȘI) Ș. g. 6 cl. IV Moroșanu Alina (128), cl. VII Dumea Paul-Eduard (90); Ș. g. 11 cl. VI Arsintescu Dorin (115); Ș. g. 12 cl. IV Stan Mihai-Alin (80); Ș. g. 13 cl. VI Andrei Petru (160), Liliana Aurora (120), Malic Alina (110); Ș. g. 17 cl. V Dudu Irina (30), Sinoc Mihaela (46); Lic. Național cl. V Andreescu Laura (80), Hamciuc Irina-Narcisa (100), Popa Bogdan (90), Popa Raluca (100), cl. VI Cracea Claudia (40), Militaru Mădălina (25), Munteanu Cristina (89), Voicu Daniela (100), cl. VIII Alexandrescu Cristina (30), Avrămuț Valeriu (100), Beteagu Anca (439), Burulană Mihai (394), Chistruga Laura (100), Ciocănel Alexandru (100), Constantinescu Cristian (90), Crăciun Bogdan (100), Gălățeanu Adrian (50), Gherman Cezarina (110), Harbuz Crina (200), Herescu Cristian (71), Mandache Constantin (160), Meduid Mihai (100), Mihailovici Livia (170), Mitruță Carmen (70), Osolanu Mihaela (179), Pavel Oana Virginia (90), Pekar Victor Cătălin (190), Preotu Alin (111), Vițcu Ioan (60), Vîlcu Cătălin (220); Lic. „Negruzzi" cl. V Chiriac Andreea (120), Georgescu Ionuț (110), Precupanu Codrin (110), Vasilache Teana (40), cl. VII Lucan Eugen (92), Turinici Gabriel (310), cl. VIII Grimberg Monica (110), cl. XII Bejancu Aurelian (220); Lic. „G. Ibrăileanu" cl. VIII Crăciunescu Raluca (100), Volocariu Monica (120); Lic. „E. Racoviță" cl. V Palaghiu Radu (100), Timohe Gabriel (70); Lic. mat. fiz. 1 cl. IX Turcanu Cristian-Augustin (120). **INEU** (ARAD) Ș. g. cl. VIII Todincă Ioan-Corneliu (222). **IVEȘTI** (GALAȚI) Ș. g. 3 cl. VI Tiron Carmen (58). **IZBICENI** (OLT) Ș. g. cl. VI Zăvăleanu Eugenia (81).

LIEȘTI (GALAȚI) Ș. g. 1 cl. VIII Panaite Cristina (80). **LUDUȘ** (MUREȘ) Ș. g. 2 cl. VII Bahiu Cosmin (110). **LUGOJ** (TIMIȘ) Ș. g. 2 cl. V Bako Daniel (80), Bădoiu Cristian (70), Ploscariu Laura (70), Stîrcescu Vandana (60), cl. VI Murărescu Amelia (140). **LUPENI** (HUNEDOARA) Ș. g. 2 cl. V Bugmar Ana-Maria (100), Csibi Cătălin Eduard (80), Dumitriu Mihaela (80), Holbea Camelia (80), Iacobescu Adrian (77), Lucuța Adrian Claudiu (77), Palu Hormina (80), Panalogea Valentina (77), Saca Vasilica Loredana (77), Sandolache

Scanned with OKEN Scanner

Claudia (77), cl. VI Benedef Monica (104), Grünvald Claudiu (52), cl. VII Szatmari Haynd (180), Szekely Simon (90). HARGHITA (BIHOR) Ş. g. cl. VI Chitulea Ioana (59), Petrescu Nicoleta (118).

MĂSTACANI (DOLJ) Ş. g. cl. VI Maxim Daniel (100), cl. VII Grigoraş Daniela (78), Jarcă Dragoş (159). MĂURENI (CARAŞ-SEVERIN) Ş. g. cl. V Vinţan Nicolae (50). MIOVENI (ARGEŞ) Ş. g. cl. V Benchet Daniela (54). MOGOŞ (ALBA) Ş. g. 1 cl. VII Macra Camelia (100), Negru Emilia (97). MOVENI (DÎMBOVIŢA) Ş. g. 3 cl. V Mihai Sebastian (50); Ş. g. 4 cl. VII Brânzan Celestin (120), Ivan Iuliana (120), cl. VII Bădeanu Răzvan (130), Ghiţă Ioana (130), Marinescu Marian (130).

ORADEA (BIHOR) Ş. g. 5 cl. V Ilie Bogdan (216), Vătămanu Dan (60); Ş. g. 11 cl. VII Moza Simona (80), Waghiu Mihaela (80); Ş. g. 14 cl. VI Stancu Bogdan (120); Ş. g.16 cl. VI Földes Maria (120), Mihăilă Mircea (120).

PITEŞTI (ARGEŞ) Ş. g. 1 cl. VII Cîrstoiu Florin (140), cl. VIII Pretorian Sugona (100); Ş. g. 3 cl. V Turcanu Irina (45), cl. VII Teianu Daniela (94), cl. VIII Turcanu Călin (128); Ş. g. 4 cl. IV Radu Carmen (47); Ş. g. 7 cl. III Burbea Corina (120); Ş. g. 9. cl. VI Albu Dragoş (129); Ş. g. 13 cl. VI Ţiţu Georgiana (120); Ş. g. 14 cl. VI Covariu Simona (120); Ş. g. 15 cl. V Nedelescu Alina (160). PÎRSCOV (BUZĂU) Ş. g. cl. VII Rădună Cristian (74).

RÎMNICU SĂRAT (BUZĂU) Ş. g. 1 Alionte Olivia (135); Ş. g. 5 cl. III Ştefan Claudia (57), cl. V Bălceanu Dana (85), Boitor Alina (85), Drăghiciu Monica (88), Mihalcea Gina (85), Meiroşu Glanina (73), Stănescu Alice (81), Starea Mihaela (87), Tudor Iulia (88); Lic. Agroindustrial cl. IX Ichimescu Mariana (120). ROŞIA MONTANA (ALBA) Ş. g. 1 cl. VI Mera Nicolae (74).

SEBIŞ (ARAD) Ş. g. cl. V Iercoşan Adina (50), cl. VI Hirina Corina (90), Huţ Săndel (60), Ionuţaş Nina (80), Tabuia Sofia (90), Vasileic Daniela (90) SIGMIR (BIHOR) Ş. g. cl VI Dobricam Lăcrămioara (37), Puica Voichiţa (62), cl. VII Purcel Laura (80). STRENŢ (ALBA) Ş. g. cl. VI Sintoma Darius (100). ŞTEFAN CEL MARE (ARGEŞ) Ş. g.cl. IV Vidan Diana(80).

TELCIU (BIHOR) Ş. g. cl. VI Ferchi Maria (66), Sârmaş Crina (60). TIGVENI (ARGEŞ) Ş. g. cl. V Badea Doina (70), Ciocânel Cristina (45), Homag Elena (110); TÎRGU OCNA (BACĂU) Ş. g. 1 cl. VI Negoiţă Cătălina (80), Voinea Valentin (80), cl. VII Bejeanaru Ioan (110);

UNGURAŞ (CLUJ) Ş. g. cl. VI Ardelean Mihaela Rozalia (80). URLAŢI (PRAHOVA) Ş. g. 1 cl. VI Albrich Bogdan (124). URZICENI (IALOMIŢA) Ş. g. 1 cl. VI Prodan Ofelia (200); Ş. g. 2 cl. IV Buga Adriana (64).

VADURI (NEAMŢ) Ş. g. 1 cl. V Balon Alina (48), Coteanu Monica (50), Olariu Elena Mihaela (50), cl. VII Bejan Mihaela (50), Ciorobîtca Gioni (70); Cojocaru Petronel (42), Ploscaru Gabriel (56), Ribu Tamara (80). VALEA LUPULUI (IAŞI) Ş. g. cl. VII Ababei Daniel (72), Herghelegiu Ioan (100). VALEA RÎMNICULUI (BUZĂU) Ş. g. cl. VI Sava Nicoleta (158). VASILE ROAITĂ (GALAŢI) S. g. 2 cl. V Bulai Valentina (86). VASLUI (VASLUI) S. g. 1 cl. VI Andrian Cristina-Daniela (72), Doboşeru Mihai (108), Lupu Adrian (89), Onu Dana (90), Stamate Ionela (110), cl VII Dragu Răzvan (100), cl VIII Leuştean Mihaela (60); S. g. 5 cl. V Ciobanu Alina (100), Mitescu Adrian (130), cl VI Boanţă Anamaria (87), Lupu Alina (118), Negoiţă Daniela (56), Păduraru Raluca (100), Soare Marius (92), cl. VII Solomon Sandu (96); S. g. 6 cl VI Grosu Carmen (70), Pindaru Mihaela (105), cl. VII Cimpeanu Carmen (65); S. g. 8 cl VII Mătei Dorel (120), Niţică Luminiţa (160). VATRA DORNEI (SUCEAVA) S. g. 4 cl. V Jecu Mariana (100). VĂDASTRIŢA (OLT) S. g. cl. VI Budulan Cristina Paulina (80), Cojoacă Maria (80), Vanţă Victor (90). VĂLENII DE MUNTE (PRAHOVA) S. g. 1 cl. VIII Bulacu Ion Daniel (96); S. g. 3 cl. V Florescu Răzvan (90). VICTORIA (BRAŞOV) Lic. ind. chimie cl. XII Birsan Dorian (160). VÎLCELE (CĂLĂRAŞI) S. g. cl. VIII Preda Nicoleta Verona (70). VÎNĂTORI (NEAMŢ) S.g. 1 cl. V Tănase Elena (140), Ursachi Geanina (160).

ZALĂU (SĂLAJ) S. g. 1 cl. VI Tomole Lavinia (127).

I. P. Informaţia c. 2449

Index 41 601

Lei 3,50

Scanned with OKEN Scanner

ISSN 0016—5441

SOCIETATEA DE ȘTIINȚE MATEMATICE
DIN REPUBLICA SOCIALISTĂ ROMÂNIA

GAZETA MATEMATICĂ

PUBLICAȚIE LUNARĂ PENTRU TINERET

10

DIN CUPRINS:

— PROF. C. IONESCU-ȚIU LA 80 DE ANI
— CONSTRUCȚII ELEMENTARE DE INELE ȘI CORPURI
— CONCURSUL DE MATEMATICĂ
— PROBLEME REZOLVATE PENTRU GIMNAZIU ȘI LICEU
— PROBLEME PENTRU CICLUL PRIMAR, GIMNAZIU, PRELIMINARE DE TIP O.I.M. PENTRU ELEVII DIN GIMNAZIU, PENTRU LICEU, PREGĂTITOARE PENTRU O.I.M. ȘI O.B.M., PENTRU CONCURSUL ANUAL AL REZOLVITORILOR, DE INFORMATICĂ

ANUL XCIII Nr. 10/1988

Scanned with OKEN Scanner

GAZETA MATEMATICĂ

SUMARUL

1. Profesorul Constantin Ionescu-Țiu la 80 de ani, de *D. M. Bătinețu-Giurgiu* 385
2. Construcții elementare de inele și corpuri (III), de *Toma Albu* 389
3. Concursul de matematică, etapa locală, Constanța, 1988 . . 396
4. Probleme rezolvate pentru gimnaziu (E : 9277, E : 9283, E : 9257, E : 9259, E : 9264, E : 9266, E : 9268 E : 9274 398
5. Probleme rezolvate pentru liceu (2237, 21151, 21163, 21164, 21280, 21247, 21315, ... 402
6. Probleme pentru ciclul primar (73—80) 409
7. Probleme pentru gimnaziu (E : 9539—E : 9562) 409
8. Probleme preliminare de tip O. I. M. pentru elevii din gimnaziu (O. G : 81—O. G : 82) 413
9. Probleme pentru liceu (21569—21596 413
10. Probleme pregătitoare pentru O. I. M. și O. B. M. (O : 563—O : 565) . . . . . cop. III
11. Probleme pentru Concursul anual al rezolvitorilor (C : 825—C : 832) . . . . . cop. III
12. Probleme de informatică (I : 341—I : 342) . . . . . cop. IV

ANUL XCIII 10 1988

COMITETUL DE REDACȚIE

Lector univ. Dumitru Acu, Sibiu; lector univ. Toma Albu; lector univ. Horea Banea, Brașov; lector univ. Octavian Băscă; conf. univ. Dan Brânzei, Iași; prof. Constantin Cărbunaru; prof. Marcel Chiriță; prof. Pál Dályay, Tg. Mureș; lector univ. Inocențiu Drăghicescu; prof. Ioana Drăghici; inv. Alexandrina Dumitru; prof. Ilie Gheorghiță; prof. Adrian Ghioca, Sinaia; cercet. princip. Gheorghe Gussi; lector univ. Stere Ianuș; prof. Ștefan Kadar, Baia Mare; lector univ. Constantin Niță; prof. univ. Arpad Pal, Cluj-Napoca; lector univ. Laurențiu Panaitopol; prof. Olimpia Popescu, Ploiești; matem. Paul Radovici-Mărculescu; lector univ. Gheorghe Sirețchi; lector univ. Ioan Tomescu; prof. Mircea Trifu; prof. Florin Vulpescu-Jalea.

REDACȚIA GAZETEI MATEMATICE

Redactor șef (delegat): Acad. N. Teodorescu; redactori principali: prof. Ilie Iliescu, prof. Liviu Pîrșan, prof. Marcel Țena; redactori principali onorifici: C. Ionescu-Țiu, asist. univ. Elflerie Rogai; redactori: prof. Liliana Balaci, prof. Alexandru Constantinescu.

Responsabil de număr: prof. Ilie Iliescu

ADRESA REDACȚIEI GAZETEI MATEMATICE

Str. Academiei nr. 14, tel. 14.46.53 — București, 1, cod. 79543.

Cititorii din străinătate se pot abona prin ROMPRESFILATELIA, Sectorul Export-Import-Presă, Calea Griviței nr. 64—66, P.O.Box 12—201, Telex 10376 Prsfr București ROMÂNIA.

Scanned with OKEN Scanner

GAZETA MATEMATICĂ

PUBLICAȚIE LUNARĂ PENTRU TINERET

Anul XCIII nr. 10 octombrie 1988

PROFESORUL CONSTANTIN IONESCU-ȚIU LA 80 DE ANI

Odată în plus Gazeta Matematică își face datoria de a anunța cititorilor ei un eveniment plăcut.

Este vorba de aniversarea a 80 de ani de viață a unuia dintre cei care și-au consacrat un foarte mare număr din acești ani slujirii ei : Profesorul *Constantin D. Ionescu-Țiu*.

Născut la 24 iulie 1908, în satul Țiu din județul Dolj, *Constantin D. Ionescu-Țiu* a urmat cursurile liceului militar din Craiova unde a avut ca profesor de matematică pe *Ștefan Ioncionici*.

Constantin Ionescu-Țiu devine ofițer de geniu și astfel, în calitate de sublocotenent, urmează cursul de educație fizică și militară. Totodată este student la Facultatea de Filozofie și apoi la Facultatea de Matematică din București obținînd în anul 1937 diploma de licențiat în matematici.

A urmat cursurile Facultății de Construcții a Politehnicii din București și în martie 1941 obține diploma de inginer constructor.

Fiind licențiat în matematici urmează și cursurile de statistică și actuariat unde a avut ca profesori pe *Octav Onicescu, Gheorghe Mihoc* și *N. Georgescu-Roegen*.

Între anii 1937—1941 este profesor de matematică la Școala de ofițeri de geniu din București.

În anul 1935 devine membru al Societății Gazeta Matematică, redactor la Gazeta Matematică și astfel face parte din comisia de examinare la Concursul Gazetei Matematice, calitate pe care o deține ulterior și la Olimpiadele de matematică ale elevilor pînă în anul 1978 cînd se pensionează.

A funcționat ca profesor de liceu la liceele „Aurel Vlaicu" și „Nicolae Bălcescu" din București unde obține gradul didactic I ca profesor de matematică.

A funcționat în învățămîntul superior ca lector universitar la Academia Tehnică Militară în cadrul catedrei de mecanică.

Profesorul *C. Ionescu-Țiu* este cunoscut, mai ales, ca redactor al Gazetei Matematice, ca autor al unui număr impresionant de probleme propuse la Gazetă sau la Concursuri, ca autor al mai multor manuale și culegeri de probleme.

După cum am subliniat mai sus, din anul 1935, *C. Ionescu-Țiu* (*C. I. Ț*) a intrat în Redacția Gazetei Matematice, a Suplimentului cu Exerciții al Gazetei Matematice, a revistei Pitagora din Craiova și revistei Pozitiva din București. La toate aceste reviste, *C. Ionescu-Țiu* a propus numeroase probleme, a corectat soluțiile corespondenților, a redactat soluții, a efectuat corecturi de imprimare și astfel a contribuit la susținerea acestor reviste. În special la Suplimentul Gazetei Matematice, *C. Ionescu-Țiu* a corectat și centralizat, timp de 15 ani, majoritatea soluțiilor corespondenților din țară.

La reorganizarea revistelor matematice, din anul 1949, *C. Ionescu-Țiu* a rămas în redacția revistei pentru elevi unde a îndeplinit sarcini ca : redactor principal, redactor șef adjunct și redactor șef, sarcini pe care le-a îndeplinit cu pasiune, cu devotament și abnegație.

În munca redacțională la Gazeta Matematică, profesorul *C. Ionescu-Țiu* a militat pentru ca activitatea la Gazeta Matematică să fie pusă în slujba școlii, să contribuie la selectarea și formarea tinerelor talente matematice. Fiind printre inițiatorii Olimpiadelor Internaționale de Matematică, profesorul *C. Ionescu-Țiu* a participat la pregătirea loturilor olimpice ale țării noastre pînă în anul 1978 cînd se pensionează, dar rămîne în Redacția Gazetei Matematice ca redactor principal.

Ca o recunoaștere a meritelor sale ca profesor și redactor la Gazeta Matematică, în anul 1967 a fost distins cu Medalia Muncii (pentru merite didactice) iar în anul 1968 este distins cu Ordinul Muncii clasa a III-a pentru merite dosebite în cadrul Redacției Gazetei Matematice și pentru activitate îndelungată în cadrul redacției.

Scanned with OKEN Scanner

La Gazeta Matematică, pe lîngă numărul impresionant de probleme, profesorul *C. Ionescu-Țiu* a publicat și un număr de 20 note matematice și articole din toate domeniile matematicii : algebră, geometrie, trigonometrie și analiză matematică.

A pregătit și publicat, singur sau în colaborare, numeroase lucrări în sprijinul învățămîntului.

Acum, la 80 de ani, profesorul *C. Ionescu-Țiu* continuă să colaboreze la Gazeta Matematică, Revista Matematică din Timișoara, dar și la revistele mai noi, dintre care citățm Revista Matematică a Elevilor din Galați, unde este prezent cu probleme propuse.

Profesorul *C. Ionescu-Țiu* face parte din colectivele de redacție (la unele din ele fiind membru fondator) ale revistelor mai recente ca : Revista „Gamma" din Brașov condusă de profesorul *M. Benetc*, „Caietul de Informare Matematică" din Cîmpina condus de profesorul *Policarp Ganea*, „Gazeta Micilor Matematicieni" din Grințieș — Neamț condusă de profesorul *Ștefan Țifui*, revistele „Alfa" și „Beta" din Craiova, revista „Sfera" din Băilești — Gorj, „Revista de matematică aplicată" din Calafat — Dolj.

De asemenea, profesorul *C. Ionescu-Țiu* colaborează la Buletinele de Informare Matematică ale județelor : Bacău, Suceava și Vîlcea.

Am prezentat foarte pe scurt o viață închinată învățămîntului matematic, o viață dedicată Gazetei Matematice, o viață dedicată descoperirii, îndrumării și formării tinerelor talente matematice.

La mulți ani !

CONSTRUCȚII ELEMENTARE DE INELE ȘI CORPURI (III)

de Toma Albu

§.4. CARACTERISTICA UNUI INEL. SIMBOLUL LUI LEGENDRE

Acest paragraf are un caracter pregătitor pentru considerațiile din ultima parte a articolului de față, dar prezintă și un interes în sine. S-a avut grijă ca noțiunile care apar în titlul paragrafului, ca și proprietățile acestora să fie date într-un mod cît mai accesibil.

În cele ce urmează A va desemna un inel, nu neapărat comutativ. Pentru a-l deosebi de numărul întreg 1, elementul unitate din A va fi notat prin e. În §.2 am văzut că A are în mod canonic o structură de $\mathbf{Z}$ — algebră via morfismul structural

$$\alpha_A : \mathbf{Z} \to A,\ \alpha_A(n) = n \cdot e,\ n \in \mathbf{Z}.$$

Prin $P(A)$ vom nota imaginea morfismului α_A, adică

$$P(A) = \{n \cdot e \mid n \in \mathbf{Z}\}.$$

Este clar că $P(A)$ este un subinel unitar al lui A și că orice subinel unitar al lui A include pe $P(A)$, cu alte cuvinte, $P(A)$ este cel mai mic (în raport cu incluziunea) subinel unitar al lui A. Subinelul $P(A)$ al lui A se numește *subinelul prim* al inelului A.

Dacă $i, j \in \mathbf{Z}$, atunci este clar că $i \cdot e = j \cdot e \Leftrightarrow (i - j) \cdot e = 0$, deci

(i) α_A este injectiv $\Leftrightarrow (\forall) m \in \mathbf{N} \setminus \{0\},\ m \cdot e \neq 0$.

(ii) α_A nu este injectiv $\Leftrightarrow (\exists) m \in \mathbf{N} \setminus \{0\}$ cu $m \cdot e = 0$.

Reamintim că dacă $(G, +)$ este un grup notat aditiv și x este un element din G, atunci se zice că x este de *ordin infinit* dacă $m \cdot x = 0$ pentru orice $m \in \mathbf{N} \setminus \{0\}$ și de *ordin finit* în caz contrar. În acest ultim caz, *ordinul* lui x se definește a fi cel mai mic număr $k \in \mathbf{N} \setminus \{0\}$ pentru care $k \cdot x = 0$ și acesta se notează cu $\mathrm{ord}(x)$. Dacă x este de ordin infinit, convenim să scriem $\mathrm{ord}(x) = \infty$.

Sînt binecunoscute următoarele proprietăți referitoare la un grup $(G, +)$ și la un element $x \in G$ (vezi de exemplu [2] pag. 116) :

(1) $\mathrm{ord}(x) = n \Leftrightarrow \langle x \rangle = \{0, x, 2x, \ldots, (n-1)x\}$ și $|\langle x \rangle| = n$, unde $\langle x \rangle = \{k \cdot x \mid k \in \mathbf{Z}\}$.

(2) $mx = 0$ și $m \in \mathbf{N} \setminus \{0\} \Rightarrow \mathrm{ord}(x) \mid m$.

(3) Dacă G este finit, atunci orice element al său are ordin finit, divizor al lui $|G|$.

Revenind acum la inelul A, putem considera ordinul elementului unitate e al lui A, e fiind considerat ca element al grupului aditiv $(A, +)$ al inelului A.

Scanned with OKEN Scanner

Din cele de mai sus deducem următoarele fapte:
a) α_A este injectiv $\Leftrightarrow$ ord $(e) = \infty$.
b) α_A nu este injectiv $\Leftrightarrow$ ord(e) este finit; în acest caz, dacă ord$(e) = n$, atunci

$$P(A) = \langle e \rangle = \{0, e, 2e, \ldots, (n-1)e\} \text{ și } |P(A)| = n.$$

Sîntem acum în măsură să dăm următoarea:

Definiție. Se numește *caracteristica* inelului A numărul natural notat Char(A), definit în modul următor:

$$\text{Char}(A) = \begin{cases} 0 & \text{dacă ord}(e) = \infty \\ n & \text{dacă ord}(e) = n \in \mathbf{N}, \end{cases}$$

Observăm că, deoarece $e \neq 0$, avem Char$(A) \neq 1$.

4.1. Propoziție. *Pentru un inel A au loc următoarele afirmații:*

(1) Char $(A) = 0 \Leftrightarrow$ *inelele* $P(A)$ *și* $\mathbf{Z}$ *sînt izomorfe.*

(2) Char $(A) = n > 0 \Leftrightarrow$ *inelele* $P(A)$ *și* $\mathbf{Z}_n$ *sînt izomorfe.*

Demonstrație. (1) Dacă Char $(A) = 0$, atunci morfismul surjectiv

$$\overline{\alpha}_A : \mathbf{Z} \to P(A),\ n \mapsto n \cdot e$$

dedus din morfismul structural α_A al $\mathbf{Z}$ – algebrei A este injectiv, deci izomorfism.

Reciproc, dacă inelele $\mathbf{Z}$ și $P(A)$ sînt izomorfe, atunci există un morfism unitar bijectiv

$$\beta : \mathbf{Z} \to P(A).$$

Cum $\beta(1) = e$, rezultă neapărat că $\beta(n) = n \cdot e = \overline{\alpha}_A(n)$ pentru orice $n \in \mathbf{Z}$ (căci β este în particular un morfism de grupuri aditive), deci $\beta = \overline{\alpha}_A$. Așadar, α_A este injectiv, deci ord$(e) = \infty$, adică Char$(A) = 0$.

(2) Dacă Char$(A) = n$, atunci am văzut mai sus că

$$P(A) = \{0, e, 2e, \ldots, (n-1)e\} \text{ și } |P(A)| = n.$$

Considerăm funcția

$$\gamma : \mathbf{Z}_n \to P(A)$$

definită astfel:

$$\gamma(\hat{k}) = k \cdot e. \qquad 0 \leqslant k \leqslant n-1$$

Este clar că γ este o funcție bijectivă.

Arătăm în continuare că γ este un morfism de inele. Fie $s, t \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$; împărțind pe $s + t$ la n obținem $s + t = nq + r$, unde $0 \leqslant r \leqslant n-1$.

Deci $\gamma(\hat{s} + \hat{t}) = \gamma(\widehat{s+t}) = \gamma(\hat{r}) = re = (s + t - nq)e = (s + t)e - q(ne) = s \cdot e + t \cdot e =$
$= \gamma(\hat{s}) + \gamma(\hat{t})$, deoarece $n \cdot e = 0$. Analog se arată că

$$\gamma(\hat{s} \cdot \hat{t}) = \gamma(\hat{s}) \cdot \gamma(\hat{t}).$$

Reciproc, dacă $P(A)$ și $\mathbf{Z}_n$ sînt inele izomorfe, atunci neapărat Char$(A) = m > 0$, căci altfel ar rezulta conform punctului (1) că $P(A) \simeq \mathbf{Z}$, deci $\mathbf{Z} \simeq \mathbf{Z}_n$, absurd. Cum $|P(A)| = m = |\mathbf{Z}_n| = n$ rezultă că $m = n$, adică Char$(A) = n$.

4.2. Observații. (1) Dacă A este un inel finit, atunci obligatoriu Char$(A) > 0$, deoarece în caz contrar am avea Char$(A) = 0$, deci inelul finit A ar conține un subinel $P(A)$ izomorf cu inelul infinit $\mathbf{Z}$, ceea ce este absurd. În plus, Char(A) divide $|A|$. Există însă inele infinite avînd caracteristică nenulă dată n, de exemplu $\mathbf{Z}_n[X]$.

(2) Dacă $p > 0$ este un număr prim, atunci Char$(A) = p \Leftrightarrow p \cdot e = 0$. Implicația netrivială este „$\Leftarrow$”. Dacă $p \cdot e = 0$, atunci e are ordin finit, ord$(e) = n$. Rezultă că $n \mid p$ deci p fiind prim, avem fie $n = 1$, fie $n = p$. Nu putem avea $n = 1$ căci $e \neq 0$, deci $p = n =$ ord$(e) =$ Char(A).

4.3. Propoziție. *Caracteristica unui domeniu de integritate A este fie 0, fie un număr prim > 0.*

În particular, orice corp finit are caracteristica număr prim nenul.

Scanned with OKEN Scanner

Demonstrație. Fie $n = \text{Char}(A)$ și presupunem $n > 0$. Atunci $n \geq 2$; dacă n nu ar fi prim n s-ar scrie sub forma $n = n_1 \cdot n_2$, unde $1 < n_1 < n$, $1 < n_2 < n$, deci

$$0 = n \cdot e = (n_1 \cdot n_2) \cdot e = (n_1 \cdot e)(n_2 \cdot e).$$

A fiind domeniu de integritate, deducem $n_1 e = 0$ sau $n_2 e = 0$, ceea ce contrazice faptul că $n = \text{ord } e$.

4.4. Propoziție. *Dacă A este un inel finit având caracteristica un număr prim p, atunci $|A| = p^n$, pentru un anumit $n \in \mathbf{N} \setminus \{0\}$.*

Demonstrație. Pentru prescurtare, vom nota subinelul prim $P(A)$ al lui A prin P. Conform lui 4.1.(2), $P \simeq \mathbf{Z}_p$; cum $\mathbf{Z}_p$ este un corp, deducem că P este un subcorp al lui A.

Dacă $A = P$, demonstrația este încheiată. Putem deci presupune că $A \neq P$. Fie $e_2 \in A \setminus P$; pentru uniformitate notăm $e = e_1$ și $P = P_1$. Considerăm mulțimea

$$P_2 = \{a_1 e_1 + a_2 e_2 \mid a_1, a_2 \in P\}.$$

Evident $P_2 \subseteq A$.

Afirmăm că scrierea unui element $x \in P_2$ sub forma

$$x = a_1 e_1 + a_2 e_2$$

cu $a_1, a_2 \in P$ este unică. Într-adevăr, dacă avem și scrierea

$$x = b_1 e_1 + b_2 e_2$$

cu $b_1, b_2 \in P$, atunci

$$(a_1 - b_1)e_1 + (a_2 - b_2)e_2 = 0.$$

Rezultă că $a_2 - b_2 = 0$, altfel, ținînd cont că P este un subcorp al lui A, am obține că $e_2 = (-(a_2 - b_2)^{-1} \cdot (a_1 - b_1))e_1 \in P$, absurd. Deducem atunci că $a_1 - b_1 = 0$, deci $a_1 = b_1$ și $a_2 = b_2$. Așadar, funcția

$$\alpha_2 : P \times P \to P_2, \quad \alpha_2(a_1, a_2) = a_1 e_1 + a_2 e_2$$

este bijectivă, de unde rezultă că $|P_2| = |P \times P| = |P|^2 = p^2$.

Dacă $A = P_2$, demonstrația este încheiată. În caz contrar, fie $e_3 \in A \setminus P_2$ și

$$P_3 = \{a_1 e_1 + a_2 e_2 + a_3 e_3 \mid a_1, a_2, a_3 \in P\}.$$

Scrierea unui element $x \in P_3$ sub forma

$$x = a_1 e_1 + a_2 e_2 + a_3 e_3$$

cu $a_1, a_2, a_3 \in P$ este unică, căci dacă

$$x = b_1 e_1 + b_2 e_2 + b_3 e_3$$

cu $b_1, b_2, b_3 \in P$, atunci

$$(a_1 - b_1)e_1 + (a_2 - b_2)e_2 + (a_3 - b_3)e_3 = 0.$$

Dacă am avea $a_3 - b_3 \neq 0$, atunci, ținînd cont de faptul că P este un subcorp, am deduce că $(a_3 - b_3)^{-1}$ există și este în P, deci

$$e_3 = (-(a_3 - b_3)^{-1} \cdot (a_1 - b_1))e_1 + (-(a_3 - b_3)^{-1} \cdot (a_2 - b_2))\, e_2 \in P_2$$

ceea ce contrazice alegerea lui e_3.

Rezultă că funcția

$$\alpha_3 : P \times P \times P \to P_3, \quad \alpha_3(a_1, a_2, a_3) = a_1 e_1 + a_2 e_2 + a_3 e_3$$

este bijectivă, de unde se obține că $|P_3| = |P \times P \times P| = |P|^3 = p^3$.

Dacă $A = P_3$, demonstrația s-a terminat. În caz contrar, se consideră un element $e_4 \in A \setminus P_3$ și se notează

$$P_4 = \{a_1 e_1 + a_2 e_2 + a_3 e_3 + a_4 e_4 \mid a_i \in P,\ i = \overline{1,4}\}.$$

Deoarece mulțimea A este finită, deducem că după un număr finit n de pași, $A = P_n$, unde

$$P_n = \{a_1 e_1 + a_2 e_2 + \ldots + a_n e_n \mid a_i \in P,\ i = \overline{1, n}\}$$

și $e_1, e_2, \ldots, e_n$ sînt elemente din A, alese astfel încît $e_n \in A \setminus P_{n-1}$.

Scanned with OKEN Scanner

Din alegerea elementelor $e_1, \ldots, e_n$ rezultă, ca și mai sus, că funcția

$$\alpha_n : P^n \to P_n,\ \alpha_n(a_1, \ldots, a_n) = a_1e_1 + \ldots + a_ne_n$$

este bijectivă, de unde se obține că

$$|P_n| = |P^n| = |P|^n = p^n$$

deci $|A| = |P_n| = p^n$, pentru un anumit n.

Cititorul familiarizat cu noțiunea de spațiu vectorial și de bază, va recunoaște cu siguranță adaptarea la nivel elementar — care evită noțiunile de sistem liniar independent, de subspațiu generat de o submulțime, etc. — a demonstrației clasice privind extragerea unei baze dintr-un sistem finit de generatori ai unui spațiu vectorial V. Pentru aceasta, este suficient să se observe că A poate fi privit în mod canonic, ca un spațiu vectorial peste corpul P.

În continuare, pentru informarea cititorului, vom lista câteva din proprietățile mai importante ale corpurilor finite :

A. *Orice corp finit este comutativ.*

B. *Dacă K este un corp finit, atunci $|K| = p^n$, unde p este un număr prim >0 (de fapt $p = \mathrm{Char}\,(K)$) și $n \in \mathbf{N} \setminus \{0\}$.*

C. *Dacă K este un corp finit și $q = |K|$, atunci $x^{q-1} = e$ pentru orice $x \in K^*$, unde e este elementul unitate din K.*

D. *Grupul multiplicativ $(K^*, \cdot)$ al unui corp finit K este ciclic.*

E. *Grupul aditiv $(K, +)$ al unui corp finit K este izomorf cu grupul aditiv $\underbrace{\mathbf{Z}_p \times \ldots \times \mathbf{Z}_p}_{n \text{ ori}}$,*

unde $p = \mathrm{Char}\,(K)$ și $n \in \mathbf{N}$ este astfel încît $|K| = p^n$.

F. *Pentru orice număr prim $p > 0$ și orice număr natural $n \in \mathbf{N} \setminus \{0\}$, există un corp cu p^n elemente.*

G. *Două corpuri finite K_1 și K_2 sînt izomorfe dacă și numai dacă $|K_1| = |K_2|$.*

Proprietatea A constituie un rezultat clasic demonstrat de *J. H. M. Wedderburn* în anul 1905.

Proprietatea B rezultă imediat din 4.3 și 4.4, iar proprietatea C, cunoscută și sub numele de „Mica Teoremă a lui *Fermat*" pentru corpul finit K, se poate proba astfel :

Dacă $x \in K^*$, atunci, conform proprietății (3) enunțate la începutul paragrafului de față, $\mathrm{ord}\,(x) = n_x$ divide ordinul $q - 1$ al grupului $(K^*, \cdot)$, deci $q - 1 = n_x \cdot s$, pentru un anumit $s \in \mathbf{N}$. Așadar $x^{q-1} = x^{n_x \cdot s} = (x^{n_x})^s = e^s = e$.

Proprietatea E se poate demonstra astfel : Fie P subcorpul prim al lui K. Atunci $P \simeq \mathbf{Z}_p$ și, folosind notațiile din demonstrația 4.1, avem că funcția

$$\alpha_n : P^n \to P_n,\quad \alpha_n(a_1, \ldots, a_n) = a_1e_1 + \ldots + a_ne_n$$

este bijectivă. Dar $P_n = K$ și se observă imediat că α_n este un morfism de grupuri aditive. Așadar, $(K, +) \simeq (P^n, +)$. Dar $P \simeq \mathbf{Z}_p$, deci $(P^n, +) \simeq (\underbrace{\mathbf{Z}_p \times \ldots \times \mathbf{Z}_p}_{n \text{ ori}}, +)$.

Pentru proprietățile A, D, F și G nu se cunosc demonstrații elementare (i.e. la nivel de cunoștințe de clasa a XII-a). În paragraful următor vom arăta însă că în cazul particular al corpurilor cu p^2 elemente, toate aceste proprietăți, cu excepția proprietății D, se pot proba elementar.

În acest scop vom prezenta în continuare într-un mod accesibil noțiunea de rest pătratic și vom da o demonstrație elementară a „Criteriului lui *Euler*".

Fie $p > 0$ un număr prim și $d \in \mathbf{Z}$. Spunem că d este *rest pătratic modulo p* dacă există $a \in \mathbf{Z}$ cu $d \equiv a^2 \pmod p$. Este clar că orice $d \in \mathbf{Z}$ este rest pătratic modulo 2, iar dacă $p \nmid d$, atunci d este rest pătratic modulo p, căci $d \equiv 0^2 \pmod p$. Este așadar interesant doar cazul $p > 2$ și $d \in \mathbf{Z}$, $(d, p) = 1$.

Definiție. Fie $p > 2$ un număr prim și $d \in \mathbf{Z}$ cu $(d, p) = 1$. *Simbolul lui Legendre* $\left(\frac{d}{p}\right)$ al lui d relativ la p este definit în modul următor :

$$\left(\frac{d}{p}\right) = \begin{cases} 1 & \text{dacă } d \text{ este rest pătratic modulo } p \\ -1 & \text{dacă } d \text{ nu este rest pătratic modulo } p \end{cases}$$

Proprietățile de bază ale simbolului lui *Legendre* sînt conținute în următoarea

4.5. Propoziție *Fie $p > 2$ un număr prim și $a, b \in \mathbf{Z}$ cu $(a, p) = 1$, $(b, p) = 1$. Atunci au loc afirmațiile :*

(1) $\left(\frac{a}{p}\right) = \left(\frac{b}{p}\right)$ *dacă* $a \equiv b \pmod p$;

Scanned with OKEN Scanner

(2) $$\left(\frac{a^2}{p}\right) = 1 \text{ ; } \textit{în particular} \left(\frac{1}{p}\right) = 1 \text{ ;}$$

(3) $$\left(\frac{a}{p}\right) \equiv a^{\frac{p-1}{2}} \pmod{p} \text{ (Criteriul lui } \textit{Euler}\text{) ;}$$

(4) $$\left(\frac{-1}{p}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2}} \text{ ;}$$

(5) $$\left(\frac{ab}{p}\right) = \left(\frac{a}{p}\right)\left(\frac{b}{p}\right).$$

Demonstrație. Proprietățile (1) și (2) sînt evidente. Pentru a demonstra (3) vom utiliza de mai multe ori următorul fapt bine cunoscut : „dacă K este un corp comutativ și f este un polinom din $K[X]$ de grad $n \geqslant 1$, atunci f are cel mult n rădăcini în K". Acest rezultat este demonstrat în manualul de Algebră de clasa a X-a pentru caul $K = \mathbf{C}$, dar, după cum se constată imediat, demonstrația „merge" și în cazul unui corp comutativ arbitrar.

Numărul p fiind prim, inelul $\mathbf{Z}_p$ este un corp cu p elemente. Este foarte convenabil ca relația de congruență modulo p din inelul infinit $\mathbf{Z}$ să o transcriem sub forma relației de egalitate din corpul finit $\mathbf{Z}_p$:

$$a \equiv b \pmod{p} \Leftrightarrow \hat{a} = b,$$

unde $a, b \in \mathbf{Z}$, iar $\hat{a} \in \mathbf{Z}_p$ este clasa de resturi modulo p a lui a.

Să considerăm mulțimea

$$R = \left\{\pm 1, \pm 2, \ldots, \pm \frac{p-1}{2}\right\}$$

de numere întregi. Mulțimea R este ceea ce se cheamă un *sistem redus de resturi modulo p*, adică are următoarele proprietăți, care se verifică imediat :

i) $r \not\equiv 0 \pmod{p}$, $(\forall) r \in R$,

ii) $r \not\equiv s \pmod{p}$, $(\forall) r, s \in R$ cu $r \neq s$,

iii) $|R| = p - 1$.

Notînd $\hat{R} = \{\hat{r} \mid r \in R\}$, deducem că $\mathbf{Z}_p^* = \hat{R}$, deoarece conform proprietăților de mai sus avem

$$\hat{R} \subseteq \mathbf{Z}_p^* \quad \text{și} \quad |\hat{R}| = |\mathbf{Z}_p^*| = p - 1.$$

Notăm

$$\mathbf{Z}_p^{*2} = \{\hat{x}^2 \mid x \in \mathbf{Z}_p^*\}.$$

Cum $\mathbf{Z}_p^* = \hat{R}$, rezultă că $\mathbf{Z}_p^{*2} = \left\{\hat{1}^2, \hat{2}^2, \ldots, \widehat{\left(\frac{p-1}{2}\right)}^2\right\}$. Dacă $1 \leqslant r < s \leqslant \frac{p-1}{2}$, atunci $r^2 \not\equiv s^2 \pmod{p}$ adică $\hat{r}^2 \neq \hat{s}^2$, căci altfel, dacă am avea $\hat{r}^2 = \hat{s}^2 = \hat{a}$, polinomul $X^2 - \hat{a} \in \mathbf{Z}_p[X]$ ar avea cel puțin 4 rădăcini distincte în $\mathbf{Z}_p$ și anume $\hat{r}, -\hat{r}, \hat{s}, -\hat{s}$, ceea ce este imposibil (avem $\hat{r} \neq -\hat{r}$ căci $\hat{r} \neq \hat{0}$ și $\hat{2} \neq \hat{0}$). Așadar

$$|\mathbf{Z}_p^{*2}| = \frac{p-1}{2}.$$

Să notăm că dacă $a \in \mathbf{Z}$ și $a \not\equiv 0 \pmod{p}$, atunci

$$\hat{a} \in \mathbf{Z}_p^{*2} \Leftrightarrow \left(\frac{a}{p}\right) = 1.$$

$$\hat{a} \notin \mathbf{Z}_p^{*2} \Leftrightarrow \left(\frac{a}{p}\right) = -1.$$

Scanned with OKEN Scanner

Pentru orice $a \in \mathbf{Z}$ cu $a \not\equiv 0 \pmod p$, adică $\hat{a} \neq \hat{0}$, avem conform Micii Teoreme a lui *Fermat*:

$$\left(\hat{a}^{\frac{p-1}{2}}\right)^2 = \hat{a}^{p-1} = \hat{1},$$

deci

$$\left(\hat{a}^{\frac{p-1}{2}} - \hat{1}\right)\left(\hat{a}^{\frac{p-1}{2}} + \hat{1}\right) = \hat{0},$$

adică

$$\hat{a}^{\frac{p-1}{2}} = \hat{1} \text{ sau } \hat{a}^{\frac{p-1}{2}} = -\hat{1}.$$

Nu putem avea simultan $\hat{a}^{\frac{p-1}{2}} = \hat{1}$ și $\hat{a}^{\frac{p-1}{2}} = -\hat{1}$, căci atunci ar rezulta $\hat{1} = -\hat{1}$, deci $\hat{2} = \hat{0}$, adică $p = 2$, în contradicție cu ipoteza $p > 2$ făcută asupra lui p.

Fie $\hat{a} \in \mathbf{Z}_p^{*2}$; atunci există $x \in \mathbf{Z}$ cu $\hat{a} = \hat{x}^2$. Cum $\hat{x} \neq \hat{0}$, rezultă că

$$\hat{a}^{\frac{p-1}{2}} = (\hat{x}^2)^{\frac{p-1}{2}} = \hat{x}^{p-1} = \hat{1},$$

deci $\mathbf{Z}_p^{*2} \subseteq \{z \in \mathbf{Z}_p \mid z \text{ rădăcină a polinomului } X^{\frac{p-1}{2}} - \hat{1} \in \mathbf{Z}_p[X]\}$,

de unde $\frac{p-1}{2} = |\mathbf{Z}_p^{*2}| \leqslant |\{z \in \mathbf{Z}_p \mid z \text{ rădăcină a polinomului } X^{\frac{p-1}{2}} - \hat{1} \in \mathbf{Z}_p[X]\}| \leqslant \frac{p-1}{2}$.

Așa:

$$\mathbf{Z}_p^{*2} = \{z \in \mathbf{Z}_p \mid z \text{ rădăcină a polinomului } X^{\frac{p-1}{2}} - \hat{1} \in \mathbf{Z}_p[X]\},$$

cu alte cuvinte avem

$$\left(\frac{a}{p}\right) = 1 \Leftrightarrow \hat{a} \in \mathbf{Z}_p^{*2} \Leftrightarrow \hat{a}^{\frac{p-1}{2}} = \hat{1} \Leftrightarrow a^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1 \pmod p,$$

$$\left(\frac{a}{p}\right) = -1 \Leftrightarrow a \notin \mathbf{Z}_p^{*2} \Leftrightarrow \hat{a}^{\frac{p-1}{2}} \neq \hat{1}.$$

Dar am văzut mai sus că pentru orice $a \in \mathbf{Z}$ cu $a \not\equiv 0 \pmod p$ avem fie $\hat{a}^{\frac{p-1}{2}} = \hat{1}$ fie $\hat{a}^{\frac{p-1}{2}} = -\hat{1}$ și $\hat{1} \neq -\hat{1}$. Deci

$$\left(\frac{a}{p}\right) = -1 \Leftrightarrow \hat{a}^{\frac{p-1}{2}} = -\hat{1} \Leftrightarrow a^{\frac{p-1}{2}} \equiv -1 \pmod p.$$

În concluzie

$$\left(\frac{a}{p}\right) \equiv a^{\frac{p-1}{2}} \pmod p.$$

(4) rezultă din (3), căci $\left(\frac{-1}{p}\right) \equiv (-1)^{\frac{p-1}{2}} \pmod p$.

Cum $\left(\frac{-1}{p}\right)$ și $(-1)^{\frac{p-1}{2}}$ sînt fie 1 fie -1 și $1 \not\equiv -1 \pmod p$ deducem că $\left(\frac{-1}{p}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2}}$.

(5). Avem conform punctului (3):

$$\left(\frac{ab}{p}\right) \equiv (ab)^{\frac{p-1}{2}} = a^{\frac{p-1}{2}} \cdot b^{\frac{p-1}{2}} \equiv \left(\frac{a}{p}\right) \cdot \left(\frac{b}{p}\right) \pmod p.$$

Scanned with OKEN Scanner

Cum $\left(\frac{ab}{p}\right) \cdot \left(\frac{a}{p}\right) \cdot \left(\frac{b}{p}\right) \in \{1, -1\}$ și $1 \not\equiv -1 \pmod p$

deducem că în ambele părți ale congruenței

$$\left(\frac{ab}{p}\right) \equiv \left(\frac{a}{p}\right) \cdot \left(\frac{b}{p}\right) \pmod p$$

nu putem avea decît simultan 1 sau -1, adică

$$\left(\frac{ab}{p}\right) = \left(\frac{a}{p}\right) \cdot \left(\frac{b}{p}\right).$$

4.6. Corolar. *Fie $p > 0$ un număr prim și $a \in \mathbf{Z}$. Au loc următoarele afirmații:*

(1) *Dacă $p = 2$, atunci polinomul $X^2 - \hat{a} \in \mathbf{Z}_2[X]$ este întotdeauna reductibil în $\mathbf{Z}_2[X]$.*

(2) *Dacă $p > 2$, atunci polinomul $X^2 - \hat{a} \in \mathbf{Z}_p[X]$ este reductibil în $\mathbf{Z}_p[X] \Leftrightarrow a \equiv 0 \pmod p$ sau $a^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1 \pmod p$.*

(3) *Dacă $p > 2$, atunci polinomul $X^2 - \hat{a} \in \mathbf{Z}_p[X]$ este ireductibil în $\mathbf{Z}_p[X] \Leftrightarrow a^{\frac{p-1}{2}} \equiv -1 \pmod p$.*

Demonstrație. (1) Avem:

$$X^2 - \hat{a} = X^2 - \hat{a}^2 = (X - \hat{a})(X + \hat{a}).$$

(2) $X^2 - \hat{a}$ este reductibil în $\mathbf{Z}_p[X] \Leftrightarrow X^2 - \hat{a}$ are o rădăcină în $\mathbf{Z}_p[X] \Leftrightarrow \hat{a} = \hat{0}$ sau ($\hat{a} \neq \hat{0}$ și $\hat{x}^2 = \hat{a}$ pentru un anumit $\hat{x} \in \mathbf{Z}_p$) $\Leftrightarrow a \equiv 0 \pmod p$ sau $\left(\frac{a}{p}\right) = 1 \Leftrightarrow a \equiv 0 \pmod p$ sau $a^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1 \pmod p$.

(3) rezultă prin negarea lui (2).

În încheierea acestui paragraf menționăm următoarele două rezultate importante legate de simbolul lui *Legendre*, rezultate care împreună cu formulele din 4.5 permit calculul simbolului lui *Legendre* prin reduceri succesive:

(1) (*Legea reciprocității pătratice a lui Legendre-Gauss*): Dacă p și q sînt două numere naturale prime impare distincte, atunci

$$\left(\frac{p}{q}\right) \cdot \left(\frac{q}{p}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2} \cdot \frac{q-1}{2}}.$$

(2)
$$\left(\frac{2}{p}\right) = (-1)^{\frac{p^2-1}{8}}.$$

Pentru demonstrație se poate consulta, de exemplu, [1].

§. 5. STRUCTURA EXHAUSTIVĂ (PREZENTATĂ ELEMENTAR) A INELELOR CU p^2 ELEMENTE

Scopul paragrafului de față este de a prezenta structura completă a inelelor cu p^2 elemente, p număr prim, folosind rezultatele stabilite în paragrafele precedente. În particular, vom descrie corpurile cu p^2 elemente și vom deduce proprietățile de bază ale acestora.

În cele ce urmează, prin A vom desemna un inel finit cu $|A| = p^2$, p număr prim.

Cum $\mathrm{Char}(A) \mid p^2$ și $\mathrm{Char}(A) > 1$ (vezi 4.2.(1)) deducem că avem fie $\mathrm{Char}(A) = p^2$, fie $\mathrm{Char}(A) = p$.

Dacă $\mathrm{Char}(A) = p^2$, atunci subinelul prim $P(A)$ al lui A are p^2 elemente, deci coincide cu A și $P(A) \simeq \mathbf{Z}_{p^2}$ conform lui 4.1.(2), de unde rezultă că $A \simeq \mathbf{Z}_{p^2}$.

Rămîne așadar de investigat cazul în care $\mathrm{Char}(A) = p$. Atunci $P(A)$ este izomorf cu corpul $\mathbf{Z}_p$, deci este un corp, pe care-l vom nota în continuare prescurtat prin P.

Compunînd izomorfismul canonic (vezi 4.1.(2))

$$\mathbf{Z}_p \xrightarrow{\sim} P$$

dat de $\hat{k} \mapsto k \cdot e$, unde e este elementul unitate al inelului A, cu incluziunea canonică $P \hookrightarrow A$ obținem un morfism unitar injectiv de inele:

$$\mathbf{Z}_p \to A, \quad \hat{k} \mapsto k \cdot e$$

Scanned with OKEN Scanner

și este clar că via acest morfism, A devine o $\mathbf{Z}_p$-algebră. Cum $P \subseteq A$ și $P \neq A$, există măcar un element $u \in A \setminus P$. Considerăm submulțimea

$$B = \{\alpha \cdot u + \beta \cdot e \mid \alpha, \beta \in \mathbf{Z}_p\}$$

a lui A. Reamintim că dacă $\hat{k} \in \mathbf{Z}_p$ și $a \in A$, atunci prin $\hat{k} \cdot a$ desemnăm elementul $(k \cdot e) \cdot a = ka$ al lui A, conform convenției (făcute în §. 2) privind înmulțirea elementelor dintr-o algebră.

Ca și în demonstrația 4.4, scrierea unui element $x \in B$ sub forma $x = \alpha \cdot u + \beta \cdot e$ cu $\alpha, \beta \in \mathbf{Z}_p$ este unică. Într-adevăr, dacă $x = \alpha' \cdot u + \beta' \cdot e$ cu $\alpha', \beta' \in \mathbf{Z}_p$, atunci

$$(\alpha - \alpha') \cdot u + (\beta - \beta') \cdot e = 0.$$

Dacă am avea $\alpha - \alpha' \neq 0$, atunci ținînd cont că $\mathbf{Z}_p$ este un corp, ar rezulta că

$$u = (-(\alpha - \alpha')^{-1} \cdot (\beta - \beta')) \cdot e \in P,$$

absurd. Deducem că $\alpha - \alpha' = 0$, adică $\alpha = \alpha'$ și atunci $(\beta - \beta')e = 0$, adică $\beta = \beta'$.
Așadar, funcția

$$\varphi : \mathbf{Z}_p \times \mathbf{Z}_p \to B, \quad \varphi(\alpha, \beta) = \alpha \cdot u + \beta \cdot e$$

este bijectivă, deci $|B| = |\mathbf{Z}_p \times \mathbf{Z}_p| = |\mathbf{Z}_p|^2 = p^2$.
Cum $B \subseteq A$ și $|A| = p^2$ rezultă că $B = A$, adică

$$A = \{\alpha \cdot u + \beta \cdot e \mid \alpha, \beta \in \mathbf{Z}_p\}.$$

Să notăm că elementul u a fost ales arbitrar în $A \setminus P$.
Dar $u \cdot u = u^2 \in A$, deci există $\alpha, \beta \in \mathbf{Z}_p$, astfel încît

$$u^2 = \alpha \cdot u + \beta \cdot e$$

cu alte cuvinte, u este rădăcină a polinomului

$$f = X^2 - \alpha X - \beta \in \mathbf{Z}_p[X].$$

Este clar că $f = \operatorname{Min}(u, \mathbf{Z}_p)$, căci dacă f nu ar fi polinomul minimal peste $\mathbf{Z}_p$ al lui u, atunci u ar fi rădăcina unui polinom unitar $X - \hat{k} \in F_p[X]$, de gradul 1, adică am avea $u = \hat{k} \cdot e = k \cdot e \in P$, imposibil.
Așadar, avem $A = \mathbf{Z}_p[u]$ și deci $A \simeq (\mathbf{Z}_p)_f$, conform lui 2.2.(2).
Rezultă, în particular, că orice inel cu p^2 elemente este comutativ, căci $(\mathbf{Z}_p)_f$ este inel comutativ.
În baza lui 3.5.(3), avem $\mathbf{Z}_p[u] \simeq \mathbf{Z}_p[U_f]$ unde $U_f = \begin{pmatrix} 0 & \beta \\ 1 & \alpha \end{pmatrix} \in M_2(\mathbf{Z}_p)$.

Aplicînd 3.6, deducem următoarele :

$A \simeq \mathbf{Z}_p \times \mathbf{Z}_p \Leftrightarrow f = X^2 - \alpha X - \beta$ are două rădăcini distincte în $\mathbf{Z}_p$.

$A \simeq T \Leftrightarrow f = X^2 - \alpha X - \beta$ are o rădăcină dublă în $\mathbf{Z}_p$, unde T este următorul inel de matrici

$$T = \left\{ \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ \mu & \lambda \end{pmatrix} \middle| \lambda, \mu \in \mathbf{Z}_p \right\}.$$

A rămas de studiat cazul în care

$$f = X^2 - \alpha X - \beta \in \mathbf{Z}_p[X]$$

este un polinom ireductibil, ceea ce este echivalent cu faptul că A este un corp (vezi 2.2.(3)).
Aici distingem două cazuri :

Cazul 1. $p = 2$. Se observă că singurul polinom ireductibil de grad 2 din $\mathbf{Z}_2[X]$ este polinomul $f = X^2 + X + 1$. Atunci $U_f = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, deci

$$\mathbf{Z}_2[U_f] = \{\lambda E + \mu U_f \mid \lambda, \mu \in \mathbf{Z}_2\} = \left\{ \begin{pmatrix} \lambda & \mu \\ \mu & \lambda + \mu \end{pmatrix} \middle| \lambda, \mu \in \mathbf{Z}_2 \right\} =$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} \hat{0} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{0} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \hat{1} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \hat{0} & \hat{1} \\ \hat{1} & \hat{1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \hat{1} & \hat{1} \\ \hat{1} & \hat{0} \end{pmatrix} \right\}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Conform celor de mai sus, orice corp cu 4 elemente este izomorf cu acest corp $\mathbf{Z}_2[U_f]$.

Cazul 2. $p > 2$. Dacă $p > 2$, atunci $\hat{2} \neq \hat{0}$, deci putem scrie $\alpha = \hat{2} \cdot (\hat{2}^{-1} \cdot \alpha) = \hat{2} \cdot \gamma$, unde $\hat{2}^{-1}$ este inversul lui $\hat{2}$ în corpul $\mathbf{Z}_p$ și $\gamma = \hat{2}^{-1} \cdot \alpha$. Avem

$$f = X^2 - \alpha X - \beta = X^2 - \hat{2}\gamma X + \gamma^2 - \gamma^2 - \beta = (X - \gamma)^2 - (\gamma^2 + \beta).$$

Considerăm polinomul

$$g = X^2 - \delta \in \mathbf{Z}_p[X],$$

unde $\delta = \gamma^2 + \beta$. Acest polinom este ireductibil, căci f este ireductibil. Avem:

$$g(u - \gamma \cdot e) = (u - \gamma \cdot e)^2 - (\gamma^2 + \beta)e = f(u) = 0.$$

Se observă că $u - \gamma \cdot e \in A \setminus P$ (altfel, ar rezulta că $u \in P$), deci înlocuind elementul u cu elementul $v = u - \gamma \cdot e \in A \setminus P$, obținem $A = \mathbf{Z}_p[v]$.
Cum $g(v) = 0$ și $v \in A \setminus P$, deducem că

$$\operatorname{Min}(v, \mathbf{Z}_p) = g = X^2 - \delta.$$

În concluzie, dacă $p > 2$ și A este un corp cu p^2 elemente, atunci

$$A \simeq \mathbf{Z}_p[U_g],$$

unde $g = X^2 - \delta \in \mathbf{Z}_p[X]$ este un polinom ireductibil. Dar $U_g = \begin{pmatrix} 0 & \delta \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, deci

$$\mathbf{Z}_p[U_g] = \{\lambda E + \mu \cdot U_g \mid \lambda, \mu \in \mathbf{Z}_p\} = \left\{ \begin{pmatrix} \lambda & \mu\delta \\ \mu & \lambda \end{pmatrix} \middle| \ \lambda, \mu \in \mathbf{Z}_p \right\}.$$

În continuare vom arăta că pentru orice $\delta_1, \delta_2 \in \mathbf{Z}_p$ astfel încît polinoamele $g_1 = X^2 - \delta_1$ și $g_2 = X^2 - \delta_2$ sînt ireductibile în $\mathbf{Z}_p[X]$, corpurile $\mathbf{Z}_p[U_{g_1}]$ și $\mathbf{Z}_p[U_{g_2}]$ sînt izomorfe.

Avem $\delta_1 = \hat{d}_1$ și $\delta_2 = \hat{d}_2$ cu $d_1, d_2 \in \mathbf{Z}$. Conform lui 4.6.(3) avem:

$$d_1^{\frac{p-1}{2}} \equiv -1 \pmod{p} \text{ și } d_2^{\frac{p-1}{2}} \equiv -1 \pmod{p}.$$

Cum $(d_2, p) = 1$, există $d_2' \in \mathbf{Z}$ cu $d_2 \cdot d_2' \equiv 1 \pmod{p}$, deci folosind 4.5, obținem

$$1 = \left(\frac{1}{p}\right) = \left(\frac{d_2 d_2'}{p}\right) = \left(\frac{d_2}{p}\right) \cdot \left(\frac{d_2'}{p}\right).$$

Dar $\left(\frac{d_2}{p}\right) = -1$ deci $\left(\frac{d_2'}{p}\right) = -1$; cum $\left(\frac{d_1}{p}\right) = -1$, deducem

$$\left(\frac{d_1 d_2'}{p}\right) = \left(\frac{d_1}{p}\right) \cdot \left(\frac{d_2'}{p}\right) = 1,$$

adică $d_1 d_2'$ este rest pătratic modulo p. Există atunci $r \in \mathbf{Z}$ cu $d_1 d_2' \equiv r^2 \pmod{p}$, de unde prin înmulțirea cu d_2 a congruenței de mai sus obținem

$$d_1 \equiv d_2 r^2 \pmod{p}.$$

Pentru prescurtare, vom nota:

$$K_1 = \mathbf{Z}_p[U_{g_1}] = \left\{ \begin{pmatrix} a & d_1 b \\ b & a \end{pmatrix} \middle| \ a, b \in \mathbf{Z}_p \right\}$$

$$K_2 = \mathbf{Z}_p[U_{g_2}] = \left\{ \begin{pmatrix} a & d_2 b \\ b & a \end{pmatrix} \middle| \ a, b \in \mathbf{Z}_p \right\}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Considerăm funcția $\varphi : K_1 \to K_2$ definită astfel:

$$\varphi\begin{pmatrix} a & d_1 b \\ b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & d_2 rb \\ rb & a \end{pmatrix}.$$

Funcția φ este injectivă căci $\varphi\begin{pmatrix} a & d_1 b \\ b & a \end{pmatrix} = \varphi\begin{pmatrix} a' & d_1 b' \\ b' & a' \end{pmatrix}$ implică $a = a'$ și $rb = rb'$. Dar $r \not\equiv$

$\not\equiv 0 \pmod p$ deci $\hat{r} \neq \hat{0}$, de unde rezultă $b = b'$. Cum $|K_1| = |K_2| = p^2$, deducem că este bijectivă.

Probăm în continuare că φ este un morfism de inele. Avem:

$$\varphi\left(\begin{pmatrix} a & d_1 b \\ b & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a' & d_1 b' \\ b' & a' \end{pmatrix}\right) = \varphi\begin{pmatrix} a+a' & d_1(b+b') \\ b+b' & a+a' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+a' & d_2 r(b+b') \\ r(b+b') & a+a' \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} a & d_2 rb \\ rb & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a' & d_2 rb' \\ rb' & a' \end{pmatrix} = \varphi\begin{pmatrix} a & d_1 b \\ b & a \end{pmatrix} + \varphi\begin{pmatrix} a' & d_1 b' \\ b' & a' \end{pmatrix};$$

$$\varphi\left(\begin{pmatrix} a & d_1 b \\ b & a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a' & d_1 b' \\ b' & a' \end{pmatrix}\right) = \varphi\begin{pmatrix} aa' + d_1 bb' & d_1(ab' + a'b) \\ ab' + a'b & aa' + d_1 bb' \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} aa' + d_1 bb' & d_2 r(ab' + a'b) \\ r(ab' + a'b) & aa' + d_1 bb' \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} aa' + d_2 r^2 bb' & d_2 r(ab' + a'b) \\ r(ab' + a'b) & aa' + d_2 r^2 bb' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & d_2 rb \\ rb & a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a' & d_2 rb' \\ rb' & a' \end{pmatrix} = \varphi\begin{pmatrix} a & d_1 b \\ b & a \end{pmatrix} \cdot \varphi\begin{pmatrix} a' & d_1 b' \\ b' & a' \end{pmatrix}.$$

Am ținut cont de faptul că $d_1 \equiv d_2 r^2 \pmod p$, de unde $d_1 c = d_2 r^2 c$, pentru orice $c \in Z_p$.

Să notăm că pentru orice număr prim $p > 0$ există măcar un polinom $f \in Z_p[X]$ ireductibil de gradul doi: dacă $p = 2$, atunci $f = X^2 + X + \hat{1}$, iar dacă $p > 2$, atunci există măcar un $d \in Z$ cu $\left(\frac{d}{p}\right) = -1$, adică $d^{\frac{p-1}{2}} \equiv -1 \pmod p$, întrucît am văzut în §.4 că $|Z_p^{*2}| = \frac{p-1}{2}$, deci $Z_p^* \setminus Z_p^{*2}$, are exact $\frac{p-1}{2} \geqslant 1$ elemente și, în consecință, polinomul $X^2 - \hat{d} \in Z_p[X]$ este ireductibil (vezi 4.6. (3)).

Așadar, pentru orice număr prim $p > 0$ există cel puțin un corp comutativ cu p^2 elemente și anume $Z_p[U_f]$, unde $f \in Z_p[X]$ este un polinom ireductibil de gradul doi. Mai mult, orice corp cu p^2 elemente este izomorf cu acesta, cu alte cuvinte, abstracție făcînd de un izomorfism (necanonic) există un singur corp cu p^2 elemente, pe care-l notăm în continuare cu F_{p^2}.

Bazîndu-ne pe cele demonstrate mai sus, avem următoarea:

Teoremă. *Un inel cu p^2 elemente, p număr prim > 0, este izomorf cu unul și numai unul din inelele următoare:*

$$Z_{p^2},\ Z_p \times Z_p,\ T,\ F_{p^2},$$

unde $T = \left\{\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ \mu & \lambda \end{pmatrix} \middle|\ \lambda, \mu \in F_p\right\}$. *În particular, orice inel cu p^2 elemente este comutativ.*

Bibliografie

[1] *T. Albu, I. D. Ion:* Capitole de teoria algebrică a numerelor, Editura Academiei R.S.R., București 1983.

[2] *M. Becheanu, A. Dincă, I. D. Ion* și alții: Algebră pentru perfecționarea profesorilor, Editura Didactică și pedagogică, București 1983.

[3] *N. Bourbaki:* Elements de Mathématiques, Algèbre, Chapitres 4 à 7, Masson, Paris-New York-Barcelone-Milan-Mexico-Rio de Janeiro, 1983

Scanned with OKEN Scanner

[4] *I. D. Ion*: O demonstrație elementară pentru o teoremă a lui Frobenius, Gazeta Matematică Nr. 11—12, p. 398—403.

[5] *D. Dincă*: Corpuri cu p^2 elemente, Gazeta Matematică, (Perfecționare metodică și metodologică în Matematică și Informatică) Nr.3—4/1985, p. 156—157.

CONCURSUL DE MATEMATICĂ, ETAPA LOCALĂ, CONSTANȚA, 1988

Clasa a IX-a

I. Fie $M = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - ax + b = 0\}$ și $N = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - bx + c = 0\}$, unde $a, b, c \in \mathbb{R}$. Să se determine a, b, c, știind că $M \cup N = \{1; a, b, c\}$.

Gheorghe Andrei, profesor, Constanța

II. Fie $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + 2x + 2$ și $g(x) = -x^2 + 2x$.

Să se arate că ecuația $(f \circ g)(x) = (g \circ f)(x)$ nu are nici o soluție.

Constantin Caragea, profesor, Constanța

III. Să se arate că oricare ar fi $x, y, z \in (0, \infty)$ are loc inegalitatea

$$\frac{x}{\sqrt{(x^2+y^2)(x^2+z^2)}} + \frac{y}{\sqrt{(y^2+x^2)(y^2+z^2)}} + \frac{z}{\sqrt{(z^2+x^2)(z^2+y^2)}} \leq \frac{1}{2} \cdot \frac{x^3+y^3+z^3}{xyz}.$$

Constantin Caragea

IV. Dacă AD este mediană în triunghiul ABC, atunci

a) $m(\hat{A}) = 90 \Leftrightarrow AD = \frac{BC}{2}$;

b) $m(\hat{A}) < 90 \Leftrightarrow AD > \frac{BC}{2}$;

c) $m(\hat{A}) > 90 \Leftrightarrow AD < \frac{BC}{2}$.

* * *

V. Fie $ABCD$ un patrulater convex cu $AB + CD = AD + BC$. Să se arate că $AC \perp BD$ dacă și numai dacă o diagonală trece prin mijlocul celeilalte.

Marius Cavachi, profesor, Constanța

Clasa a X-a

I. Să se deducă și să se verifice prin inducție dubla inegalitate:

$$\frac{2}{3}n\sqrt{n+1} < 1 + \sqrt{2} + \sqrt{3} + \ldots + \sqrt{n} < \frac{2}{3}(n+1)\sqrt{n}.$$

Ion Cucurezeanu, profesor, Constanța

Scanned with OKEN Scanner

II. Să se rezolve sistemul

$$\begin{cases} |\log_3 x + t \log_3 y| = 1 \\ (\log_3 x + t \log_3 y)^3 = \log_3^3 x + t \log_3^3 y, \text{ unde } t^2 = -1. \end{cases}$$

Gheorghe Andrei

III. a) Fie $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a < 0$. Să se determine $z \in \mathbb{C}$, astfel încît $az^2 + bz + c \leqslant 0$ și apoi să se reprezinte în planul complex.

b) Fie $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$, astfel încît $z_1 + z_2 + z_3 = 0$, $|z_1| = |z_2| = |z_3|$. Să se arate că:

$$z_1^{2^n} + z_2^{2^n} + z_3^{2^n} = 0, \ (\forall) n \in \mathbb{N}.$$

Care sînt valorile lui $n \in \mathbb{N}$, astfel încît $z_1^n + z_2^n + z_3^n = 0$?

Gheorghe Andrei

IV. Fie $ABCD$ un patrulater convex și O intersecția diagonalelor. Dacă $\sigma[DOC] = S_1$, $\sigma[AOB] = S_2$ și $\sigma[ABCD] = S$, atunci:

a) $\sqrt{S_1} + \sqrt{S_2} \leqslant \sqrt{S}$;

b) $\sqrt{S_1} + \sqrt{S_2} = \sqrt{S}$ dacă și numai dacă $ABCD$ este trapez sau paralelogram.

Gheorghe Andrei

V. Să se arate că în orice triunghi ascuțitunghic avem:

$$\frac{r}{R} \leqslant \sqrt{\frac{2a^2b^2c^2}{(a^2+b^2)(b^2+c^2)(c^2+a^2)}}.$$

Tudorel Lupu și *Dumitru Anton*, profesori, Constanța

Clasa a XI-a

I. Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} (\sqrt{n^2+n} - \sqrt{n^2-n})^{\sin n}$.

Ion Cucurezeanu, profesor, Constanța

II. Fie $x_1 = x_2 = 1$ și $x_{n+1} = \sqrt{nx_n + x_{n-1}}$. Să se arate că $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n}{n} = 1$.

Constantin Caragea

III. Fie matricea $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Să se determine matricea $X \in M_2(\mathbb{C})$, astfel încît $XA = AX$.

b) Să se rezolve în $M_2(\mathbb{C})$ ecuația $Z^n = A$.

Constantin Caragea

IV. Fie $A \in M_2(\mathbb{C})$, $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ unde $\det A$ și $\mathrm{Tr}A$ reprezintă determinantul și respectiv urma matricii A ($\mathrm{Tr}A = a + d$). Dacă $\mathrm{Tr}A \cdot \det A = 0$ și $\mathrm{Tr}A + \det A \neq 0$, atunci matricea $B \in M_2(\mathbb{C})$ comută cu A dacă și numai dacă comută cu A^3.

Gheorghe Andrei

Scanned with OKEN Scanner

V. Să se arate că:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_2 & x_3 & x_4 & \dots & x_1 \\ x_3 & x_4 & x_5 & \dots & x_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_n & x_1 & x_2 & \dots & x_{n-1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & \dots & x_n \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_3 & x_4 & x_5 & \dots & x_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_n & x_1 & x_2 & \dots & x_{n-1} \end{vmatrix}.$$

Gheorghe Bordea, profesor, Constanța

Clasa a XII-a

II. a) Să se calculeze $\int \left(1 + x - \frac{1}{x}\right) e^{x+\frac{1}{x}} dx$.

b) Să se determine funcția $F : (0, \infty) \to \mathbf{R}$, derivabilă și care satisface relația

$$F'(\ln x) = x\left(1 - \frac{2}{\ln x}\right)^2, (\forall) x \in (1, \infty).$$

Constantin Caragea

II. Fie $f, g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ și $F, G : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ primitive ale funcțiilor f și respectiv g. Să se arate că dacă $(F(x) - G(x))(f(x) - g(x)) > x$, $(\forall) x \in \mathbf{R}$, atunci $F(x) - G(x)$ este nemărginită.

Tuaorel Lupu

III. Fie $(G, \cdot)$ un grup cu elementul neutru e, pentru care există $n \in \mathbf{N}$, $n > 3$, astfel încît să fie satisfăcute condițiile:

1) $x^n y^n = y^n x^n$, $(\forall) x, y \in G$;

2) $z^{n-1} = e$ sau $z^{n-1} = e$, $(\forall) z \in G$. Să se arate că $(G, \cdot)$ este abelian.

Gheorghe Andrei

IV. Fie $(G, \cdot)$ un grup, cu elementul neutru e, pentru care există $m, n \in \mathbf{N}^*$ de aceeași paritate și $a \in G \setminus \{e\}$, astfel încît $x = a^m x^{-1} a^n$.

1) Să se arate că $(G, \cdot)$ este abelian;

2) Să se determine ordinul lui a.

Gheorghe Andrei

V. Fie $n \in \mathbf{N}$, $n \geq 3$ și D_n grupul diedral de grad n.

$D_n = \{e, a, a^2, \dots, a^{n-1}, b, ab, a^2b, \dots, a^{n-1}b\}$ și $ba^k = a^{n-k}b$, $(\forall)\ 0 \leq k \leq n$.

Să se arate că automorfismele lui D_n formează un grup și apoi să se determine ordinul său.

Viviana Enc, profesoară, Constanța

PROBLEME REZOLVATE PENTRU GIMNAZIU

Clasa a V-a

Problema E : 9277 * (G. M. 11—12/1987, pag. 457)

Să se determine numerele naturale de forma $\overline{abcd}$ știind că sînt verificate simultan egalitățile: $a + b + c = 18$; $a + b + d = 17$; $b + c + d = 24$.

Edmond Sabin, elev, Suceava

Soluție. Scăzînd egalitățile (1) și (3) din enunț rezultă $a = d - 6$. Ținînd cont de relația (2) avem $b = 23 - 2d$. Folosind din nou relația

Scanned with OKEN Scanner

(1) rezultă $c = d + 1$. Deoarece a și c sînt cifre și $a \neq 0$ rezultă că $d > 6$ și $d + 1 \leq 9$. Deoarece și d este cifră rezultă valorile $d_1 = 7$, $d_2 = 8$. Ținînd seama de egalitățile $a = d - 6$, $b = 23 - 2d$, $c = d + 1$ avem că $a_1 = 1$, $a_2 = 2$; $b_1 = 9$, $b_2 = 7$; $c_1 = 8$, $c_2 = 9$. Numerele cerute sînt: 1987 și 2798.

Soluție bună au dat: *Mihai Georgiana* cl. a V-a, Șc. gen. 5 Craiova; *Pascu Tudor*, cl. a IV-a, Șc. gen. 11 București.

Problema E : 9283* (G. M. 11—12/1987, pag. 457)

Să se arate că pentru orice număr natural n, fracția $\dfrac{3n+7}{4n+9}$ *este ireductibilă.*

Dumitru Mirică, profesor, Rîmnicu Sărat

Soluție. Presupunem prin metoda reducerii la absurd că $d \in \mathbf{N}$, $d \geq 2$ este numărul prin care fracția se simplifică. Deci d divide $(3n + 7)$ și d divide $(4n + 9)$. Rezultă că d divide $4(3n + 7)$ și d divide $3(4n + 9)$ de unde rezultă că d divide $4(3n + 7) - 3(4n + 9)$ adică d divide 1. Însă d divide 1 este rezultat absurd deoarece $d \in \mathbf{N}$, $d \geq 2$. Presupunerea făcută este absurdă, deci fracția nu se poate simplifica, adică este ireductibilă.

Comentariul redacției. Putem formula în general următorul rezultat: „Orice fracție de forma $\dfrac{an+b}{cn+d}$ unde a, b, c, d sînt numere naturale date, satisfăcînd condiția $ad - bc = \pm 1$, este ireductibilă pentru orice n număr natural". Demonstrația acestei afirmații se face la fel ca în cazul particular prezentat.

Soluție bună au dat: *Pop Iulia*, cl. a V-a, Lic. „C. Negruzzi" Iași; *Albu Andrei Tudor*, cl. a IV-a, Șc. gen. 11 București.

Clasa a VI-a

Problema E : 9257* (G. M. 10/1987, pag. 361)

Să se determine a, b, c astfel încît:

$$\overline{abc} + \overline{bca} + \overline{bac} = 900 \text{ unde } a < b < c.$$

Adrian Tudorașcu, elev, Făurei, Vîlcea

Soluție. Relația din enunț se scrie:

$$111a + 210b + 12c = 900, \quad (1), \text{ cu } 0 < a < b < c, \quad (2).$$

Din (1) rezultă $210b < 900$, adică $b \leq 4$; din (2) avem $b \geq 2$; deci $b \in \{2, 3, 4\}$.

Dacă $b = 2$, atunci ținînd seama de (2) avem $a = 1$ și relația (1) devine $12c = 369$ de unde $c > 9$ ceea ce e imposibil.

Dacă $b = 3$, ținînd seama de (2) avem $a = 1$ sau $a = 2$. Pentru $a = 1$ obținem din (1) că $12c = 159$ ceea ce e imposibil; pentru $a = 2$ obținem $12c = 48$ de unde $c = 4$. Deci avem o soluție $(a, b, c) = (2, 3, 4)$.

Dacă $b = 4$ din (1) obținem $111a + 12c = 60$ ceea ce e imposibil.

Deci singura soluție este $(a, b, c) = (2, 3, 4)$.

Soluție bună au dat: *Apostol Bogdan*, cl. a VI-a, Șc. gen. 7 București; *Lahi Anca*, cl. a VI-a, Lic. „Spiru Haret" Tulcea.

Scanned with OKEN Scanner

Problema E : 9259* (G. M. 10/1987, pag. 361)

Să se determine numărul prim $\overline{ab}$ știind că partea întreagă a numărului $\sqrt{\overline{ab}}$ este 6 și că suma cifrelor numărului este 5.

Ligia Chiroiu, studentă, București

Soluție. Deoarece partea întreagă a numărului $\sqrt{\overline{ab}}$ este 6 rezultă că $6 \leqslant \sqrt{\overline{ab}} < 7$, de unde $36 \leqslant \overline{ab} < 49$, (1). Deoarece $a + b = 5$ rezultă că $\overline{ab} \in \{14, 23, 32, 41, 50\}$, (2).

Singurul număr prim care îndeplinește condițiile (1) și (2) este numărul 41. Deci $\overline{ab} = 41$.

Soluție bună au dat : *Toma Mihai*, cl. a VI-a, Șc. gen. 12 București; *Păun Radu Adrian*, cl. a VI-a, Șc. gen. 168 București.

Clasa a VII-a

Problema E : 9264* (G. M. 10/1987, pag. 362)

Să se determine toate numerele de forma $\overline{abca}$, în baza 10, divizibil cu 9, știind că : $a^2 + ab = 2b^2$.

Alexandru Cebuc, profesor, Coteana, Olt

Soluție. Deoarece $\overline{abca}$ este divizibil cu 9 rezultă că $2a + b + c = 9p$, (1). Dar $a, b, c \leqslant 9$ de unde $2a + b + c \leqslant 36$, (2). Din (1) și (2) deducem că $2a + b + c \in \{9, 18, 27, 36\}$, (3).

Relația din enunț se scrie succesiv :

$a^2 + ab - b^2 - b^2 = 0 \Leftrightarrow (a - b)(a + b) + b(a - b) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (a - b)(a + 2b) = 0$, (4). Dar a și b fiind cifre cu $a \neq 0$ rezultă că $a + 2b > 0$, deci din (4) rezultă că $a - b = 0$, adică $a = b$, (5). Cu aceasta (3) devine $3a + c \in \{9, 18, 27, 36\}$.

Dacă $3a + c = 9$ atunci $(a, c) \in \{(1, 6); (2, 3); (3, 0)\}$ și ținînd seama de (5) avem $(a, b, c) \in \{(1, 1, 6); (2, 2, 3); (3, 3, 0)\}$.

Dacă $3a + c = 18$ atunci $(a, c) \in \{(3, 9); (4, 6); (5, 3); (6, 0)\}$ și $(a, b, c) \in \{(3, 3, 9); (4, 4, 6); (5, 5, 3); (6, 6, 0)\}$.

Dacă $3a + c = 27$ atunci $(a, c) \in \{(6, 9); (7, 6); (8, 3); (9, 0)\}$ și $(a, b, c) \in \{(6, 6, 9); (7, 7, 6); (8, 8, 3); (9, 9, 0)\}$.

Dacă $3a + c = 36$ atunci $(a, c) \in \{(9, 9)\}$ și $(a, b, c) \in \{(9, 9, 9)\}$.

Deci numerele $\overline{abca}$ care îndeplinesc condițiile din enunț sînt : 1161 ; 2232 ; 3303 ; 3393 ; 4464 ; 5535 ; 6606 ; 6696 ; 7767 ; 8838 ; 9909 ; 9999.

Soluție bună au dat : *Păun Andrei*, cl. a VII-a, Șc. gen. 164 București; *Poraicu Corina*, cl. a VII-a, Șc. gen. 18 Bacău.

Problema E : 9266* (G. M. 10/1987, pag. 362)

Două cercuri $\mathcal{C}$ și $\mathcal{C}'$ se intersectează în două puncte distincte A și B. Coardele MN în cercul $\mathcal{C}$, respectiv PQ în cercul $\mathcal{C}'$ sînt paralele cu AB. Să se demonstreze că punctele M, N, P, Q sînt vîrfurile unui trapez isoscel sau ale unui dreptunghi.

Ion Diaconu, profesor, Piatra Neamț

Soluție. Fie M, A, P de aceeași parte a liniei centrelor. Deoarece $MN \parallel AP$ și $PQ \parallel AB$ rezultă că $MN \parallel PQ$ deci patrulaterul $MNQP$ este paralelogram sau trapez după cum MN și PQ sînt sau nu congruente.

Scanned with OKEN Scanner

Din $MN \| AB$ rezultă că $MNBA$ este trapez sau paralelogram; dar $MNBA$ este înscris în cercul $\mathcal{C}$ deci $MNBA$ este trapez isoscel sau dreptunghi, de unde avem $\overset{\frown}{MAB} \equiv \overset{\frown}{NBA}$, (1) și $AM \equiv LN$ (2).

Din $PQ \| AB$ și $PQBA$ înscris în cercul $\mathcal{C}'$ rezultă că $PQBA$ este trapez isoscel sau dreptunghi, de unde $\overset{\frown}{PAB} \equiv \overset{\frown}{QBA}$, (3) și $AP \equiv BQ$, (4).

Distingem trei cazuri:

1) D că $MNBA$ și $PQBA$ sînt amîndouă trapeze isoscele. Atunci avem:

a) Dacă $MN \neq PQ$, atunci $MNQP$ este trapez. Din (1) și (3) rezultă că $\overset{\frown}{MAP} \equiv \overset{\frown}{NBQ}$, (5), iar din (2), (4) și (5) rezultă că $\Delta MAP \equiv \Delta NBQ$ (L.U.L.), de unde $MP \equiv NQ$. deci $MNQP$ este trapez isoscel.

b) Da că $MN \equiv PQ$, atunci $MNQP$ este paralelogram. Demonstrăm analog că triunghiurile MAP și NBQ sînt congruente, de unde $\overset{\frown}{AMP} \equiv \overset{\frown}{BNQ}$, (6). Din (1) și (6) rezultă $\overset{\frown}{PMN} \equiv \overset{\frown}{QNM}$. Deci paralelogramul $MNQP$ avînd unghiurile alăturate congruente este dreptunghi.

2) Dacă unul din patrulaterele $MNBA$ și $PQBA$ este trapez isoscel și celălalt dreptunghi. Atunci rezultă $MN \neq PQ$ și la fel ca la a) demonstrăm că $MP \equiv NQ$, deci $MNQP$ este trapez isoscel.

3) Dacă amîndouă patrulaterele $MNBA$ și $PQBA$ sînt dreptunghiuri, atunci $MN \equiv AB \equiv PQ$ deci $MNQP$ este paralelogram. De asemenea, $\overset{\frown}{MAB} \equiv \overset{\frown}{PAB} = 90°$, deci M, A, P coliniare și $MP \perp AB$, (7). Analog N, B, Q sînt coliniare și $NQ \perp AB$. (8). Din $MN \| AB \| PQ$ și din (7) și (8) rezultă că MP și NQ sînt perpendiculare pe MN și pe PQ. Deci $MNQP$ este dreptunghi.

Soluție bună au dat: *Tomescu Mihaela*, cl. a VII-a, Șc. gen. 27 București; *Ardelean Oana*, cl. a VII-a, Șc. gen. 28 Galați.

Problema E : 9268* (G. M. 10/1987. pag. 362)

Să se determine forma generală a numerelor naturale n astfel încît $(n^2 + n + 1) \vdots 3$.

Iqn Lupşor, profesor, Borșa, Maramureș

Soluție. $(n^2 + n + 1) \vdots 3 \Leftrightarrow n^2 + n + 1 = 3p$, $p \in \mathbf{N}$, (1). Avem următoarele cazuri:

1) Dacă $n = 3k$, $k \in \mathbf{N}$, din (1) avem $9k^2 + 3k + 1 = 3p$, de unde $1 = 3p - 9k^2 - 3k$, adică $1 = 3(p - 3k^2 - k)$, deci $1 \vdots 3$ ceea ce este imposibil.

2) Dacă $n = 3k + 1$, $k \in \mathbf{N}$, din (1) avem: $9k^2 + 6k + 1 + 3k + 1 + 1 = 3p \Rightarrow 3 = 3p - 9k^2 - 9k \Rightarrow 3 = 3(p - 3k^2 - 3k) \Rightarrow p - 3k^2 - 3k = 1 \Rightarrow 3k^2 - 3k = p - 1$, ceea ce este adevărat pentru orice $k \in \mathbf{N}$.

3) Dacă $n = 3k + 2$, $k \in \mathbf{N}$, din (1) avem: $9k^2 + 12k + 4 + 3k + 2 + 1 = 3p \Rightarrow 7 = 3(p - 3k^2 - 5k) \Rightarrow 7 \vdots 3$, ceea ce este imposibil.

Deci numerele naturale n care satisfac relația din enunț sînt de forma $n = 3k + 1$, $k \in \mathbf{N}$.

Soluție bună au dat: *Tudorică Adrian*, cl. a VII-a, Șc. gen. 70 București; *Mihăilă Lucia*, cl. a VII-a, Șc. gen. 7 Caracal.

Scanned with OKEN Scanner

Clasa a VIII-a

Problema E : 9274* (G. M. 10/1987, pag. 363)

Câte elemente are o mulțime de puncte din plan, cu proprietatea că oricare trei sînt necoliniare și dintre oricare patru, fiecare este ortocentrul triunghiului determinat de celelalte trei?

Alexandru Oțet, profesor, Brașov

Soluție. Fie A, B, C puncte din mulțimea dată și H ortocentrul triunghiului ABC. Cele patru puncte au proprietatea mulțimii din enunț. Fie H' un punct luat împreună cu punctele A, B, C. Conform ipotezei el trebuie să fie ortocentrul triunghiului ABC, deci $H' \equiv H$.

În concluzie mulțimea conține patru elemente.

Soluție bună au dat : *Răuță Florentina* și *Panaite Elena*, cl. a IX-a, Lic. ind. „Unirea" Focșani.

PROBLEME REZOLVATE PENTRU LICEU

Clasa a IX-a

Problema 21237* (G.M. 10/1987, pag. 364)

Fie triunghiul ABC având laturile a, b, c, I centrul cercului înscris, M și N două puncte situate pe (AB) respectiv (AC). Demonstrați că dreapta MN trece prin I dacă și numai dacă

$$b \cdot \frac{MB}{MA} + c \cdot \frac{NC}{NA} = a.$$

Călin Burdușel, profesor, Târgoviște

Soluție. Dacă AD este bisectoarea unghiului A, $D \in (BC)$, atunci $I \in AD$ este centrul cercului înscris dacă și numai dacă $\frac{ID}{IA} = \frac{a}{b+c}$, (verificare). Presupunem că MN trece prin I și că $MN \nparallel BC$. Aplicăm teorema lui *Menelaus* triunghiurilor ABD, ADC, AEC cu tansversalele IP și NP. Obținem

$$\frac{PD}{PB} \cdot \frac{MB}{MA} \cdot \frac{b+c}{a} = 1, \frac{PC}{PD} \cdot \frac{a}{b+c} \cdot \frac{NA}{NC} = 1, \frac{PC}{PB} \cdot \frac{MB}{MA} \cdot \frac{NA}{NC} = 1$$

de unde rezultă că

$$\frac{MB}{MA} = \frac{a}{b+c} \cdot \frac{PB}{PD}, (1); \frac{NC}{NA} = \frac{a}{b+c} \cdot \frac{PC}{PD}, (2); \frac{a+PB}{PB} \cdot \frac{MB}{MA} \cdot \frac{NA}{NC} = 1, (3).$$

Din relațiile (1) și (2) rezultă că

$$\frac{NC}{NA} - \frac{MB}{MA} = \frac{a^2}{(b+c) \cdot PD} = \frac{a^2}{(b+c)\left(PB + \frac{ac}{b+c}\right)} = \frac{a^2}{PB(b+c) + ac}, (4).$$

Din (3) rezultă că $PB = \dfrac{a}{\frac{MA}{MB} \cdot \frac{NC}{NA} - 1}$ care introdusă în relația (4) conduce la relația

$$\frac{NC}{NA} - \frac{MB}{MA} = \frac{a^2}{\frac{a(b+c)}{\frac{MA}{MB} \cdot \frac{NC}{NA} - 1} + ac} = \frac{a\left(\frac{MA}{MB} \cdot \frac{NC}{NA} - 1\right)}{b + c \cdot \frac{MA}{MB} \cdot \frac{NC}{NA}}, (5),$$

Scanned with OKEN Scanner

Notînd cu $x = \frac{MB}{MA}$ și $y = \frac{NC}{NA}$ din (5) rezultă că

$$y - x = \frac{a\left(\frac{y}{x} - 1\right)}{b + c \cdot \frac{y}{x}} \Leftrightarrow (y - x)(bx + cy) = a(y - x) \Leftrightarrow bx + cy = a,\ x \neq y \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow b \cdot \frac{MB}{MA} + c \cdot \frac{NC}{NA} = a, \quad \frac{MB}{MA} \neq \frac{NC}{NA}, \ (6).$$

Cazul particular $\frac{MB}{MA} = \frac{NC}{NA}$, (adică $MN \| BC$), rezultă imediat din egalitatea

$$\frac{MB}{MA} = \frac{ID}{IA} = \frac{a}{b + c}.$$

Reciproc, presupunem că are loc relația (6). Fie $\{I\} = MN \cap AD$. Aplicînd teorema lui *Menelaus* în triunghiurile BD și DC obținem:

$$\frac{PD}{PB} \cdot \frac{MB}{MA} \cdot \frac{IA}{ID} = 1 \text{ și } \frac{PC}{PD} \cdot \frac{ID}{IA} \cdot \frac{NA}{NC} = 1$$

de unde rezultă că

$$\frac{MB}{MA} = \frac{ID}{IA} \cdot \frac{PB}{PD} \text{ și } \frac{NC}{NA} = \frac{ID}{IA} \cdot \frac{PC}{PD}, \quad (7).$$

Din relațiile (7) și relația (6) rezultă că:

$$b \cdot \frac{ID}{IA} \cdot \frac{PB}{PD} + c \cdot \frac{ID}{IA} \cdot \frac{PC}{PD} = a \Leftrightarrow \frac{ID}{IA} = \frac{a \cdot PD}{b \cdot PB + c \cdot PC} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{ID}{IA} = \frac{a\left(PB + \frac{ac}{b + c}\right)}{b \cdot DB + c(a + PB)} \Leftrightarrow \frac{ID}{IA} = \frac{a[PB(b + c) + ac]}{(b + c)[PB(b + c) + ac]} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{ID}{IA} = \frac{a}{b + c} \Leftrightarrow I \text{ este centrul cercului înscris în triunghiul } ABC.$$

Soluție bună au dat: *Tobescu Corneliu*, cl. a IX-a, Lic. ind. „Unirea" Focșani; *Grindean Mihai*, cl. a IX-a, Lic. mat. fiz. Zalău; *Topan Liana*, cl. a IX-a, Lic. ind. „A. Mureșanu" Dej.

Problema 21151* (G. M. 7—8/1987, pag. 289)

Determinați numerele întregi m și n astfel încît

$$\frac{1}{m} + \frac{1}{n} - \frac{1}{mn} = \frac{2}{5}.$$

I. Safta, profesor, Pitești

Soluție. Observăm că $m \neq 0$ și $n \neq 0$, deci $m \in \mathbb{Z}^*$ și $n \in \mathbb{Z}^*$. Relația din enunț este echivalentă succesiv cu:

$$\frac{1}{m} + \frac{1}{n} - \frac{1}{mn} = \frac{2}{5} \Leftrightarrow 2mn = 5m + 5n - 5 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2mn - 5n = 5m - 5 \Leftrightarrow (2m - 5)n = 5m - 5.$$

Scanned with OKEN Scanner

Deoarece $2m-5 \neq 0$ pentru orice $m \in \mathbb{Z}$ (dacă $2m-5=0 \Rightarrow m=\frac{5}{2}$, ceea ce contrazice faptul că $m \in \mathbb{Z}$) obținem

$$n=\frac{5m-5}{2m-5}, \tag{1}$$

Din $n \in \mathbb{Z}$ avem $\frac{5m-5}{2m-5} \in \mathbb{Z}^*$ și cum $m \in \mathbb{Z}^*$ rezultă că $(2m-5)$ divide $(5m-5)$, (2). Dar 2 nu divide $(2m-5)$, prin urmare $(2m-5, 2)=1$. Ținînd seama de acest lucru, din (2) obținem succesiv:

$$(2m-5) \mid 2(5m-5) \Leftrightarrow (2m-5) \mid (10m-10) \Leftrightarrow (2m-5) \mid 5(2m-5)+15, \tag{3}$$

Cum $(2m-5)$ divide $5(2m-5)$, din (3) rezultă că $(2m-5)$ divide 15, deci $2m-5 \in \{\pm 15; \pm 5; \pm 3; \pm 1\}$ de unde $m \in \{-5; 0; 1; 2; 3; 4; 5; 10\}$. Dar $m \neq 0$, prin urmare $m \in \{-5; 1; 2; 3; 4; 5; 10\}$. Pentru aceste valori ale lui m aflăm valorile corespunzătoare ale lui n din (1). Observăm că pentru $m=1$ rezultă $n=0$, ceea ce nu convine. În final mulțimea soluțiilor (m, n) va fi:

$$\{(-5; 2), (2; -5), (3; 10), (4; 5), (5; 4), (10; 3)\}.$$

Soluție bună au dat: *Stoian Loredana*, clasa a IX-a, Lic. ind. 10 Constanța; *Matei Mircea*, cl. a IX-a, Lic. ind. 5 Cîmpina.

Clasa a X-a

Problema 21163* (G. M. 7–8/1987, pag. 290)

Să se demonstreze că:

$$\frac{2}{3}n\sqrt{n+1} < 1+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\ldots+\sqrt{n} < \frac{2}{3}(n+1)\sqrt{n}.$$

I. Cucurezeanu, Constanța

Soluție: Demonstrăm prin inducție matematică inegalitatea

$$1+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\ldots+\sqrt{n} > \frac{2}{3}n\sqrt{n+1}.$$

Avem: $P(1): \frac{2}{3}\sqrt{2} < 1 \Leftrightarrow 8<9$ care este evidentă.

Presupunem că propoziția

$$P(k): 1+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\ldots+\sqrt{k} > \frac{2}{3}k\sqrt{k+1}$$

este adevărată și să demonstrăm atunci că propoziția

$$P(k+1): 1+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\ldots+\sqrt{k}+\sqrt{k+1} > \frac{2}{3}(k+1)\sqrt{k+2}$$

este adevărată.

Din $P(k)$ deducem, adunînd în ambii membri termenul $\sqrt{k+1}$, că

$$1+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\ldots+\sqrt{k}+\sqrt{k+1} > \frac{2}{3}k\sqrt{k+1}+\sqrt{k+1}.$$

Va fi suficient să arătăm că:

$$\frac{2}{3}k\sqrt{k+1}+\sqrt{k+1} > \frac{2}{3}(k+1)\sqrt{k+2},$$

Scanned with OKEN Scanner

Scanned with OKEN Scanner

ceea ce se scrie succesiv:

$$\left(1+\frac{2}{3}k\right)\sqrt{k+1}>\frac{2}{3}(k+1)\sqrt{k+2}\Leftrightarrow(3+2k)^2>4(k+1)(k+2)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow[(k+1)+(k+2)]^2>4(k+1)(k+2),$$

care este adevărată, deoarece din inegalitatea mediilor avem

$$\frac{(k+1)+(k+2)}{2}>\sqrt{(k+1)(k+2)}\Leftrightarrow[(k+1)+(k+2)]^2>4(k+1)(k+2).$$

Pentru a doua parte a inegalității se folosește tot metoda inducției matematice și, urmărind același procedeu, se ajunge la $4(k+1)k<[(k+1)+k]^2$, care este echivalentă cu inegalitatea mediilor.

Soluție dată de *Lăduncă Lucian*, clasa a XI-a, Lic. Informatică Iași.

Problema 21164* (G.M. 7–8/1987, pag. 290)

Fie $a, b, c, d \geq 0$. *Să se arate că:*

$$\sqrt{a+b+c+d}+\sqrt{b+c+d}+\sqrt{c+d}+\sqrt{d}\geqslant\sqrt{a+4b+9c+16d}.$$

Mihaela Predescu, profesoară, Pitești

Soluție: Notăm $a+b+c+d=p^2$, (1); $b+c+d=r^2$, (2);

$$c+d=t^2,\ (3);\ d=v^2,\ (4),\ \text{unde } p, r, t, v\in\mathbf{R}_+.$$

Înmulțind respectiv relațiile (2) cu 3, (3) cu 5 și (4) cu 7 și adunînd membru cu membru se obține: $a+4b+9c+16d=p^2+3r^2+5t^2+7v^2$. Cu aceste notații inegalitatea din enunț devine:

$$(p+r+t+v)^2\geqslant p^2+3r^2+5t^2+7v^2.$$

Vom arăta că în general, dacă

$$x_1\geqslant x_2\geqslant\ldots\geqslant x_n\geqslant 0,\quad\text{atunci}\quad x_1^2+3x_2^2+5x_3^2+\ldots+(2n-1)x_n^2\leqslant$$

$$\leqslant(x_1+x_2+\ldots+x_n)^2.$$

Aplicînd, într-adevăr, inegalitatea lui *Cebîșev* obținem:

$$x_1^2+3x_2^2+5x_3^2+\ldots+(2n-1)x_n^2\leqslant\frac{1}{n}(1+3+5+\ldots+(2n-1))(x_1^2+x_2^2+$$

$$+\ldots+x_n^2)=\frac{2n\cdot\frac{n}{2}(x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2)}{n}=$$

$$=n(x_1^2+\ldots+x_n^2)\leqslant(x_1+x_2+\ldots+x_n)^2.$$

Deoarece $a, b, c, d \geqslant 0$ rezultă $p^2 \geqslant r^2 \geqslant t^2 \geqslant v^2$ și atunci

$$(p + r + t + v)^2 \geqslant p^2 + 3r^2 + 5t^2 + 7v^2,$$

ceea ce trebuia demonstrat. Egalitatea are loc în cazul banal $a = b = c = d = 0$.

Problema se poate generaliza evident sub forma:

$$\sqrt{x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n} + \sqrt{x_2 + x_3 + \ldots + x_n} + \ldots +$$

$$+ \sqrt{x_{n-1} + x_n} + \sqrt{x_n} \geqslant \sqrt{x_1 + 2^2 x_2 + 3^2 x_3 + \ldots + n^2 x_n},$$

cu egalitate pentru $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$.

Soluție dată de *Lăduncă Lucian*, clasa a XI-a, Lic. Informatică, Iași.

Problema 21280* (G.M. 11—12/1987, pag. 467)

Să se rezolve ecuația:

$$\log_2^2 x + \log_2 x + \log_2(x^2 + a) + a + \frac{3}{4} = 0, \text{ pentru } a \geqslant \frac{1}{4}.$$

Vasile Monacu, Suceava

Soluție. Pentru $a > \frac{1}{4}$ avem $x^2 + a > x$ deci $\log_2(x^2 + a) > \log_2 x$, de unde:

$$\log_2^2 x + \log_2 x + \log_2(x^2 + a) + a + \frac{3}{4} > \log_2^2 x + \log_2 x + \log_2 x + \frac{1}{4} + \frac{3}{4} =$$

$$= \log_2^2 x + 2\log_2 x + 1 = (\log_2 x + 1)^2 \geqslant 0,$$

deci nu avem soluții.

Pentru $a = \frac{1}{4}$ ecuația devine:

$$\log_2^2 x + \log_2 x + \log_2\left(x^2 + \frac{1}{4}\right) + 1 = 0.$$

Avem $x^2 + \frac{1}{4} \geqslant x$ deci $\log_2\left(x^2 + \frac{1}{4}\right) \geqslant \log_2 x$, de unde:

$$0 = \log_2^2 x + \log_2 x + \log_2\left(x^2 + \frac{1}{4}\right) + 1 \geqslant \log_2^2 x + 2\log_2 x + 1 = (\log_2 x + 1)^2.$$

Prin urmare $(\log_2 x + 1)^2 \leqslant 0$; dar $(\log_2 x + 1)^2 \geqslant 0$ fiind un pătrat perfect, deci rezultă $\log_2 x + 1 = 0$ cu soluția unică $x = \frac{1}{2}$.

Soluție bună au dat: *Socaciu Ioan*, cl. a X-a, Lic. mat. fiz. 2 Cluj Napoca; *Baro Gabriela*, cl. a X-a, Lic. „N. Bălcescu" București.

Scanned with OKEN Scanner

Clasa a XI-a

Problema 21247* (G.M. 10/1987, pag. 365)

Se consideră șirul $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ definit astfel: $a_1 = 2$, $a_n = \log_n(n+k)$, $(\forall)n \geq 2$, k fiind un număr real pozitiv fixat.

Să se demonstreze că șirul $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ este convergent și să se determine limita sa.

(În legătură cu problema 5118, R.M.T. 1/1983).

Ion Diaconu, profesor, Piatra-Neamț

Soluție. a) Vom demonstra că $a_{n+1} < a_n$, $(\forall)n \geq 2$.

$$a_n = \log_n(n+k) \Rightarrow n^{a_n} = n^{\log_n(n+k)} = n+k.$$

$$a_{n+1} = \log_{n+1}(n+k+1) \Rightarrow (n+1)^{a_{n+1}} = (n+1)^{\log_{n+1}(n+k+1)} = n+k+1.$$

$$\left.\begin{matrix} n \geq 2 \\ k > 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \log_n(n+k) > 1 \Rightarrow a_n > 1.$$

Pentru $(\forall)n \in \mathbb{N}$ și $k > 0$, $\frac{1}{n} > \frac{1}{n+k} \Rightarrow 1 + \frac{1}{n} > 1 + \frac{1}{n+k} \Rightarrow \frac{n+1}{n} > \frac{n+k+1}{n+k}$.

Cum însă $a_n > 1$ avem în continuare:

$$\left(\frac{n+1}{n}\right)^{a_n} > \frac{n+1}{n} > \frac{n+k+1}{n+k} \Rightarrow \left(\frac{n+1}{n}\right)^{a_n} > \frac{(n+1)^{a_n+1}}{n^{a_n}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (n+1)^{a_n} > (n+1)^{a_n+1} \Rightarrow a_{n+1} < a_n \text{ pentru } (\forall)\, n \in \mathbb{N}^*,$$

deci șirul $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ este descrescător. Fiind mărginit din termeni pozitivi el este convergent.

b) $$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \log_n(n+k) = \lim_{n\to\infty} \frac{\lg(n+k)}{\lg n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\lg n\frac{n+k}{n}}{\lg n} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\lg n + \lg\frac{n+k}{n}}{\lg n} = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{\lg\left(1+\frac{k}{n}\right)}{\lg n}\right) = 1.$$

Soluție bună au dat: *Albu Felix*, cl. a XII-a, Lic. ind. 2 Găești; *Safta Cosmin*, cl. a XI-a, Lic. mat. fiz. 1 București.

Clasa a XII-a

Problema 21313* (G.M. 11–12/1987, pag. 472)

În mulțimea $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ se consideră matricile:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -7 & 5 \\ -4 & -7 & 6 \\ -8 & -16 & 13 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 4 \\ 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}, \quad V = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -2 & -5 & 4 \end{pmatrix}.$$

Scanned with OKEN Scanner

1) *Să se arate că matricea B este inversabilă și că:*

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 3^{-1} \end{pmatrix}.$$

2) *Verificînd egalitățile $UV = VU = I_3$ și $A = UBV$, să se arate că matricea A este de asemenea inversabilă.*

3) *Să se stabilească expresia efectivă a lui A^n în funcție de n, pentru $n \in \mathbf{Z}$ arbitrar.*

4) *Să se arate că mulțimea $G = \{A^n \mid n \in \mathbf{Z}\}$ formează grup multiplicativ (față de operația uzuală de înmulțire a matricilor) și că acest grup este izomorf cu grupul aditiv $\mathbf{Z}$.*

M. Fildan, București

Soluție. 1) și 2): verificare prin calcul direct rezultînd că inversa lui A este $A^{-1} = VB^{-1}V$.

3) Rezultă (prin inducție după n) că $A^n = UB^nV$ pentru orice $n \in \mathbf{Z}$ (inducția se face separat pentru n pozitiv și pentru n negativ).

Dar $B^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix}$, $n \in \mathbf{Z}$ (verificare tot prin inducție) de unde rezultă că:

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -2 & -5 & 4 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 3 \cdot 2^n - 2 \cdot 3^n & 2 + 3 \cdot 2^n - 5 \cdot 3^n & -1 - 3 \cdot 2^n + 4 \cdot 3^n \\ 2 \cdot 2^n - 2 \cdot 3^n & 4 + 2 \cdot 2^n - 5 \cdot 3^n & -2 - 2 \cdot 2^n + 4 \cdot 3^n \\ 4 \cdot 2^n - 4 \cdot 3^n & 6 + 4 \cdot 2^n - 10 \cdot 3^n & -3 - 4 \cdot 2^n + 8 \cdot 3^n \end{pmatrix}$$

4) Se arată ușor că $(G, \cdot)$ este grup multiplicativ. Aplicația $n \xrightarrow{\varphi} A^n$ a lui $\mathbf{Z}$ în G este izomorfism deoarece:

1° φ este injectivă:

$$\varphi(n_1) = \varphi(n_2) \Rightarrow A^{n_1} = A^{n_2} \Rightarrow UB^{n_1}V = UB^{n_2}V \Rightarrow$$

$$\Rightarrow B^{n_1} = B^{n_2} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^{n_1} & 0 \\ 0 & 0 & 3^{n_1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^{n_2} & 0 \\ 0 & 0 & 3^{n_2} \end{pmatrix} \Rightarrow 2^{n_1} = 2^{n_2} \text{ și } 3^{n_1} = 3^{n_2} \Rightarrow n_1 = n_2.$$

2° φ este surjectivă și se verifică ușor.

3° Pentru orice $n_1, n_2 \in \mathbf{Z}$ avem:

$$\varphi(n_1 + n_2) = A^{n_1+n_2} = A^{n_1} \cdot A^{n_2} = \varphi(n_1) \cdot \varphi(n_2),$$

adică φ este omomorfism.
Cu aceasta soluția problemei se încheie.

Soluție bună a dat: *Bogdan Suceavă*, cl. a XII-a, Lic. ind. „I. L. Caragiale", București

Scanned with OKEN Scanner

PROBLEME PENTRU CICLUL PRIMAR

73. Să se înlocuiască literele cu cifre astfel încît să fie adevărată egalitatea:

$$PAR \times PAR = AHAHA.$$

(Kvant nr. 4/1988)

74. Să se determine un număr natural știind că suma dintre număr și $\frac{3}{5}$ din el este 80.

* * *

75. Scrieți numărul 100 folosind 9 cifre de 2 și operațiile obișnuite cu numere.

(Revista Alpha, R.D.G.)

76. Găsiți un număr natural x știind că dacă la dublul său adunăm jumătatea sa, sfertul său și 1 obținem 100.

* * *

77. Numărul 1331 împărțit la 17 dă un cît și un rest. Determinați citul și restul.

* * *

78. Găsiți numerele naturale x, y pentru care $x \cdot y < 13$.

* * *

79. Determinați ultimele două cifre ale numărului:

$$a = 19453 \times 86372 + 85446 \times 17344.$$

* * *

80. Numerele 100 și 85 au fost împărțite pe rînd la un număr natural n obținîndu-se respectiv resturile 5 și 9. Determinați numărul n.

* * *

(Rubrică realizată de *Liviu Pîrșan*)

PROBLEME PENTRU GIMNAZIU

Clasa a V-a

E: 9539. Să se determine cifrele a, b, c astfel încît numărul $\overline{ab19870}$ să fie multiplu de 264.

Cristian Grecu, profesor, Șendreni, Galați

E: 9540* Un număr natural împărțit la 5 dă restul 2; același număr împărțit la 6 dă restul 1. Să se afle restul împărțirii acestui număr la 30.

Mihai Gârtan, profesor, Iași

Scanned with OKEN Scanner

E: 9541. Să se determine elementele mulțimii:

$$A = \left\{ n \in \mathbf{N} \,\middle|\, \frac{29}{21} < \frac{2n+25}{2n+1} < \frac{33}{17} \right\}.$$

Mihai Gârtan, profesor, Iași

E: 9542. Arătați că numerele de forma:

$$2^{n+4} \cdot 5^{n+1} \cdot 7^2 - 3920,$$

sînt divizibile cu 72, oricare ar fi $n \in \mathbf{N}$.

Ion Predescu, profesor, Mateești, Vîlcea

E: 9543*. Să se arate că dacă n este număr natural, atunci fracția $\frac{3n+119}{2n+79}$ este ireductibilă.

Vasilica Drăgan, profesoară, Galați

E: 9544*. Reconstituiți adunarea:

$$\begin{array}{r} ANA + \\ AN \\ A \\ \hline 8A2 \end{array}$$

Bogdan Stroe, elev, Băilești

Clasa a VI-a

E: 9545. Să se arate că fracția $\frac{2x+3}{x^2+3x+2}$ este ireductibilă oricare ar fi $x \in \mathbf{N}$.

Vasile Albu, profesor, Dej

E: 9546*. Să se arate că nu există nici o pereche de numere naturale (m, n) astfel încît numărul $2^{m+2} \cdot n + 6^{n+2} \cdot m + 6$ să fie pătrat perfect.

Ștefan Smarandache, profesor, București

E: 9547. Se consideră expresiile:

$E_1 = (-1)^2 \cdot 2 + (-1)^3 \cdot 3 + (-1)^4 \cdot 4 + (-1)^5 \cdot 5 + \ldots + (-1)^{1985} \cdot 1985$;

$E_2 = 4 \cdot (-1)^{2k} - 8 \cdot (-1)^{k+1} + 12 \cdot (-1)^p$, unde $k, p \in \mathbf{N}$.

Se cere: a) Să se determine valorile celor două expresii.
b) Să se determine valorile întregi ale lui x și y știind că:

$$\frac{x}{y} = \frac{E_1}{E_2} \text{ și } x + y = 1936 \cdot (-1)^{k+p},$$

unde $k, p \in \mathbf{N}$.

Ion Andrei, profesor, Vadu Moldovei, Suceava

E: 9548. Se dau proporțiile: $\frac{x}{5} = \frac{y}{3}$ și $\frac{y}{2} = \frac{z}{4}$. Știind că: $x + 2y + 3z = 116$, să se determine x, y, z.

Traian Galea, profesor, Gurahonț, Arad

E: 9549*. Într-un triunghi ABC dreptunghic în A notăm simetricele vîrfului A față de bisectoarele unghiurilor B și C cu D și respectiv E. Calculați lungimea segmentului DE în funcție de lungimile laturilor triunghiului ABC.

Ion Lupșor, profesor, Borșa, Maramureș

E: 9550*. În triunghiul ascuțitunghic ABC avem: $BB' \perp AC$, $CC' \perp AB$, $BB' \cap CC' = \{H\}$, $BO \equiv OC$ (unde $O \in BC$), $AH \cap B'O = \{M\}$. Dacă $B'C \equiv B'H \equiv HM$, să se afle măsurile unghiurilor triunghiului ABC.

Vasile Albu, profesor, Dej

Clasa a VII-a

E: 9551*. Fie a, b, c trei numere prime. Știind că $a + b = c$ și $(c - a) \cdot (b - a) - 9 \cdot a$ este un pătrat perfect, să se afle a, b, c.

Sermin Pîrnac, profesor, Clănița, Teleorman

E: 9552*. Arătați că oricare ar fi funcția $f: [a, b] \to [a, b]$, $a, b \in \mathbf{R}$ și oricare ar fi $x, y \in [a, b]$ sînt satisfăcute inegalitățile:

1) $ab \leqslant (a + b) f(x) - f^2(x)$;

2) $a^2 \geqslant a(f(x) + f(y)) - f(x) \cdot f(y)$;

3) $b^2 \geqslant b(f(x) + f(y)) - f(x) \cdot f(y)$.

Petre Simion, profesor, București

E: 9553. Perpendicularele duse din B pe bisectoarea unghiului O și din C pe bisectoarea unghiului B ale triunghiului ABC intersectează laturile AC și respectiv AB în K și respectiv J. I fiind punctul de intersecție al bisectoarelor, să se arate că patrulaterele $AIBK$ și $AJIC$ sînt inscriptibile.

Laura Constantinescu, profesoară, Sibiu

Scanned with OKEN Scanner

E: 9554. Într-un triunghi ABC cu laturile AB, AC și BC invers proporționale cu numerele 0,25 ; 0,(3) și 0,1(6) și perimetrul de 65 cm se duce $AD \perp AB$, $D \in BC$. Fie $M \in AB$, $N \in AC$ și $P \in BC$ cu proprietățile : $MN \parallel BC$, $NP \parallel AB$ și $AM = 8$ cm.
1) Dacă $BN \cap AD = \{R\}$ și $MP \cap BN = \{Q\}$ să se demonstreze că punctele A, M, Q și R sînt conciclice.
2) $MP \parallel AC$? Justificați răspunsul.

Maria Vizuroiu, Nicolae Vizuroiu, profesori, Pitești

E: 9555. Să se rezolve în numere naturale prime ecuația :

$$y = x^6 - 9x^4 + 6x^2 - 1.$$

Nicolae Bișboacă, profesor, Alba Iulia

E: 9556*. În trapezul $ABCD$ $(AB \parallel CD)$, diagonalele AC și BD intersectează paralela MN la baze în punctele P și respectiv R $(M \in AD$, $N \in BC)$ astfel încît $MP \equiv PR \equiv RN$. Dacă punctul S este mijlocul lui AB, să se arate că fiecare din tripletele (S, P, D) și (S, R, C) reprezintă puncte coliniare.

Sterian Modroiu, profesor, Urechești, Gorj

Clasa a VIII-a

E: 9557*. 1) Să se demonstreze că polinoamele $P(X)$ care satisfac relația

$$(X + 1)\,P(X - 1) = (X - 1)\,P(X) + 2, \quad (1), \text{ oricare ar fi } x \in \mathbf{R},$$

dau același rest la împărțirea prin X și prin $X + 1$;
2) Să se determine toate polinoamele $P(X)$ de gradul al doilea care satisfac relația (1).

Dragomir Costea, profesor, Gherla, Cluj

E: 9558. Fie P și Q două plane perpendiculare. Dreptele a, b, c incluse în P sînt perpendiculare pe Q în punctele A, B, respectiv C. Trei plane variabile α, β și γ includ dreptele a, b, c și au dreapta d comună. Dacă $AB = h$, $BC = 2h$, iar diedrele formate de α cu β și de γ cu P au măsuri egale, se cere locul geometric al dreptei d.

Loșki Ioan, Deva

E: 9559*. În planul α se consideră punctele A, B, C necoliniare și dreptele a și b perpendiculare pe planul α în punctele A, respectiv B, iar punctele D și E fixe situate pe dreptele a și, respectiv, b. Fie g o dreaptă variabilă ce trece prin punctul C, conținută în planul α, iar M, N, proiecțiile punctelor D și E pe dreapta g. Să se determine locul geometric al punctelor $P \in MN$ astfel încît : $MN = n \cdot MP$ $(n \in \mathbf{N} \setminus \{0, 1\})$.

Artur Bălănică, profesor, Botoșani

Scanned with OKEN Scanner

E:9560. Dacă $x, y, z \in \mathbb{R}$ și $xy + xz + yz = 3$ atunci să se arate că:

$$\sqrt{1+x^4} + \sqrt{1+y^4} + \sqrt{1+z^4} \geq 3\sqrt{2}.$$

Ștefan Smarandache, profesor, București

E:9561*. Planele bisectoare ale unghiurilor diedre ale triedrului tridreptunghic $Oxyz$ determină un nou triedru. Să se determine măsurile unghiurilor plane ale acestui triedru.

Teodor Toteanu, profesor, Cîmpulung Muscel

E:9562. Se consideră o piramidă regulată de înălțime h. Notăm cu R_1, R_2 razele sferei circumscrise, respectiv înscrise și cu R_3 raza cercului circumscris bazei. Să se arate că:

$$2R_1R_2 < (R_3h - R_2R_3)^2.$$

Daniel Sitaru, profesor, Drobeta Tr. Severin

PROBLEME PRELIMINARE DE TIP O.I.M. PENTRU ELEVII DIN GIMNAZIU

O.G:81. Fie ABC un triunghi ascuțitunghic cu lungimile laturilor a, b, c. Considerăm M un punct mobil în interiorul triunghiului ABC și notăm cu d_a, d_b, d_c distanțele punctului M respectiv la laturile de lungimi a, b, c. Să se afle maximul produsului $d_a \cdot d_b \cdot d_c$ și pentru ce poziție a punctului M se realizează acest maxim.

* * *

O.G:82. Fie ecuația:

$$(p-1)x^2+px+(p-2)=0, \text{ (1), unde } p \in \mathbb{R}\setminus\{1\}.$$

a) Demonstrați că există o infinitate de numere raționale p astfel încît cele două rădăcini ale ecuației (1) să fie numere raționale.
b) Determinați numerele raționale p astfel încît ambele rădăcini ale ecuației (1) să fie numere întregi.

Liviu Pîrșan

PROBLEME PENTRU LICEU

Clasa a IX-a

21569. Dacă $ABCD$ este un patrulater inscriptibil în cercul (C) de rază R cu laturile a, b, c, d, atunci are loc inegalitatea

$$abcd \leq 4R^4.$$

Zoltan Finta, profesor, Oradea

21570*. Pe latura $[AD]$ a unui pătrat $ABCD$ se consideră un punct mobil M și pe paralela prin M la AB se consideră punctele P și Q în interiorul și respectiv exteriorul pătratului $ABCD$, astfel că $DC \equiv CP \equiv CQ$. Să se afle locul geometric al intersecției dreptei DQ cu perpendiculara în P pe DP atunci cînd M descrie segmentul $[AD]$.

Gheorghe Neagu, profesor, Bacău

Scanned with OKEN Scanner

21571. Fie unghiul xAy fix și I un punct fixat în interiorul acestui unghi. O dreaptă oarecare ce trece prin I, intersectează pe Ax în M și pe Ay în N. Să se găsească poziția lui M, N astfel încît produsul $MM' \cdot NN'$ să fie minim, unde M' și N' sînt proiecțiile lui M și N pe AI.

* * *

21572*. Să se rezolve în $\mathbb{N}^3$ ecuația :

$$\arccos x + \arccos y + \arccos z = \pi.$$

Aurel Doboșan, profesor, Lugoj

21573. Fie ABC un triunghi și A', B', C' mijloacele laturilor (BC), (CA), (AB). Să se arate că $(OG) \subset \text{Int}\, A'B'C'$, unde O și G sînt centrul cercului circumscris triunghiului și respectiv centrul de greutate al triunghiului.

Răzvan Satnoianu, student, București

21574. Să se determine pe laturile triunghiului oarecare ABC, punctele $M \in AB$, $N \in AC$, $P \in BC$, așa încît să fie adevărată propoziția : „$BMNC$ este inscriptibil și $AMPN$ este paralelogram".

Florin Ctrjan, profesor, Botoșani

21575*. Să se determine mulțimea polinoamelor unitare (coeficientul dominant este egal cu 1) de gradul al doilea, care au proprietatea că una din rădăcini este opusa părții fracționare a celeilalte, iar produsul rădăcinilor este opusul părții întregi a uneia din ele. Să se arate apoi că orice două polinoame de acest fel nu au rădăcini comune.

Cătălin Ioan, profesor, Ianca, Brăila

Clasa a X-a

21576*. Fie poligonul $A_1A_2A_3 \ldots A_n$ înscris în cercul $\mathcal{C}(O, R)$ $(n \geqslant 3)$. Să se găsească locul geometric al punctelor M din interiorul lui $\mathcal{C}(O, R)$ pentru care :

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{MA_i}{MB_i} = n, \text{ unde } \{A_i, B_i\} = MA_i \cap \mathcal{C}(O, R), (\forall) i \in \{1, 2, \ldots, n\}$$

Patrick Popescu-Pampu, elev, București

21577. Să se arate că $(\exists) a, b, c, d \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ astfel încît numărul

$$M = (a^b + c^d + 1)^{\frac{1}{2}} - a^b \in \mathbb{N}.$$

Lucian Buliga, profesor, Dealu Lung, Vrancea

21578. Fie triunghiul oarecare ABC în care $BC > AB > CA$: pe latura (BC) se consideră punctele M, N, astfel că : $BA \equiv BN$ și $CA \equiv CM$; analog, se obțin punctele Q și P pe latura AB ($AQ \equiv AC$, $Q \in (AB)$ și $BP \equiv BC$, $A \in (BP)$) și punctele R, S pe latura AC ($AR \equiv AB$, $C \in (AR)$ și $CB \equiv CS$, $A \in (CS)$). Să se arate că :

1) $MN + PQ + RS = 2p$;

2) $S = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{MN \cdot PQ \cdot RS}{2} \cdot p}$;

3) Dacă R_1, R_2, R_3 sînt razele cercurilor circumscrise triunghiurilor AMN, CPQ, BRS atunci $R_1 \cdot R_2 \cdot R_3 = 4R \cdot r^2$.

(unde : S, p, R, r sînt notațiile obișnuite în triunghi).

Dan Brânzei, inginer, Pitești

21579. Să se determine valorile pe care le poate lua $a \in \mathbb{N}^*$ astfel ca numărul $A = \underbrace{11\ldots1}_{n \text{ cifre}}\underbrace{1788\ldots8}_{n \text{ cifre}}2$ să fie divizibil cu numărul $B = \underbrace{aa\ldots a}_{n+1 \text{ cifre}}$ oricare ar fi $n \in \mathbb{N}^*$.

Emil C. Popa, profesor, Sibiu

Scanned with OKEN Scanner

21580*. Se consideră n numere întregi $x_1, x_2, \ldots, x_n$ așa încît suma $x_i^p + x_j^p + x_k^p$, p număr prim, $p \geq 3$, să fie multiplu de p pentru orice $i, j, k = \overline{1, n}$. Să se arate că fiecare dintre cele n numere întregi este divizibil cu p.

Florin Rotaru, matematician, Focșani

21581*. Să se rezolve, în mulțimea $\mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right\}$, sistemul:

$$\begin{cases} y + x^3 = 3x\ (1 + xy) \\ z + y^3 = 3y\ (1 + zy) \\ x + z^3 = 3z\ (1 + xz) \end{cases}$$

Lucian Buliga, profesor, Dealu Lung, Vrancea

21582. Să se rezolve ecuația: $x^y = z^u$, în cazul general cînd x, y, z și u sînt numere reale.

Laurian Colcer, profesor, Tulcea

Clasa a XI-a

21583*. Fie șirul $(x_n)_{n \geq 1}$ definit astfel: $x_1 = 1$ și $(n+1)(x_{n+1} - x_n) \geq 1 + x_n$, $(\forall) n \in \mathbb{N}$. Să se arate că șirul $(x_n)_{n \geq 1}$ este nemărginit.

Mircea Lascu, profesor, Zalău

21584. Să se arate că

$$\sqrt{2\sqrt{3\sqrt{4 \ldots \sqrt{n}}}} < 3 - \frac{n+1}{n-1}.$$

Lubomir Lubenov, profesor, Bulgaria

21585. Să se arate că:

$$\left| \operatorname{arctg}(\sec x) - \frac{\pi}{2} \right| < \ln\left(\operatorname{ctg} \frac{x}{2} \right), \quad x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right).$$

Laurențiu Chirilă, profesor, Sighișoara

21586*. Fie ε o rădăcină primitivă de ordin n a unității. Să se arate că $(\forall) p \in \mathbb{R}$ există $x \in \mathbb{R}$ astfel încît

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x - \varepsilon^k} = p.$$

Silviu Stössel, profesor, București

21587. Fie funcțiile $f_k(n) = \sqrt[k]{k + \sin x}$, $k = 1, 2, \ldots, n$ și punctele $a_i \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$, $i = 1, 2, \ldots, n-1$ și $n \in \mathbb{N}$. Să se demonstreze că în fiecare interval $(a_i; a_{i+1})$ există un punct c astfel încît:

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{f_1(c)} & \frac{1}{f_2(c)} & \cdots & \frac{1}{f_n(c)} \\ f_1(a_1) & f_2(a_1) & \cdots & f_n(a_1) \\ f_1(a_2) & f_2(a_2) & \cdots & f_n(a_2) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f_1(a_{n-1}) & f_2(a_{n-1}) & \cdots & f_n(a_{n-1}) \end{vmatrix} = 0$$

Alexandru Constantinescu, inginer București

Scanned with OKEN Scanner

21588. Într-un sistem de axe rectangulare xOy se consideră punctul $M(x, y)$. Știind că este satisfăcută relația:

$$|2x - 3y + 3| + |3x + y - 12| + |x + 4y - 4| = 11,$$

să se găsească locul geometric al punctului M.

G. Ionescu-Țiu

21589*. Dacă $f \in \mathbb{R}[X]$ și $f(x) > 0$, $(\forall)\, x \geqslant 0$, să se calculeze

$$\lim_{n\to\infty} \left(\sqrt[n+1]{(n+1)!\, f(n+1)} - \sqrt[n]{n!\, f(n)} \right).$$

(O generalizare a problemei lui *Traian Lalescu*).

D. M. Bătinețu-Giurgiu, profesor, București

Clasa a XII-a

21590. Dacă $P \in \mathbb{R}[X]$ este un polinom de grad $n \geqslant 2$ cu rădăcinile reale simple $x_1, x_2, \ldots, x_n$ să se arate că

$$\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} \frac{P'(x_i) + P'(x_j)}{(x - x_i)(x - x_j)\, P'(x_j)\, P'(x_i)} = 0.$$

Florin Rotaru, matematician, Focșani

21591*. Să se arate că, într-un inel $(A, +, \cdot)$, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, avem $x^{2(2n+1)} = x$, $(\forall) x \in A$ dacă și numai dacă $x^{2n} = x$, $(\forall) x \in A$.
(O generalizare a problemei 4641 din R.M.T 2/1981)

Ionel Gh. Tudor, profesor, Călugăreni, Giurgiu

21592. Să se calculeze

$$I_n = \int_0^{\pi/2} \cos^n x \cdot \sin\left((n+2)x + \frac{\pi}{4}\right) dx.$$

Nicolae Pavelescu, profesor, Rm. Vîlcea

21593*. Dacă f este o funcție integrabilă pe $[0, 1]$, să se calculeze

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{f\left(\frac{i}{n}\right)}{\sqrt[k]{n^k + i}}, \quad k \in \mathbb{N},\ k \geqslant 2.$$

(O generalizare a problemei 21120*, din G.M. 5/1987).

Willy Portal, profesor, Galați

21594. Se dă $f : \left[0, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{\cos x}{ae^{-x} + \sin x + \cos x}$, $a \geqslant 0$. Se cer primitivele acestei funcții.

Vasile Berghea, profesor, Avrig

21595. Fie $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ o funcție continuă și monoton crescătoare pe $[a, b]$. Să se arate că:

$$\int_a^t f(x)dx \leqslant \frac{t - a}{b - a} \int_a^b f(x)dx,$$

oricare ar fi $t \in [a, b]$.

Emil C. Popa, profesor, Sibiu

Scanned with OKEN Scanner

21596*. Să se determine primitivele funcției $f:(1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x^3-x-1}{(x-1)^2}\cdot e^x$.

Doru Isac, profesor, Sibiu

PROBLEME PREGĂTITOARE PENTRU O.I.M. ȘI O.B.M.

O:563. Să se arate că:

$$\sum_{k=m}^{n} x^k\cdot A_k^m\cdot C_n^k = x^m\cdot(1+x)^{n-m}\cdot A_n^m,\ 1\leq m\leq n,\ x\in\mathbb{R}.$$

Nicolae Pavelescu, profesor, Rm. Vîlcea

O:564. Pe un cerc se consideră punctele $A_1, A_2, \ldots, A_8$. Pot fi exact trei dintre distanțele A_iA_j, $i,j\in\{1,\ldots,8\}$, $i\neq j$, exprimate prin numere raționale?

M. Cavachi, profesor, Constanța

O:565. Să se determine numerele naturale a care au exact 6 divizori naturali și astfel încît suma inverșilor acestor divizori este egală cu 2.

Mircea Lascu, profesor, Zalău

PROBLEME PENTRU CONCURSUL ANUAL AL REZOLVITORILOR

Clasele a IX-a și a X-a

C:825. Să se rezolve în mulțimea $\mathbb{N}^6$ sistemul:

$$\begin{cases} x^3+6yz+1=u^3\\ y^3+6xz+1=v^3\\ z^3+6xy+1=w^3. \end{cases}$$

Mircea Lascu, profesor, Zalău

C:826. Se consideră un triunghi ABC și trei ceviene concurente duse din A, B, C, care taie a doua oară cercul circumscris triunghiului respectiv în punctele A_1, B_1, C_1. Tangentele în A_1, B_1, C_1 la acest cerc taie dreptele BC, CA, AB respectiv în A_2, B_2, C_2. Să se demonstreze că punctele A_2, B_2, C_2 sînt coliniare.

Marian Dincă, profesor, Perșani, Brașov

C:827. Fie (a,b,c) un triplet de numere naturale pitagoreice. Să se arate că $a\cdot b\cdot c$ este divizibil cu 4.

Augustin Stan, profesor, Oradea

C:828. Să se rezolve în $\mathbb{R}^n$ sistemul de ecuații

$$(k+1)x_k^{k+1}=x_{k+1}\left(1+\sum_{i=1}^{k}x_k^{2i}\right),\quad k=1,2,\ldots,n,$$

unde, pentru uniformitate, am notat $x_{n+1}=x_1$.

M. D. Bătinețu-Giurgiu, profesor, București

Scanned with OKEN Scanner

Clasele a XI-a și a XII-a

C:829. Să se calculeze:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt[n+a]{!(n+a)}-\sqrt[n+b]{!(n+b)}\right),$$

unde $a, b \in \mathbb{N}$, $a > b$ iar $!k \overset{\text{def}}{=} k!\left(\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\ldots+\frac{(-1)^n}{n!}\right)$.

Titus Podgornei, student, București

C:830. Fie $(G, \cdot)$ un grup comutativ cu proprietatea că există un element $a \neq e$, conținut în toate subgrupurile proprii. Arătați că oricare ar fi H, K două subgrupuri are loc $H \subseteq K$ sau $K \subseteq H$.

Doru Isac, profesor, Sibiu

C:831. Fie $f:[0,1]\to[0,1]$ o funcție *Rolle*, pentru care ecuația $f'(x)=0$ are soluție unică $x_0 \in (0,1)$. Să se calculeze $\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f^n(x)dx$.

Horea Coman și *Doru Isac*, profesori, Sibiu

C:832. Se consideră mulțimea de matrici pătratice

$$A_n=\left\{\begin{pmatrix} a & nc & nb \\ b & a & nc \\ c & b & a \end{pmatrix}\middle|\ a,b,c\in\mathbb{Q}\right\},$$

precum și mulțimea de numere reale

$$\mathbb{Q}[\sqrt[3]{n}]=\{a+b\sqrt[3]{n}+c\sqrt[3]{n^2}\mid a,b,c\in\mathbb{Q}\},$$

unde $n \in \mathbb{Z}$. Să se demonstreze următoarele:

1) A_n (respectiv $\mathbb{Q}[\sqrt[3]{n}]$) este un inel comutativ (respectiv corp comutativ), față de operația uzuală de adunare și înmulțire a matricilor (respectiv a numerelor reale).

2) A_n este corp $\Leftrightarrow$ inelele $\mathbb{Q}[\sqrt[3]{n}]$ și A_n sînt izomorfe $\Leftrightarrow$ n nu este un cub perfect în $\mathbb{Z}$.

Toma Albu

PROBLEME DE INFORMATICĂ

I:341. Să se utilizeze calculatorul electronic pentru a verifica următoarele egalități:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{4^n}C_{2n}^n\sqrt{n+\frac{1}{4}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{4^n}C_{2n}^n\sqrt{n+\frac{1}{4}+\frac{1}{32n}}=\frac{1}{\sqrt{\pi}}.$$

(a se vedea „O rafinare a formulei lui Stirling", de *L. Panaitopol*, G.M. 8/1985).

M. Vlada, cercetător, București

I:342. Fiind date n puncte din spațiul tridimensional determinate prin coordonatele (x, y, z), să se elaboreze un algoritm pentru a determina sfera de rază minimă cu centrul într-unul din punctele date și care conține în interiorul ei toate cele n puncte.

Gheorghe Ionescu, profesor, Bolintin Vale

I. P. Informația n. 2514 — INDEX 41601 — Lei 3,50

Scanned with OKEN Scanner

ISSN 0016-5441

SOCIETATEA DE ȘTIINȚE MATEMATICE
DIN REPUBLICA SOCIALISTĂ ROMÂNIA

GAZETA MATEMATICĂ

PUBLICAȚIE LUNARĂ PENTRU TINERET

11-12

DIN CUPRINS:

– CONCURSUL ANUAL AL REZOLVITORILOR G. M. 1988
– A 29-A O.I.M.
– NOTE MATEMATICE
– ADMITEREA ÎN ÎNVĂȚĂMÎNTUL SUPERIOR, 1988
– CONCURSUL DE MATEMATICĂ CLASELE VI – VIII, FAZA FINALĂ, 1987
– PROBLEME REZOLVATE PENTRU GIMNAZIU ȘI LICEU
– PROBLEME PENTRU CICLUL PRIMAR, GIMNAZIU, PRELIMINARE DE TIP O.I.M. PENTRU GIMNAZIU, PROBLEME PENTRU LICEU, PREGĂTITOARE PENTRU O.I.M. ȘI O.B.M., PENTRU CONCURSUL ANUAL AL REZOLVITORILOR.
– ANUNȚURI IMPORTANTE PE COP. IV

Acest număr dublu a fost realizat în colaborare cu Filialele S.S.M. Bacău și Buzău.

ANUL XCIII nr. 11-12/1988

Numărul 8/1988 a fost elaborat în colaborare cu Filiala S.S.M. Arad. Numărul 9/1988 a fost elaborat în colaborare cu Filiala S.S.M. Maramureș.

Redacția cere scuze pentru omisiune

Scanned with OKEN Scanner

GAZETA MATEMATICĂ

SUMARUL

		Pag.
1.	Concursul anual al rezolvitorilor Gazetei Matematice, 1988, (I), de Acad. *N. Teodorescu*	417
2.	A 29-a Olimpiadă Internațională de Matematică, de *Mircea Becheanu*	423
3.	Concursul anual al rezolvitorilor Gazetei Matematice 1988, (II), de Acad. *N. Teodorescu*	430
4.	Utilizarea calculatorului în studiul unor șiruri recurente, de *S. Cremarenco* și *B. Enescu*	434
5.	Asupra ecuației funcționale $f(x+a) = f(x)\cdot f(x) + h(x)$, de *D. M. Bătineţu-Giurgiu* și *Florin Vulpescu-Jalea*	437
6.	Probleme din manuale: Asupra unei inegalități geometrice, de *Cornel Berceanu*	444
7.	Concursul de matematică clasele VI—VIII, etapa finală, Bacău, aprilie 1987	445
8.	Admiterea în învățământul superior, 1988	447
9.	Probleme rezolvate pentru gimnaziu (E:9275, E: 9282, E: 9288, E: 9291, E: 9296, E: 9300, E: 9301, E: 9302, E: 9305, E: 9314, E: 9319)	457
10.	Probleme rezolvate pentru liceu (21265, 21266, 21354, 21357, 21290, 21299, 21308, 21311)	462
11.	Probleme pentru ciclul primar (81—96)	467
12.	Probleme pentru gimnaziu (E: 9563—E: 9610)	469
13.	Probleme preliminare de tip O.I.M. pentru elevii din gimnaziu (O.G: 83—O.G: 86)	476
14.	Probleme pentru liceu (21597—21652)	476
15.	Probleme pregătitoare pentru O.I.M. și O.B.M. (O: 566—O: 571)	48.
16.	Probleme pentru Concursul anual al rezolvitorilor (C: 833—C: 848)	486
17.	Unde este greșeala? de *Constantin V. Crăciun*	489
18.	Rubrica rezolvitorilor de probleme	490
19.	Tabla de materii a Gazetei Matematice pe anul 1988	493

ANUL XCIII | 11-12 | 1988

COMITETUL DE REDACȚIE

Lector univ. Dumitru Acu, Sibiu; lector univ. Toma Albu; lector univ. Horea Banea, Brașov; lector univ. Octavian Băsescu; conf. univ. Dan Brânzei, Iași; prof. Constantin Cărbunaru; prof. Marcel Chiriță; prof. Paul Dalyay, Tg. Mureș; lector univ. Inocențiu Drăghiescu; prof. Ioana Drăghici; înv. Alexandrina Dumitru; prof. Ilie Gheorghiță; prof. Adrian Ghioca, Sinaia; cercet. princip. Gheorghe Gussi; lector univ. Stere Ianuș; prof. Ștefan Kadar, Baia Mare; lector univ. Constantin Niță; prof. univ. Árpád Pál, Cluj-Napoca; lector univ. Laurențiu Panaitopol; prof. Olimpia Popescu, Ploiești; matem. Paul Radoviciu-Mărculescu; lector univ. Gheorghe Siretchi; lector univ. Ioan Tomescu; prof. Mircea Trifu, Gurgiu; prof. Florin Vulpescu-Jalea.

REDACȚIA GAZETEI MATEMATICE

Redactor șef (delegat): Acad. N. Teodorescu; redactori principali: prof. Alexandru Constantinescu, prof. Ilie Ilieșcu, prof. Liviu Pîrșan, prof. Marcel Țena; redactori principali onorifici: C. Ionescu-Țiu, asist. univ. Elisferie Rogai; redactori: prof. Liliana Balaci.

Responsabili de număr: prof. Liviu Pîrșan și prof. Marcel Țena.

ADRESA REDACȚIEI GAZETEI MATEMATICE

Str. Academiei nr. 14, tel. 14.46.53 — București, 1, cod. 79543.

Cititorii din străinătate se pot abona prin ROMPRESFILATELIA, Sectorul Export-Import-Presă, Calea Griviței nr. 64—66, P.O.Box 12-251, Telex 10376 Prfir, București, ROMÂNIA

Scanned with OKEN Scanner

GAZETA MATEMATICĂ

PUBLICAȚIE LUNARĂ PENTRU TINERET

ANUL XCIII nr. 11—12 noiembrie—decembrie 1988

CONCURSUL ANUAL AL REZOLVITORILOR GAZETEI MATEMATICE (I) (PARTEA I, CÎMPULUNG MUSCEL, 10—22 AUGUST 1988, EDIȚIA a IX-a)

ORGANIZARE ȘI PROBE DE CONCURS

de Acad. N. Teodorescu

§ 1. Tradiția Concursului rezolvitorilor

În 1980, Societatea de Științe Matematice din R. S. România a reluat tradiția prestigioasă a Concursurilor Gazetei Matematice, începută în 1902, din inițiativa „stîlpilor" acestei reviste, concursuri care au devenit un eveniment național. La acestea, cei mai înzestrați dintre rezolvitorii și propunătorii de probleme se angajau într-o competiție nobilă și erau răsplătiți prin premii cu care generații întregi s-au mîndrit, nu numai ca elevi, dar și cînd străluceau în carierele spre care se îndreptaseră. Cei mai de seamă dintre profesorii universitari sau secundari, ingineri și cercetători și-au înscris numele printre premianții concursurilor Gazetei Matematice.

Reluînd această frumoasă tradiție, conducerea S.S.M. a ținut să aducă un omagiu celor care cu prestigiul și autoritatea personalității lor au organizat aceste prețioase competiții prin care se puneau bazele carierelor celor mai valoroși elevi ai liceelor noastre. Dar condițiile vieții noastre sociale actuale sînt altele decît în trecut, cînd numărul adolescenților care aveau înclinații spre matematică era destul de redus, față de cei ce iubesc matematica în zilele noastre și doresc să-i aducă prinos avînturile lor. Numărul abonaților vechii G.M. era de 1500—2000, pe cînd G.M. actuală nu ajunge să satisfacă printr-un tiraj de 120 000 exemplare, solicitările de abonamente. De aceea, Concursul anual al rezolvitorilor Gazetei Matematice se adresează într-o primă etapă masei tuturor rezolvitorilor și înscrie la concurs pe toți elevii liceelor care au recomandarea profesorilor lor și aprobarea conducerii liceelor respective. Dintre aceștia, selecționează la sfîrșitul anului școlar, pe cei care au rezolvat cît mai multe dintre problemele înscrise în casetele claselor IX—X, respectiv XI—XII în fiecare număr al Gazetei. Numărul minim de puncte este în general 580, maximul ridicîndu-se pînă la 2500—3000. Se vede deci că se acordă șansa de a concura la cea de-a doua etapă unui larg evantai de concurenți, care se vor înfrunta într-o tabără concurs de 12—15 zile, organizată în vacanța de vară, unde vor trece două probe scrise: una de raționament teoretic, cealaltă de tehnică matematică, ambele constînd din probleme.

Spre deosebire de toate celelalte forme de concurs, în care se dau 3—5 probleme de rezolvat în 3—4 ore, la Concursul nostru se dau 2 probleme obligatorii și una opțională într-un interval de 4 ore. Se aleg probleme de conținut și nu de artificii, oferindu-se concurenților prilejul și timpul necesar afirmării creativității prin generalizări, aplicații sau găsirea mai multor soluții. Nu există plafon prestabilit pentru notări, o rezolvare perfectă cu o redactare foarte bună se evaluează la 25 puncte, se punctează pozitiv redactările cele mai bune și se penalizează cele slabe, de asemenea se suplimentează generalizările și soluțiile date în plus. Astfel, se poate ajunge la 30—35 puncte pentru o problemă, ceea ce oferă un criteriu just și încurajator de departajare.

Viața de tabără oferă concurenților în plus două miniconcursuri foarte apreciate, seîndințe de cerc în care membrii comisiei de concurs prezintă capitole speciale din diverse discipline, se rezolvă probleme dificile și se fac comentarii și prezentări de metode inedite. Programul social este foarte atractiv prin excursii, sport, vizite la muzee și instituții, focuri de tabără etc.

Concurenții descoperă în fiecare an prieteni cu care leagă prietenii, se cunosc mai bine și învață să se aprecieze reciproc într-o ambianță de cordialitate, în care apropierea dintre concurenți și profesori joacă un rol deosebit.

Scanned with OKEN Scanner

Primele 5 ediții s-au desfășurat la Cîmpulung-Muscel, în localul monumental al Liceului pedagogic, așezat într-o poziție pitorească. Următoarele 3 ediții au avut loc la Curtea de Argeș, de asemenea într-o ambianță agreabilă, la Liceul agro-industrial, vecin cu Mănăstirea Curtea de Argeș. Ediția din acest an, a IX-a, a revenit la Cîmpulung Muscel, spre bucuria tuturor celor care participaseră la edițiile anterioare.

Tabăra-concurs 1988 s-a desfășurat în intervalul 10—22 august. În programul instructiv-competițional au fost incluse:

1) lecții și seminarii ținute de membrii comisiei;
2) ședințe de cercuri de matematică;
3) două miniconcursuri pentru echipaje formate de concurenți după propriile lor predilecții;
4) două probe de concurs: de raționament matematic și tehnică matematică.

1) Au fost ținute următoarele prelegeri:
— Acad. *N. Teodorescu*: „Contribuția sec. al XVII-lea la edificarea analizei matematice" (ambelor grupe de concurenți);
— Acad. *N. Teodorescu*: „Ecuații funcționale" (claselor a XI-a și a XII-a);
— Lector dr. *C. Vraciu*: „Grupuri finite" — 2 ședințe (claselor a XI-a și a XII-a);
— Prof. *M. Țena*: „Șiruri *Cauchy* și teorema contracției a lui *Banach*" (claselor a XI-a și a XII-a);
— Prof. *M. Țena*: „Cîmp de probabilitate" (claselor a XI-a și a XII-a);
— Prof. *Iulia Sebestyen*: „Ecuații diofantice" (claselor a IX-a și a X-a);
— Prof. *I. Toteanu*: „Transformări geometrice" (claselor a IX-a și a X-a);
— Prof. *M. Lascu*: „Inegalități geometrice" (claselor a IX-a și a X-a);
— Prof. *M. Beneze*: „Chestiuni de combinatorică" (claselor a IX-a și a X-a);
— Prof. *Mihaela Predescu*: „Extinderi ale teoremelor de medie" (claselor a XI-a și a XII-a).

2) S-au organizat cercuri de rezolvări de probleme, respectiv:
— Prof. *L. Pîrșan*: „Probleme de concurs și probleme de sinteză" (clasele a IX-a și a X-a);
— Prof. *M. Beneze*: Probleme diverse pentru concursuri (claselor a IX-a și a X-a);
— Prof. *Ioana Munteanu*: „Probleme din revista sovietică „Kvant" (claselor a IX-a și a X-a);
— Prof. *M. Țena*: „Probleme de sinteză" (2 ședințe, clasele a XI-a și a XII-a);
— Acad. *N. Teodorescu*, prof. *M. Țena*, prof. *L. Pîrșan*, prof. *M. Predescu*: „Soluțiile problemelor date la probele de concurs" (ambele grupe).

3) Cele două miniconcursuri s-au desfășurat în zilele de 13 august și 15 august cu temele următoare:

Miniconcursul I cu probleme propuse de comisie:

1. Fie $f \in C[X]$, $f(X) = X^n + \sum_{k=1}^{n} a_k X^{n-k}$. Să se arate că dacă $\sum_{k=1}^{n} |a_k| < 1$, atunci rădăcinile polinomului f au modulul mai mic decît 1. (5 min.).

M. Beneze

2. a) Fie A, B, C trei puncte necoliniare și M, N două puncte astfel încît $AM = AN$, $BM = BN$, $CM = CN$. Să se arate că M și N coincid.

b) Formulați și rezolvați o problemă analoagă în spațiu. (4 min.).

I. Toteanu

3. Fie ABC un triunghi oarecare și punctele variabile $A' \in (BC)$, $B' \in (CA)$, $C' \in (AB)$ astfel încît $BA' \leqslant A'C$, $B'C \leqslant B'A$, $C'A \leqslant C'B$.

a) Să se determine triunghiul $A'B'C'$ de arie minimă;

b) Să se demonstreze că pentru orice alegere a punctelor A', B', C' în ipotezele problemei, cel puțin unul din triunghiurile $AB'C'$, $BC'A'$, $CA'B'$ are aria mai mică sau egală decît aria lui $A'B'C'$. (8 min.).

Acad. *N. Teodorescu*

4. Fie $a, b \in \mathbf{N}^*$. Să se arate că $a \mid b$ sau $b \mid a \Leftrightarrow a + b = (a, b) + [a, b]$. (5 min.).

M. Lascu

5. Considerăm inelul $M_n(Z_p)$ al matricilor pătratice de ordin n peste corpul Z_p (p prim) și corpul $K = \{O_n\} \cup \{A \mid A \in M_n(Z_p), \det A \neq \hat{0}\}$. Inelul $M_n(Z_p)$ este finit și atunci corpul K va fi finit, deci comutativ. Rezultă că: *oricare două matrici inversabile din $M_n(Z_p)$ comută între ele.* Demonstrați că rezultatul scris cursiv este fals și găsiți greșeala raționamentului. (6 min.).

M. Țena

Scanned with OKEN Scanner

6. Dați exemplu de un interval $[a, b] \subset \mathbb{R}$ și o funcție integrabilă $f:[a, b] \to \mathbb{R}$ cu proprietatea că funcția $F:[a, b] \to \mathbb{R}$, $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ nu este derivabilă. (3 min.).

* * *

Miniconcursul al II-lea cu probleme propuse de echipaje

1. Se consideră cercurile $\mathcal{C}_1(O, R)$ și $\mathcal{C}_2(O, 2R)$, punctele $A \in \mathcal{C}_1$, $\{N\} = (AO \cap \mathcal{C}_2$, iar S și Q intersecțiile unei drepte ce trece prin A cu cercul $\mathcal{C}_2$. Să se arate că paralela prin O la SQ trece prin ortocentrul triunghiului SNQ. (7 min.).

Echipajul *Alba—Olt—Argeș*

2. Să se descompună în factori ireductibili în $\mathbb{R}[X]$ polinomul $f = 2X^3 + X^2 + 3X + 3$. (4 min.).

Echipajul *Moldova*

3. Să se arate că

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\text{Card}\{p^q | p, q \in \mathbb{N},\ p \geq 2,\ q \geq 2,\ p^q < n\}}{n} = 0. \quad (6 \text{ min.}).$$

Echipajul *Ardeal-Brăila*

4. Fie ABC un triunghi echilateral cu latura l. Să se determine mulțimea punctelor M din planul triunghiului, pentru care există $S, T \in [ABC]$, $S \neq T$, astfel încît $SM \leq ST$. (7 min.).

Echipajul *București 1*

5. Fie ABC un triunghi isoscel cu unghiul $\widehat{BAC}$ de 100°. Pe AB se ia punctul D astfel încît $B \in (AD)$ și $AD = BC$. Să se calculeze măsura unghiului $\widehat{ADC}$. (5 min.).

Echipajul *București 2*

6. Să se demonstreze că pentru orice a, b cu $0 < b \leq a < \frac{\pi}{2}$, avem

$$\frac{\sin a}{\sin b} \leq \frac{1 + \sin a - \cos a}{1 + \sin b - \cos b}. \quad (5 \text{ min.}).$$

Echipajul *București 3*

4) Cele două probe de concurs au avut loc în zilele de 18 august și 19 august, temele fiind următoarele:

Proba de raționament, clasele IX—X

1. Se consideră triunghiul ABC în care unghiul $\hat{A}$ este ascuțit și $B < \pi - 2A$, $C < \pi - 2A$.

a) Să se demonstreze că există și sînt unic determinate punctele $M \in (AB)$ și $N \in (AC)$ astfel încît măsurile unghiurilor $\widehat{BMC}$ și $\widehat{BNC}$ să fie egale cu $2A$.

b) Dacă latura $[BC]$ rămîne fixă, iar vîrful A variază în plan astfel încît măsura unghiului $\hat{A}$ rămîne constantă îndeplinind ipotezele din enunț, să se demonstreze că lungimea segmentului $[MN]$ este constantă.

c) Pentru un triunghi ABC satisfăcînd ipotezele problemei, notăm cu A_0 punctul situat de aceeași parte a dreptei BC ca și punctul A și care are proprietatea că triunghiul A_0BC este isoscel cu vîrful în A_0, iar $\hat{A}_0 \equiv \hat{A}$.

În triunghiul A_0BC notăm cu M_0, N_0 analoagele punctelor M și N din triunghiul ABC și mai considerăm simetricul lui A_0 față de dreapta M_0N_0, pe care îl notăm cu A_1. Să se demonstreze că AMA_1N este un paralelogram.

Acad. *N. Teodorescu*

Scanned with OKEN Scanner

2. Spunem că un polinom de gradul n, $f = a_0 + a_1X + \ldots + a_n X^n \in \mathbb{C}[X]$ este reciproc de speța I dacă $a_{n-i} = a_i$, $i \in \{0, 1, 2, \ldots, n\}$, respectiv este reciproc de speța a II-a dacă $a_{n-i} = -a_i$, $i \in \{0, 1, 2, \ldots, n\}$. Să se demonstreze că:

a) Polinomul $f \in \mathbb{C}[X]$ de grad n este reciproc de speța I dacă și numai dacă

$$f\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{1}{z^n} f(z), \quad (\forall)\, z \in \mathbb{C}\setminus\{0\}.$$

b) Polinomul $f \in \mathbb{C}[X]$ de grad n este reciproc de speța a II-a dacă și numai dacă

$$f\left(\frac{1}{z}\right) = -\frac{1}{z^n} f(z), \quad (\forall)\, z \in \mathbb{C}\setminus\{0\}.$$

c) Dacă $f \in \mathbb{R}[X]$ este un polinom de grad n, reciproc de speța I, iar z_0 o rădăcină a unității de ordinul n, avem echivalența:

$$f(z_0) = 0 \Leftrightarrow (\exists)\ a \in \mathbb{R} \text{ cu } f(z_0) = ia.$$

d) Dacă $f \in \mathbb{R}[X]$ este un polinom de grad n, reciproc de speța a II-a, iar z_0 o rădăcină a unității de ordinul n, avem echivalența:

$$f(z_0) = 0 \Leftrightarrow (\exists)\ b \in \mathbb{R} \text{ cu } f(z_0) = b.$$

e) Produsul a două polinoame reciproce de speța I este un polinom reciproc de speța I; produsul a două polinoame reciproce de speța a II-a este un polinom reciproc de speța I; produsul dintre un polinom reciproc de speța I și un polinom reciproc de speța a II-a este un polinom reciproc de speța a II-a.

f) Un polinom $f \in \mathbb{R}[X]$ care are toate rădăcinile de modul 1 este reciproc de speța I sau de speța a II-a, după cum 1 apare ca rădăcină multiplă de ordin par, respectiv de ordin impar.

Marcel Țena

3. Un plan taie muchiile laterale (VA), (VB), (VC), (VD) ale unei piramide patrulatere regulate $VABCD$ respectiv în punctele A', B', C', D'. Notînd $VA' = a$, $VB' = b$, $VC' = c$, $VD' = d$, să se demonstreze că:

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{c} = \frac{1}{b} + \frac{1}{d}.$$

* * *

Proba de tehnică, clasele IX–X

1. Fie ecuația $px^3 = x + 1$, unde $p \in \mathbb{Q}$, $p \neq 0$.

a) Să se determine efectiv o valoare $p \in \mathbb{Q}$, $p \neq 0$, astfel încît toate rădăcinile ecuației să fie raționale. Să se rezolve ecuația în acest caz.

b) Să se demonstreze că există o infinitate de numere raționale nenule p pentru care toate rădăcinile ecuației date să fie raționale.

Liviu Ptrșan

2. Fie ABC un triunghi cu unghiurile $\hat{B}$ și $\hat{C}$ ascuțite, iar M un punct mobil pe latura (BC). Notăm cu O și O' respectiv centrele cercurilor circumscrise triunghiurilor ABM și ACM.

a) Să se demonstreze că raportul razelor acestor cercuri este constant.

b) Să se determine poziția punctului M pe latura (BC) astfel încît aceste raze să fie minime.

c) Să se demonstreze că triunghiurile AOO' și ABC sînt asemenea.

d) Să se afle locul geometric al proiecției ortogonale P a punctului A pe dreapta OO'.

(C.d.p. *J. Hadamard*)

3. Notăm $\varepsilon = \cos\frac{\pi}{7} + i \sin\frac{\pi}{7}$ și $\theta = \varepsilon - \varepsilon^6$. Să se demonstreze că:

a) $\sin\frac{\pi}{7} = -\frac{1}{2} i\,(\varepsilon + \varepsilon^6)$; $\sin\frac{2\pi}{7} = -\frac{1}{2} i\,(\varepsilon^2 + \varepsilon^5)$; $\sin\frac{3\pi}{7} = -\frac{1}{2} i\,(\varepsilon^3 + \varepsilon^4)$.

b) Pentru orice $n \in \mathbb{Z}$, există $\alpha_n \in \{-1, 0, 1\}$ și $\beta_n \in \{\varepsilon + \varepsilon^6, \varepsilon^2 + \varepsilon^5, \varepsilon^3 + \varepsilon^4\}$ astfel încît $\sin\frac{n\pi}{7} = -\frac{1}{2} i \alpha_n \beta_n$.

Scanned with OKEN Scanner

c) θ este rădăcină a polinomului $X^3 - X^2 - 2X + 1 \in \mathbb{Z}[X]$.

d) Numărul $\cos\frac{\pi}{7}$ este irațional.

Mircea Lascu

Proba de raționament, clasele XI—XII

1. Notăm cu $\mathscr{X}$ familia submulțimilor lui $\mathbb{N}^*$ caracterizată prin proprietatea:

$A \in \mathscr{X} \Leftrightarrow$ există limita $P(A) = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{|A \cap \{1, 2, \ldots, n\}|}{n}$.

a) Să se demonstreze că:

1. $\emptyset \in \mathscr{X}$, $\mathbb{N}^* \in \mathscr{X}$, $P(\emptyset) = 0$, $P(\mathbb{N}^*) = 1$.
2. Pentru orice $A \in \mathscr{X}$, avem $0 \leqslant P(A) \leqslant 1$.
3. Pentru orice $A, B \in \mathscr{X}$ cu $A \cap B = \emptyset$, avem $A \cup B \in \mathscr{X}$ și

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B).$$

4. Pentru orice $A, B \in \mathscr{X}$ cu $A \cap B \in \mathscr{X}$, avem $A \cup B \in \mathscr{X}$ și

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

b) Pentru fiecare $k \in \mathbb{N}^*$ notăm cu p_k al k-lea număr prim pozitiv și considerăm mulțimile $A_k = \{x \in \mathbb{N}^* | x \text{ este multiplu de } p_k\}$, $B_k = \bigcup\limits_{i=1}^{k} A_i$. Să se arate că:

1) Pentru orice $k \in \mathbb{N}^*$ avem $A_k \in \mathscr{X}$ și $P(A_k) = \frac{1}{p_k}$.

2) Pentru orice $k_1 < k_2 < \ldots < k_s$ avem $A_{k_1} \cap A_{k_2} \cap \ldots \cap A_{k_s} \in \mathscr{X}$ și

$$P(A_{k_1} \cap A_{k_2} \cap \ldots \cap A_{k_s}) = \frac{1}{p_{k_1} p_{k_2} \ldots p_{k_s}}.$$

3) Pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$ avem $B_n \in \mathscr{X}$ și $P(B_n) = 1 - \left(1 - \frac{1}{p_1}\right)\left(1 - \frac{1}{p_2}\right)\ldots\left(1 - \frac{1}{p_n}\right)$.

c) Să se demonstreze că:

1. $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} B_n \in \mathscr{X}$ și $P\left(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} B_n\right) = \lim\limits_{n\to\infty} P(B_n) = 1$.

2. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1 - \frac{1}{p_1}\right)\left(1 - \frac{1}{p_2}\right)\ldots\left(1 - \frac{1}{p_n}\right) = 0$.

3. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \ldots + \frac{1}{p_n}\right) = +\infty$.

Marcel Țena

2. Fie $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o funcție continuă și periodică și notăm $m = \inf\limits_{x\in\mathbb{R}} f(x)$, $M = \sup\limits_{x\in\mathbb{R}} f(x)$

a) Să se demonstreze că funcția $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definită prin

$$g(x) = \begin{cases} f\left(\frac{1}{x}\right), & \text{dacă } x \in \mathbb{R}\setminus\{0\} \\ a, & \text{dacă } x = 0 \end{cases}$$

are proprietatea lui *Darboux* dacă și numai dacă $a \in [m, M]$.

b) Dacă, în plus, funcția f admite o primitivă mărginită, să se demonstreze că funcția g admite primitive dacă și numai dacă $a = 0$.

Ion Pîrșe, profesor, Cîmpulung Muscel

Scanned with OKEN Scanner

3. Să se calculeze:

$$I = \int_{-1}^{1} x \ln (1 + 2^x + 3^x + 6^x)\, dx.$$

Liviu Pîrșan

Proba de tehnică, clasele XI—XII

1. Fie $\alpha > 0$ fixat și să considerăm șirul $(u_n)_{n \geq 1}$ definit prin $u_1 = 1$, $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{(n+1)^\alpha}$, pentru $n \geq 1$. Se cere:

a) Dacă $0 < \alpha < 1$, să se demonstreze că pentru orice $\lambda > 0$ avem

$$u_n > \lambda, \text{ pentru } n > [1 + \lambda(1 - \alpha)]^{\frac{1}{1-\alpha}} - 1.$$

b) Dacă $\alpha = 1$, să se demonstreze că pentru orice $\lambda > 0$ avem

$$u_n > \lambda, \text{ pentru } n > e^\lambda - 1.$$

c) Dacă $\alpha > 1$, să se demonstreze că șirul $(u_n)_{n \geq 1}$ este mărginit superior.

d) Să se discute convergența șirului $(u_n)_{n \geq 1}$ după valorile lui α și să se demonstreze că în cazul cînd $\alpha > 1$, notînd $u = \lim_{n \to \infty} u_n$, avem inegalitățile:

$$\frac{1}{\alpha - 1} < u < 1 + \frac{1}{\alpha - 1}.$$

Acad. N. Teodorescu

2. Fie polinomul $P(X) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_{2n+1}^{2k+1} (1 - X^2)^{n-k} X^{2k+1}$, $n \in \mathbb{N}^*$.

a) Să se demonstreze că:

1. $P(\sin \alpha) = \sin (2n + 1)\alpha$;

2. $P(X) = (-1)^n 2^{2n} \cdot X \cdot \prod_{k=1}^{n} \left(X^2 - \sin^2 \frac{k\pi}{2n+1} \right)$.

b) Să se stabilească identitățile:

1. $\prod_{k=1}^{n} \sin \frac{k\pi}{2n+1} = \frac{\sqrt{2n+1}}{2^n}$;

2. $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sin^2 \frac{k\pi}{2n+1}} = \frac{2}{3} n(n+1)$;

3. $\sum_{k=1}^{n} \operatorname{ctg}^2 \frac{k\pi}{2n+1} = \frac{1}{3} n(2n-1)$.

c) Notînd $S_n = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{n^2}$, să se arate că

$$\frac{\pi^2}{6} \left(1 - \frac{6n+1}{(2n+1)^2} \right) < S_n < \frac{\pi^2}{6} \left(1 - \frac{1}{(2n+1)^2} \right)$$

și să se calculeze $\lim_{n \to \infty} S_n$.

(Parabola)

Scanned with OKEN Scanner

3. Se consideră o funcție $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ continuă și cu proprietatea că există $n\in\mathbb{N}^*$ astfel încît $\int_a^b x^k f(x)dx=0$, pentru $k=0,1,2,\ldots,n-1$, iar $\int_a^b x^n f(x)dx=1$. Să se demonstreze că există $c\in[a,b]$ astfel încît $f(c)=\dfrac{n+1}{(b-a)^{n+1}}$.

Mihaela Predescu

Concluzii și aprecieri

În fiecare an încercăm să aducem perfecționări concursului nostru și să facem cît mai plăcută participarea concurenților la tabără. În ceea ce privește probele de concurs și miniconcurs, căutăm să avem o tematică de conținut și care să pună în lumină calitățile de fond ale concurenților. Pornind de la diferențele între modul în care concepem noi concursurile și modul în care sînt concepute alte concursuri matematice, am ajuns la concluzia că adevăratele criterii de valoare se evidențiază prin probe de *probleme de sinteză*. Într-o astfel de probă se poate include într-o singură problemă metode și tehnici multiple care fac dovada stăpînirii a întregii discipline din care a fost aleasă, dar și a altor discipline anexe. O problemă de sinteză este o probă de maturitate și de autonomie în gîndire.

De aceea, în ediția de anul acesta au fost date cu precădere probleme de sinteză. Am constatat că astfel de probleme ocupă timp de patru ore și pe vedetele olimpice, care în alte împrejurări termină probele în jumătate din timpul acordat. De asemenea, am constatat că redactări îngrijite pentru soluții excelente sînt rare, deci redactarea lasă de dorit și la vîrfurile prestigioase, ceea ce se va vedea și în activitățile lor viitoare.

În concluzie, concursul din acest an aduce un surplus de exigență, care este în avantajul viitor al concurenților în carierele spre care se îndreaptă.

Rezultatele generale sînt bune la clasele XI—XII și foarte bune la unii concurenți din clasele IX—X, ceea ce ne dă speranțe frumoase pentru edițiile viitoare.

O altă inovație este organizarea unei a doua părți a Concursului anual al rezolvitorilor pentru premianții acestuia și ai altor concursuri. Această a doua parte a fost organizată la Mangalia pentru premianții concursului nostru, ai olimpiadei naționale, pentru componenții echipelor noastre la olimpiada internațională din Australia și la balcaniada din Cipru, de asemenea pentru premianții latură ai concursurilor interjudețene.

Și această a doua parte a concursului nostru a cunoscut un frumos succes, fiind organizată pe principii analoage, partea întîi bucurîndu-se de o participare satisfăcătoare, deși nu a avut publicitate suficientă. Aceasta dovedește adeziunea celor mai valoroși concurenți la Concursul anual al rezolvitorilor Gazetei Matematice.

A 29-a OLIMPIADĂ INTERNAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ, CANBERRA, 9 — 21 IULIE 1988

de lector dr. Mircea Becheanu

A 29-a Olimpiadă Internațională de Matematică s-a desfășurat în Australia, localitatea Canberra, în perioada 9—21 iulie 1988. După olimpiadele din 1981 (Washington, S.U.A.) și din 1987 (Havana, Cuba) aceasta a fost a treia olimpiadă organizată în afara continentului european și prima în zona Pacificului și Asiei de Sud-Est. O asemenea oportunitate favorizează lărgirea cercului de țări participante la competiție. Astfel se explică faptul că în acest an s-a înregistrat un număr record de 49 țări participante cu elevi în competiție, la care s-au adăugat opt țări care au participat în calitate de observatori. Țara noastră a fost reprezentată în competiție de o echipă formată din următorii șase elevi: *Adrian Vasiu* (Liceul de matematică-fizică nr. 2 din Cluj-Napoca), *Nicușor Dan* (Liceul industrial „Radu Negru" din Făgăraș), *Andrei Rădulescu-Banu* (Liceul de matematică-fizică „Mihai Viteazu" din București), *Octavian Fărcășanu* (Liceul de matematică-fizică „N. Bălcescu" din Craiova), *Andrei Moroianu* (Liceul de matematică-fizică nr. 1 din București) și *Florin Belgun* (Liceul de matematică-fizică „N. Bălcescu" din București). Conform tradiției, concursul s-a desfășurat sub forma a două lucrări scrise de cîte 4 ore și 30 minute în care s-a cerut concurenților să rezolve cîte trei probleme, fiecare problemă fiind cotată cu cîte 7 puncte. Elevii *Adrian Vasiu* și *Nicușor Dan* au avut o comportare remarcabilă realizînd numărul maxim de 42 puncte

Scanned with OKEN Scanner

ce putea fi obținut de un concurent, performanță obținută doar de încă trei concurenți (cîte unul din U.R.S.S., R. P. Chineză și R. P. D. Vietnam). În acest fel ei au obținut premiul I și medalia de aur. Ceilalți patru concurenți au avut de asemenea o comportare foarte bună obținînd premiul al doilea și medalia de argint. Pe echipe, țara noastră a obținut 201 puncte, clasîndu-se pe locul al doilea împreună cu echipa R. P. Chineze (201 puncte), locul întîi revenind echipei Uniunii Sovietice cu 217 puncte. Pe locurile 4—10 s-au clasat în ordine următoarele echipe: R. F. Germania (174 puncte), R.P.D. Vietnam (166 puncte), S.U.A. (153 puncte), R.D. Germania (145 puncte), R. P. Bulgaria (144 puncte), Franța (128 puncte), Canada (124 puncte).

În cele ce urmează vom prezenta cele șase probleme care au fost puse elevilor în timpul competiției.

Ziua întîi (15 iulie 1988)

Problema 1. *Se consideră două cercuri coplanare de raze R și r ($R > r$) și avînd același centru. Fie P un punct fix pe cercul de rază r și B un punct variabil pe cercul de rază R. Dreapta BP mai intersectează cercul de rază R într-un punct C. Perpendiculara l dusă în P pe BP mai intersectează cercul de rază r în A (dacă l este tangenta la cerc în P, atunci $A = P$).*

(I) Să se găsească mulțimea valorilor sumei $BC^2 + CA^2 + AB^2$.

(II) Să se găsească locul geometric al mijloacelor segmentelor AB.

(Problemă propusă de Luxemburg)

Soluție. (I) Fie O centrul celor două cercuri. Notînd cu t măsura unghiului $\widehat{OPA}$ se obține $PA = 2r\cos t$. Fie N mijlocul segmentului BC; atunci

$$BP = BN + PN = \sqrt{R^2 - r^2\cos^2 t} + r\sin t,$$

$$PC = GN - NP = BN - NP = \sqrt{R^2 - r^2\cos^2 t} - r\sin t$$

(eventual, valorile se inversează în funcție de poziția lui N față de B și P). Suma dată este

$$S = BC^2 + CA^2 + AB^2 = (BP + PC)^2 + PA^2 + PC^2 + BP^2 + PA^2 =$$

$$= 2(PA^2 + PB^2 + PC^2 + PB\cdot PC).$$

Din puterea punctului P avem $PB\cdot PC = R^2 - r^2$. Înlocuind expresiile obținute mai sus în S avem

$$S = 2[4r^2\cos^2 t + 2(R^2 - r^2\cos^2 t + r^2\sin^2 t) + R^2 - r^2] = 6R^2 + 2r^2.$$

Deci suma $S = BC^2 + CA^2 + AB^2$ este constantă și egală cu $6R^2 + 2r^2$.

(II) Dacă se duce o paralelă prin A la dreapta variabilă BC și se notează cu B', C' intersecțiile sale cu cercul de rază R atunci $APBB'$ este un dreptunghi în care mijlocul M al segmentului AB coincide cu mijlocul lui PB'. Cînd B parcurge cercul de rază R, B' parcurge același cerc. În consecință, locul punctului M este transformatul prin omotetia de centru P și raport 1/2 a cercului de centru O și rază R. Notînd cu P' mijlocul segmentului OP se obține că locul geometric al lui M este cercul de centru P' și rază $\frac{R}{2}$.

Problema 2. *Fie n un întreg strict pozitiv și fie $A_1, A_2, \ldots, A_{2n+1}$ submulțimi ale unei mulțimi B. Se presupune că:*

(a) Fiecare mulțime A_i are exact $2n$ elemente;

(b) Pentru orice pereche (i, j), $1 \leqslant i < j \leqslant 2n + 1$, $A_i \cap A_j$ conține exact un element;

(c) Orice element al lui B aparține la cel puțin două din mulțimile A_i.

Pentru ce valori ale lui n se poate asocia fiecărui element din B unul din numerele 0 sau 1 astfel încît în fiecare mulțime A_i să se găsească exact n elemente la care s-a asociat numărul 0?

(Problemă propusă de R. S. Cehoslovacia).

Soluție. Începem prin a observa că din (c) rezultă $B = \bigcup_{i=1}^{2n+1} A_i$. Prima parte a problemei constă în a arăta că dacă n este astfel încît există o configurație de mulțimi $(A_i)_{1 \leqslant i \leqslant 2n+1}$

Scanned with OKEN Scanner

care îndeplinesc condițiile (a), (b), (c) și dacă există o funcție $f: B \to \{0, 1\}$ astfel încît $|f^{-1}(0) \cap A_i| = n$, atunci n este par. Aceasta se demonstrează în doi pași.

Mai întîi se arată că în condițiile (a) și (b) avem (c) $\Leftrightarrow$ (c*), unde (c*) este afirmația:

(c*) Orice element al lui B aparține la exact două din mulțimile A_i.

Aceasta se demonstrează astfel: observăm mai întîi că pentru orice $i = 1, \ldots, 2n+1$ are loc egalitatea

(1) $$A_i = \bigcup_{j \neq i} (A_j \cap A_i).$$

Într-adevăr, incluziunea „$\supseteq$" este trivială, iar incluziunea contrară „$\subset$" rezultă din (c). Demonstrăm acum (c*) prin reducere la absurd: fie $x \in A_i \cap A_j \cap A_k$. Din (b) rezultă că $(A_i \cap A_j) \cup (A_i \cap A_k) = \{x\}$. Din formula (1) și din condițiile (a) și (b) rezultă:

$$2n = |A_i| \leqslant |(A_i \cap A_j) \cup (A_i \cap A_k)| + \sum_{l \neq i, j, k} |A_i \cap A_l| = 1 + (2n - 2) = 2n - 1,$$

ceea ce este absurd. Rezultă că afirmația (c*) este adevărată.

Al doilea pas: se arată că în condițiile (a), (b), (c*), dacă există o funcție $f: B \to \{0, 1\}$ astfel încît $|f^{-1}(0) \cap A_i| = n$, atunci n este par. Conform principiului includerii și excluderii, în care se ține seama de condiția (c*), avem:

$$|B| = \sum_{i=1}^{2n+1} |A_i| - \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant 2n+1} |A_i \cap A_j| = 2n(2n+1) - \frac{1}{2} \cdot 2n(2n+1) = n(2n+1).$$

Funcției f date i se poate atașa o matrice pătratică și simetrică de ordin $2n+1$, $B_f = (b_{ij})$ în modul următor:

$$b_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{dacă } i = j \\ f(a_{ij}) \text{ dacă } & i \neq j \text{ și } A_i \cap A_j = \{a_{ij}\}. \end{cases}$$

Atunci suma elementelor lui B_f pe fiecare linie este n, deci suma elementelor lui B_f este $n(2n+1)$. Această sumă este evident egală cu $2\sum_{x \in B} f(x)$, căci valoarea fiecărui element $x \in B$ se ia în matrice de două ori. Din cele de mai sus rezultă că n este par.

A doua parte a problemei constă în a demonstra că dacă $n = 2k$ este un număr par atunci există o configurație de mulțimi $A_1, \ldots, A_{2n+1}$ care îndeplinesc condițiile (a), (b), (c*) și o funcție $f: B \to \{0, 1\}$ astfel încît $|f^{-1}(0) \cap A_i| = n$, $(\forall) i = 1, \ldots, 2n+1$. Dintre soluțiile date acestei afirmații remarcăm următoarele trei construcții date de componenți ai echipei noastre.

Soluția elevului *Adrian Vasiu* se bazează pe o bună cunoaștere a teoriei grafurilor. Dacă se consideră un graf complet neorientat cu $2n+1$ vîrfuri, fie acestea notate cu $1, 2, \ldots, 2n+1$, atunci mulțimile A_i formate din muchiile grafului ce pornesc din vîrful i, $1 \leqslant i \leqslant 2n+1$, constituie o configurație de mulțimi ce îndeplinesc condițiile (a), (b), (c*). În plus, pentru această construcție nu este necesar ca n să fie par. În cazul $n = 2k$ se construiește funcția $f: B \to \{0, 1\}$ care să îndeplinească condițiile cerute printr-un ingenios raționament geometric. Se consideră că cele $2n+1 = 4k+1$ vîrfuri ale grafului sînt vîrfurile unui poligon regulat de laturi 1, fie el $P_1 P_2 \ldots P_{4k+1}$. Atunci muchiile grafului sînt laturile și diagonalele poligonului. Vom numi lungime a unei muchii $P_i P_j$ lungimea drumului de la P_i la P_j, în sens trigonometric, pe conturul poligonului, $i < j$. În acest fel, pentru fiecare vîrf P_i vor exista $2k$ diagonale (muchii) de lungime mai mare decît $k+1$ și $2k$ diagonale de lungime mai mică decît $k+1$. Atașăm fiecărei diagonale numărul 0 dacă lungimea sa este mai mare decît $k+1$ și numărul 1 dacă lungimea sa este mai mică decît $k+1$. Funcția astfel definită îndeplinește condițiile cerute.

Soluția elevului *Nicușor Dan* este similară cu soluția autorului problemei. Fie $A = (a_{ij})$ o matrice pătratică simetrică de ordin $2n+1$ cu elemente numere reale, distincte două cîte două pentru $i \leqslant j$. Definim mulțimile

$A_1 = \{a_{11}, a_{12}, a_{13}, \ldots, a_{12n}\}$

$A_2 = \{a_{11}, a_{22}, a_{23}, \ldots, a_{2,2n}\}$

$A_3 = \{a_{11}, a_{22}, a_{33}, \ldots, a_{3,2n}\}$

$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$A_{2n} = \{a_{11}, a_{22}, a_{33}, \ldots, a_{2n,2n}\}$

$A_{2n+1} = \{a_{22}, a_{23}, a_{24}, \ldots, a_{2,2n}\} = \{a_{12}, a_{21}, a_{32}, \ldots, a_{2n,2}\}.$

Scanned with OKEN Scanner

Acestea reprezintă o configurație de $2n+1$ mulțimi care îndeplinesc condițiile (a), (b), (c*). În cazul n par, $n = 2k$, să considerăm matricea

$$T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in M_4(\mathbb{R}).$$

Dacă asociem fiecărui element a_{ij} al matricei A numărul 0 sau 1 astfel încît matricea A să devină prin această funcție matricea cu elemente 0 sau 1 definită prin $k \times k$ celule egale cu T,

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} T & \dots & T \\ \dots & \dots & \dots \\ T & \dots & T \end{pmatrix}$$

atunci funcția astfel obținută îndeplinește condiția: $|f^{-1}(0) \cap A_i| = n$.

A treia soluție aparține elevului *Andrei Moroianu* și ca reprezintă o variantă simplificată a soluției precedente, ca urmare a unei fine observații asupra configurației de mulțimi A_i, $1 \leqslant i \leqslant 2n+1$. În condițiile (a), (b), (c*) să notăm cu a_{ij} elementul unic al mulțimii $A_i \cap A_j$. Atunci mulțimea elementelor a_{ij} cu $i \neq j$ constituie elementele unei matrice simetrice cu $2n+1$ linii și coloane în care diagonala principală a fost suprimată. Considerăm că fiecărui element a_{ij}, $1 \leqslant i, j \leqslant 2n+1$, al acestei matrice i se asociază 0 sau 1 astfel încît să se obțină matricea

1_k	1_k	$\begin{matrix}1\\1\\\vdots\\1\end{matrix}$	0_k	0_k
1_k	0_k	$\begin{matrix}0\\\vdots\\0\end{matrix}$	0_k	0_k
$11\dots1$	$00\dots0$	0	$00\dots0$	$11\dots1$
0_k	1_k	$\begin{matrix}0\\\vdots\\0\end{matrix}$	0_k	1_k
0_k	0_k	$\begin{matrix}1\\\vdots\\1\end{matrix}$	1_k	1_k

în care 1_k (respectiv 0_k) este matricea pătratică de ordinul k în care toate elementele sînt egale cu 1 (respectiv cu 0). Se obține astfel o funcție f convenabilă.

Problema 3. *Se notează cu f funcția definită pe mulțimea numerelor întregi strict pozitive cu valori în aceeași mulțime, astfel încît $f(1) = 1$, $f(3) = 3$ și pentru orice $n \geqslant 1$,*

$$f(2n) = f(n)$$

$$f(4n+1) = 2f(2n+1) - f(n)$$

$$f(4n+3) = 3f(2n+1) - 2f(n).$$

Să se determine numărul de întregi n, $1 \leqslant n \leqslant 1988$, pentru care $f(n) = n$.

(Problemă propusă de Marea Britanie)

Soluție. Problema se rezolvă în doi pași.

Primul pas constă în determinarea explicită a funcției f. Din ipoteză rezultă prin inducție că $f(2^k) = 1$, $f(2^k - 1) = 2^k - 1$, $f(2^k + 1) = 2^k + 1$. Aceste rezultate parțiale impun

Scanned with OKEN Scanner

să se considere scrierea binară a lui n: $n = \overline{a_k a_{k-1} \ldots a_1 a_0} = a_k 2^k + a_{k-1} 2^{k-1} + \ldots + a_1 \cdot 2 + a_0$, $a_i \in \{0, 1\}$, $i = 0, 1, \ldots, k$. Vom demonstra că

$$(*) \qquad f(n) = \overline{a_0 a_1 \ldots a_{k-1} a_k}$$

cu convenția că dacă în (*) eventuale cifre binare inițiale sînt zero acestea nu se consideră. Demonstrația se face prin inducție după n. Dacă n este par, atunci în dezvoltarea $n = \overline{a_k a_{k-1} \ldots a_1 a_0}$ avem $a_0 = 0$ și $n = 2m$ unde $m = \overline{a_k a_{k-1} \ldots a_2 a_1}$. Din ipoteză rezultă că $f(n) = f(m) = a_1 a_2 \ldots a_{k-1} a_k = a_0 a_1 a_2 \ldots a_{k-1} a_k$. Dacă $n = 4m + 1$ rezultă că $a_1 = 0$, $a_0 = 1$ și conform ipotezei avem: $f(n) = f(4m + 1) = f(4 \cdot \overline{a_k a_{k-1} \ldots a_2} + 1) = 2f(\overline{a_k a_{k-1} \ldots a_2 1}) - f(\overline{a_k a_{k-1} \ldots a_2}) = 1 a_2 \ldots a_{k-1} a_k 0 - a_2 \ldots a_{k-1} a_k = \overline{100 \ldots 0}_{k \text{ ori}} + 2 \cdot a_2 \ldots a_{k-1} a_k - a_2 \ldots a_{k-1} a_k =$

$= \overline{100 \ldots 0}_{3 \text{ ori}} + \overline{a_2 \ldots a_k} = \overline{10 a_2 \ldots a_k}$, ceea ce demonstrează (*) în acest caz.

Dacă $n = 4m + 3$ atunci $a_1 = a_0 = 1$, deci $n = \overline{a_k a_{k-1} \ldots a_2 11}$; deci $f(n) = f(4 \cdot \overline{a_k a_{k-1} \ldots a_2} + 3) = 3f(\overline{a_k a_{k-1} \ldots a_2 1}) - 2f(\overline{a_k a_{k-1} \ldots a_2}) = 3 \cdot \overline{1 a_2 \ldots a_{k-1} a_k} - 2 \cdot \overline{a_2 \ldots a_{k-1} a_k} = \overline{3 \cdot 10 \ldots 0}_{k-1 \text{ ori}} +$

$+ \overline{3 \cdot a_2 a_3 \ldots a_{k-1} a_k} - \overline{2 \cdot a_2 \ldots a_{k-1} a_k} = \overline{1100 \ldots 0}_{k-1 \text{ ori}} + \overline{a_2 \ldots a_{k-1} a_k} = \overline{11 a_2 \ldots a_{k-1} a_k}$, ceea ce demonstrează (*) în acest caz.

Pasul al doilea constă în numărarea punctelor fixe ale lui f, cerute de problemă. Se observă că $f(n) = n$ dacă și numai dacă în scrierea binară a lui n, $n = \overline{a_k a_{k-1} \ldots a_1 a_0}$, avem $a_0 = a_k$, $a_1 = a_{k-1}, \ldots$ sau în general, $a_i = a_{k-i}$, $0 \leqslant i \leqslant \left[\frac{k}{2}\right]$. Asemenea numere se numesc numere palindromice (în reprezentarea binară). Deci trebuie determinate numerele palindromice mai mici decît 1988. Observăm că $2^{10} < 1988 < 2^{11}$ iar reprezentarea binară a lui 1988 este $1988 = \overline{11111000100}$. Un număr palindromic ce conține $2k$ cifre binare este perfect determinat de primele k cifre, care pot fi alese în 2^{k-1} moduri distincte (deoarece prima cifră este în mod obligatoriu egală cu 1). În cazul nostru numărul numerelor palindromice cu 2, 4, 6, 8 sau 10 cifre este $2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^4 = 31$. Un număr palindromic cu $2k + 1$ cifre binare depinde de $k - 1$ cifre, începînd cu a doua cifră, și de cifra $k + 1$, deci numărul lor este 2^k. În cazul nostru, numărul numerelor palindromice cu 1, 3, 5, 7, 9 sau 11 cifre binare este $1 + 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5 = 63$. Dar numerele palindromice cu 11 cifre binare $\overline{11111011111}$ și $\overline{11111111111}$ îl depășesc pe 1988, deci nu trebuie numărate. Deci răspunsul la problemă este: există $31 + 63 - 2 = 92$ numere mai mici ca 1988 astfel încît $f(n) = n$.

Ziua a doua (16 iulie 1988)

Problema 4. *Arătați că mulțimea numerelor reale x care verifică inecuația*

$$\sum_{k=1}^{70} \frac{k}{x - k} \geqslant \frac{5}{4}$$

este o reuniune de intervale disjuncte care au suma lungimilor egală cu 1988.

(Problemă propusă de Irlanda)

Soluție. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \setminus \{1, \ldots, 70\} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \sum_{k=1}^{70} \frac{k}{x - k}.$$

Se observă că f este strict descrescătoare pe domeniul său de definiție și că $\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0$, $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$, iar $\lim_{x \searrow k} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \nearrow k} f(x) = +\infty$ oricare ar fi $k = 1, \ldots, 70$. Deoarece f este o funcție continuă rezultă că $f(x) \geqslant \frac{5}{4}$ dacă și numai dacă x aparține reuniunii de intervale

$(1, x_1] \cup (2, x_2] \cup \ldots \cup (70, x_{70}]$ în care $1 < x_1 < 2 < x_2 < \ldots < x_{69} < 70 < x_{70}$, iar $x_1, x_2, \ldots, x_{70}$ sînt rădăcinile ecuației $f(x) = \frac{5}{4}$. Această ecuație este însă echivalentă cu ecuația polinomială

$$5(x-1)\ldots(x-70) - 4\sum_{k=1}^{70} k \prod_{j \neq k} (x-j) = 0.$$

Suma lungimilor intervalelor găsite este $S = \sum_{k=1}^{70} (x_k - k) = \sum_{k=1}^{70} x_k - \sum_{k=1}^{70} k$. Suma $\sum_{k=1}^{70} x_k$ se găsește din ecuația polinomială cu ajutorul relațiilor lui *Viète*: $\sum_{k=1}^{70} x_k = \sum_{k=1}^{70} k + \frac{4}{5}\sum_{k=1}^{70} k$. Deci

$$S = \frac{4}{5}\sum_{k=1}^{70} k = 1988.$$

Problema 5. *Fie ABC un triunghi dreptunghic în A și fie D piciorul înălțimii dusă din A. Dreapta care unește centrele cercurilor înscrise în triunghiurile ABD și ACD intersectează laturile AB și AC respectiv în punctele K și L. Dacă notăm cu S și T, respectiv, ariile triunghiurilor ABC și AKL, să se arate că $S \geqslant 2T$.*

(Problemă propusă de Grecia)

Soluție. În concepția juriului această problemă a fost considerată de dificultate medie. Soluția oficială a problemei se baza fundamental pe conceptul de asemănare. Iată această soluție: Fie $\mathcal{C}(O_1, r_1)$, respectiv $\mathcal{C}(O_2, r_2)$, cercul înscris în triunghiul ABD, respectiv ADC, și $\mathcal{C}(O, r)$ cercul înscris în triunghiul ABC. Cu notațiile obișnuite avem $S = rp = \frac{bc}{2}$. Din asemănările $\Delta ABC \sim \Delta ABD \sim \Delta ADC$ și ținînd seama de rapoartele de asemănare rezultă că $r_1 = r\frac{c}{a}$, $r_2 = r\frac{b}{a}$. Ținînd seama că O_1D și O_2D sînt bisectoare rezultă că $O_1D = r_1\sqrt{2} = \sqrt{2}\,r\frac{c}{a}$, $O_2D = \sqrt{2}\,r\frac{b}{a}$. În plus, triunghiul O_1DO_2 este dreptunghic. Din egalitatea de rapoarte $\frac{O_1D}{O_2D} = \frac{r_1}{r_2} = \frac{c}{b}$ rezultă că $\Delta O_1DO_2 \sim \Delta ABC$! (Iată un rezultat care merită reținut !)

Din această asemănare rezultă că unghiurile $\widehat{O_2O_1D}$ și $\widehat{ABD}$ sînt congruente. În consecință, patrulaterul BKO_1D este inscriptibil, măsura unghiului $\widehat{AKL}$ este de 45° și deci $AK = AL$. În plus, din congruența, acum evidentă, a triunghiurilor AKO_1 și AO_1D rezultă că $AK = AD$. Atunci $T = \frac{1}{2}AD^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{bc}{a}\right)^2$. Inegalitatea cerută revine la: $\frac{1}{2}bc \geqslant 2\cdot\frac{1}{2}\left(\frac{bc}{a}\right)^2 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow a^2 \geqslant 2bc \Leftrightarrow b^2 + c^2 \geqslant 2bc$, inegalitate care este evidentă.

După cum se vede din soluția de mai sus, problema cere o analiză atentă a construcției geometrice dată prin ipoteză și desfășurarea unor raționamente oarecum indirecte. În general, această problemă a creat dificultăți neașteptate componenților echipei noastre. Unii dintre ei au tăiat „nodul gordian" prezentînd o soluție analitică. Aceasta este o idee bună, deoarece nu cere decît o alegere bună a axelor de coordonate, după care ecuația dreptei KL se scrie ușor. În mod natural se va alege una din axe ipotenuza BC iar cealaltă axă înălțimea AD.

Elevul *Florin Belgun* a găsit însă o soluție originală pur sintetică a acestei probleme. Prin considerente simple de unghiuri se arată că $CO_2 \perp AO_1$ și că $BO_1 \perp AO_2$. Rezultă că O este ortocentrul triunghiului AO_1O_2 (și acest rezultat merită reținut!) și deci bisectoarea AO este perpendiculară pe dreapta KL. În concluzie, triunghiul AKL este isoscel. Apoi, $\Delta AKO_1 \equiv \Delta AO_1D$, ... și soluția se continuă ca mai sus.

Problema 6. *Fie a și b două numere întregi strict pozitive astfel încît $ab + 1$ divide pe $a^2 + b^2$. Arătați că $\frac{a^2 + b^2}{ab + 1}$ este un pătrat perfect.*

(Problemă propusă de R. F. Germania)

Scanned with OKEN Scanner

Soluție. Spunem că perechea de numere întregi (x, y) este un q-cuplu dacă $xy + 1$ divide $x^2 + y^2$ și $\frac{x^2 + y^2}{xy + 1} = q$. În mod echivalent, dacă q este un număr întreg atunci un q-cuplu este o soluție în numere întregi a ecuației diofantice

$$x^2 - qxy + y^2 = q. \tag{1}$$

Să observăm că dacă există $y \in \mathbf{Z}$ astfel încît $(0, y)$ este un q-cuplu, atunci q este un pătrat perfect.

Fie (a, b) un q-cuplu cu $a > 0$, $b > 0$. Putem presupune că $q > 2$ și că $a \leqslant b$. Scriem pe b sub forma $b = qa + r$, $r \in \mathbf{Z}$. Înlocuind această egalitate în ecuația diofantică obținem

$$a^2 - qab + b^2 = q \tag{2}$$

de unde rezultă egalitatea

$$a^2 + qar + r^2 = q \tag{3}$$

care dovedește că $(-r, a)$ este un q-cuplu. Din (3) mai avem:

$$a^2 + r^2 = -qar + q > 0 \Rightarrow qar < q \Rightarrow r \leqslant 0.$$

Dacă $r = 0$ demonstrația se încheie. În caz că $r < 0$ din $b = qa + r$ rezultă $-r = qa - b$ Vom arăta că $-r < a$. Dar

$$-r < a \Leftrightarrow qa < b + a \Leftrightarrow q < 1 + \frac{b}{a}.$$

Într-adevăr, $q = \frac{a^2 + b^2}{ab + 1} < \frac{a^2 + b^2}{ab} = \frac{a}{b} + \frac{b}{a} \leqslant 1 + \frac{b}{a}$. Din faptul că $(-r, a)$ este un q-cuplu cu $0 \leqslant -r < a$ rezultă că prin repetarea raționamentului de mai sus, în caz că $r \neq 0$, putem construi un nou q-cuplu în care primul element al perechii scade strict, și aceasta se poate face doar de un număr finit de ori pînă se ajunge la un q-cuplu cu primul element nul, deci q este un pătrat perfect.

Observație. Soluția prezentată mai sus constituie o contribuție interesantă la studiul ecuației diofantice (1). În această soluție este fundamental utilizată metoda coborîrii: pornind de la soluția pozitivă (a, b) se construiește o nouă soluție (a', b') cu $0 \leqslant a' < a = b'$, ș.a.m.d. Această metodă era cunoscută elevilor de la cea de a 22-a olimpiadă (Washington, 1981) unde a fost folosită la studiul ecuației diofantice (problema 3) $x^2 - xy - y^2 = \pm 1$.

Elevul *Adrian Vasiu* a dat în timpul concursului o soluție diferită, bazată în esență tot pe metoda coborîrii, dar în care noua soluție se fabrică prin proprietăți ale divizorilor unui număr de forma $N = n^4 + 1$. Iată soluția sa:

Presupunem prin absurd că există o pereche (a, b) de numere naturale astfel încît $\frac{a^2 + b^2}{ab + 1} = q \in \mathbf{N}^*$ și q nu este un pătrat perfect. Alegem o asemenea pereche cu a minim. Atunci

$$\frac{a^2 + b^2}{ab + 1} = q \Rightarrow \frac{a^4 + a^2b^2}{ab + 1} = a^2q \in \mathbf{N}^* \Rightarrow ab - 1 + \frac{a^4 + 1}{ab + 1} \in \mathbf{N}^* \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{a^4 + 1}{ab + 1} = c \in \mathbf{N}^* \Rightarrow a^4 + 1 = c(ab + 1) \Rightarrow a|c - 1 \Rightarrow c = ad + 1.$$

Dacă $d = 0$ atunci $c = 1 \Rightarrow a^4 + 1 = ab + 1 \Rightarrow a^3 = b \Rightarrow q = a^2$, contradicție! Deci $d \neq 0$. Atunci $a^4 + 1 = (ab + 1)(ad + 1) \Rightarrow ad + 1 | a^4 + 1 \Rightarrow ad + 1 | a^2d^2 + a^4$. Din $(ad + 1, a^2) = 1$ și $ad + 1 | a^2(a^2 + d^2)$ rezultă că $ad + 1 | a^2 + d^2$. În plus $ad + 1 = \frac{a^4 + 1}{ab + 1} \leqslant \frac{a^2 + 1}{a^2 + 1} < a^2 + 1 \Rightarrow 0 < d < a$. Dar $\frac{a^2 + d^2}{ad + 1} = \frac{a^2 + b^2}{ab + 1}$ deoarece:

$\frac{a^4 + a^2b^2}{ab + 1} = ab - 1 + c = ab - 1 + ad + 1 = ad - 1 + \frac{a^4 + 1}{ad + 1} = \frac{a^4 + a^2d^2}{ad + 1}$. Deoarece

$d < a$ și a a fost ales minim rezultă că $q = \frac{a^2 + d^2}{ad + 1}$ este pătrat perfect, ceea ce dă o contradicție.

Aceasta a fost cea mai grea problemă din concurs. Doar 11 concurenți au reușit să obțină punctajul maxim la această problemă, doi dintre ei fiind componenți ai echipei țării noastre.

Rezultatul foarte bun obținut de elevii români care ne-au reprezentat la această olimpiadă este o nouă confirmare a nivelului ridicat al învățământului în țara noastră, o expresie a condițiilor excelente de pregătire oferite acestor elevi talentați în cadrul general al organizării procesului instructiv-educativ. Felicitîndu-i pe elevi pentru rezultatele obținute se cuvine să adresăm felicitări și profesorilor lor precum și numeroaselor alte cadre didactice din învățămîntul liceal și superior care și-au adus o contribuție importantă la pregătirea lotului lărgit, la selecția și pregătirea echipei.

CONCURSUL ANUAL AL REZOLVITORILOR GAZETEI MATEMATICE (II) (PARTEA I, CÎMPULUNG MUSCEL, 10—22 AUGUST 1988, EDIȚIA A IX-A)

PREMIANȚII, COMISIA DE CONCURS ȘI VIAȚA DE TABĂRĂ

de Acad. N. Teodorescu

§ 1. Rezultatele miniconcursurilor și celor două probe de concurs

Cele două miniconcursuri s-au desfășurat într-o ambianță de avînt tinerese și au dovedit încă o dată adeziunea tineretului nostru matematic la competițiile pe echipe. Este remarcabil faptul că echipajele s-au format după preferințele concurenților avînd în parte un caracter regional. Astfel au fost alcătuite 6 echipaje, care s-au autointitulat:

1. Alba—Olt—Argeș; 2. Moldova; 3. Ardeal—Brăila; 4. București 1; 5. București 2; 6. București 3.

Testele pentru primul miniconcurs au fost propuse de membrii comisiei de concurs, pe cînd pentru cel de-al doilea, de fiecare echipaj pentru celelalte. Primul miniconcurs a fost cîștigat de echipajul Ardeal—Brăila, urmat de echipajul București 3, iar al doilea miniconcurs a fost cîștigat de asemenea de echipajul Ardeal—Brăila, urmat de echipajul București 1.

Probele de concurs au avut loc în zilele de 18 august și 19 august fiind compuse din cele două probleme obligatorii și una opțională pentru departajare. Condițiile concursului cer ca pentru premiul I să se obțină cel puțin 90% din punctajul maxim local de 100 puncte (cîte 25 puncte de fiecare problemă obligatorie), pentru premiul II, cel puțin 80%, iar pentru premiul III, cel puțin 70%.

În afară de concurs au fost premiați după criterii analoage cei mai buni concurenți, care au fost premiați la etapa a doua, fără a fi fost selecționați prin probleme rezolvate din G.M. în timpul anului școlar.

Rezultatele obținute la probele de concurs au fost următoarele:

Clasa a IX-a

Premiul I: *Popescu-Pampu Patrick*, Lic. mat. fiz. nr. 1 București (prof. *Martinov Armand*)
Premiul II și premiul special în tabără:
Bănică Teodor, Lic. mat. fiz. nr. 1 București (prof. *Martinov Armand*)
Premiul III: *Moroianu Sergiu*, Lic. mat. fiz. nr. 1 București (prof. *Martinov Armand*)
Menționi: *Ionescu Alexandru*, Lic. mat. fiz. nr. 1 București (prof. *Martinov Armand*)
Popescu Ioana, Lic. mat. fiz. nr. 1 București (prof. *Martinov A.*).
Crainic Marius. Lic. „Horia, Cloșca și Crișan" Alba Iulia (prof. *Pintilie Alexandru*)
Ștefănică Dan, Lic. ind. nr. 36 București (prof. *Bălineșu-Giurgiu D. M.*)
Dănilă Gențiana, Lic. mat. fiz. nr. 1 București (prof. *Martinov Armand.*)
Celeras Marius, Lic. „Horia Cloșca și Crișan" Alba Iulia (prof. *Bișboacă N.*)
Iliș Ioana, Lic. mat. fiz. Zalău (prof. *Tuduce Florin*).

Scanned with OKEN Scanner

Clasa a X-a

Premiul I și premiul special în tabără: *Beldiman Octavian*, Lic. „N. Bălcescu" București (prof. *M. Nicolae*)
Premiul II: *Vraciu Adela*, Lic. mat. fiz. nr. 4 București (prof. *M. Țena*)
Premiul III: *Căldăraru Andrei*, Lic. „N. Bălcescu" București (prof. *M. Nicolae*)
Menționi: *Tudorică Felix-Sava*, Lic. ind. 36 București (prof. *D. M. Bătinețu-Giurgiu* și prof. *Dumitru Gheorghiu*)
Vasile Diana, Lic. ind. nr. 4 Brăila (prof. *Moțoșan Petre*)

Clasa a XI-a

Premiul I: *Mareș Vlad*, Lic. „S. Haret" București (prof. *Alex. Constantinescu*)
Premiul II: *Udrea Călin*, Lic. „N. Bălcescu" Pitești (prof. *Ed. Minasian*)
Premiul III: *Bahrim Dragoș-Ciprian*, Lic. ind. nr. 4 Vaslui (prof. *Gh. Ciobanu*)
Menționi: *Bardaș Cătălin*, Lic ind. nr. 4 Brăila (prof. *Mihai Țarălungă*)
Stamate Dan, Lic. „N. Bălcescu" Pitești (prof. *Ed. Minasian*)

Clasa a XII-a

Premiul I: *Andrei Ștefan*, Lic. ind. Buhuși (prof. *Beleuz Gheorghe*)
Premiul II: *Gramatovici Radu*, Lic. „I. L. Caragiale" București (prof. *Pirșan Liviu*)
Premiul III: *Sava Andrei-Alexandru*, Lic. mat. fiz. nr. 1 București (prof. *Martinov Armand*)
Menționi: *Nicolau Dana*, Lic. mat. fiz. nr. 3 București (prof. *Calotă Monica*)
Tamas Csilla, Lic. „Petru Groza" Odorheiul Secuiesc (prof. *Kovacs Lajos*)
Suceavă Bogdan, Lic. „I. L. Caragiale" București (prof. *L. Pirșan*)
Bularda Florin, Lic. „C. Negruzzi" Iași (prof. *Nejneru Virginia*)

În afară de concurs

Premii: *Dan Nicușor*, cl. XII, Lic. „Radu Negru" Făgăraș (prof. *Cocoradă Sorin*)
Moroianu Andrei, cl. XI, Lic. mat. fiz. nr. 1 București (prof. *Martinov A.*)
Mențione: *Ionescu Mihai*, cl. XI, Lic. mat. fiz. nr. 1 București (prof. *Martinov A.*)

Se constată o creștere a numărului premianților și menționaților din clasa a IX-a, cu toate că regulamentul concursului cere concurenților să stăpînească și materia clasei a X-a.

O observație analoagă se cuvine să fie făcută și asupra rezultatelor concurenților din clasa a XII-a. Aceștia erau de fapt studenți în momentul concursului, totuși s-au prezentat în număr semnificativ, dînd dovadă de fidelitate și afecțiune pentru concursul la care au participat începînd din clasa a IX-a.

Rezultatele lor sînt remarcabile, obținînd premii și menționi toți participanții, deși criteriile au fost tot atît de severe ca și pentru ceilalți concurenți.

Un fapt deosebit este participarea în afară de concurs a doi dintre componenții lotului nostru olimpic internațional, ambii premianți la olimpiada internațională din Australia: *Dan Nicușor* și *Moroianu Andrei*.

Pentru rezultatele realizate în tabără și în timpul anului școlar prin rezolvarea de probleme din G.M. au fost acordate premii speciale ale taberei, în afara premiilor din concurs, elevilor *Bănică Teodor* și *Beldiman Octavian*.

Lista premianților și menționaților cuprinde și numele profesorilor care au pregătit pe concurenții respectivi. Constatăm că aceștia sînt din diferite centre: București, Brăila, Alba Iulia, Zalău, Pitești, Vaslui, Odorheiul Secuiesc, Iași și Făgăraș, ceea ce dovedește că participarea cu succes la concursul nostru se repartizează în întreaga țară. Concursul anual al rezolvitorilor G.M. a căpătat caracterul unui criteriu de selecție pe baza unei activități ritmice în întreg anul școlar, finalizată printr-o activitate de tabără plăcută, revelatoare și încununată prin două probe care angajează întreaga capacitate a concurenților într-un interval de timp de cursă lungă și edificatoare.

§ 2. Comisia de concurs și rolul ei în complexul de activități de tabără

Este cunoscută, după o experiență de 9 ediții, atmosfera în care se desfășoară cea de-a doua etapă a primei părți a Concursului anual al rezolvitorilor G.M. Această atmosferă este rodul colaborării cordiale dintre comisia de concurs și concurenți. De la început aceștia sînt primiți cu simpatie și grijă de asigurarea unor condiții de viață atrăgătoare, menite să cultive apropierea dintre elevi și profesori.

Un program de lucru de 4 ore, cu profesori iubiți de concurenți, cunoscuți prin activitatea lor la S.S.M. și în particular la G.M. și apreciați pentru competența și valoarea lor profesională, crează de la început o ambianță de laborator de matematică în care se frămîntă idei,

metode și tehnici deosebit de prețioase pentru concurenți, nu numai pentru concursul care îi așteaptă ci și pentru alte competiții în care vor fi angajați.

După-amiezele sînt libere pentru destindere și distracții, ca și pentru antrenamente de rezolvări de probleme puse în ședințele de dimineață. Elevii discută între ei, schimbă idei și metode, fac comentarii și se întrec cu voioșie, ca și în meciurile sportive pe care le organizează ei înșiși.

Membrii comisiei se lasă ei înșiși prinși în această ambianță cordială și sportivă, ceea ce mărește și consolidează apropierea de elevi.

În concursul de la Cîmpulung-Muscel din anul acesta comisia a fost compusă în primul rînd din membri ai conducerii S.S.M. și redactori ai G.M., la care s-au alăturat mai mulți profesori din diferite centre din țară, activiști ai S.S.M.:

Acad. *N. Teodorescu*, președinte;
Prof. *M. Țena*, directorul taberei, redactor principal G.M.;
Prof. *Liviu Pîrșan*, redactor principal G.M.;
Dr. *P. Radovici-Mărculescu*, secretar responsabil adjunct S.S.M.;
Prof. *I. Toleanu*, președintele Subfilialei S.S.M. Cîmpulung;
Lector dr. *G. Vraciu*, Universitatea din București;
Prof. *Julia Sebestyen*, Tg. Mureș;
Prof. *Ioana Munteanu*, Focșani;
Prof. *Mihaela Predescu*, Pitești;
Prof. *Șt. Andrei*, Buhuși;
Prof. *I. Pîrșe*, Cîmpulung Muscel;
Prof. *M. Lascu*, Zalău;
Prof. *M. Benczе*, Brașov.

Cele două miniconcursuri au fost conduse de prof. *I. Toleanu* în colaborare cu prof. *M. Țena* și cu participarea tuturor membrilor comisiei.

În cadrul ședințelor de lucru toți membrii comisiei au ținut prelegeri și seminarii, iar o parte dintre aceștia au fost autori ai problemelor celor două probe de concurs.

Duminică 14 august 1988 a fost organizată o excursie pe itinerarul Cîmpulung—Rucăr—Fundata—Bran—Cîmpulung, la care au participat elevii și membrii comisiei. A fost un prilej agreabil de a cunoaște frumusețile și pitorescul peisajului și localităților din această regiune prestigioasă în trecutul țării noastre și chemată la o nouă dezvoltare economică și turistică.

§ 3. Jurnalul de bord al taberei

Chiar din primul an de organizare a Concursului rezolvitorilor G.M., am propus concurenților să înscrie într-un jurnal de bord, impresiile și observațiile lor asupra vieții din tabără, sau reținuți.

În fiecare relatare asupra concursului, spicuirile noastre din acest jurnal de bord ocupă un loc important, fiindcă ne dau putința de a oferi cititorilor G.M. o imagine fugitivă a vieții din tabără-concurs, precum și mărturisiri spontane și neconvenționale ale concurenților. De fiecare dată este impresionant atașamentul pe care îl dezvăluie o dată cu sentimentele lor de bucurie de a fi descoperit o ambianță spirituală în care se simt integrați cu avînturile lor tinerești. Dar să-i lăsăm să vorbească prin extrase din Jurnalul din acest an.

„Marți 9 august. Nici unul din noi nu a mai fost la o tabără a Gazetei Matematice aici la Cîmpulung Muscel ...

În urmă cu patru ani, cînd am venit întîia oară la acest concurs, eram convins că va fi o tabără ca oricare alta. Ceva era însă, altfel. Nu știam ce, iar atunci cînd am aflat, cînd am înțeles, m-am simțit puțin mai „bătrîn" ca de obicei. Știam că existența acestui concurs și forma în care el a fost de la bun început constituit sînt o problemă de tradiție, reînnoind firul unei povești mult mai îndepărtate, de pe vremea vechii „Gazete Matematice".

Miercuri 10 august. Mărturisesc că la început am resimțit puțin plăcut faptul că în tabără erau puține persoane cunoscute din anii trecuți. Apoi am înțeles că e un moment al schimbului de generații, poate ceva mai radical decît altă dată, oricum, este unul dintre acele rare momente cînd, pur și simplu, se simte în mod clar influența unei anume generații în raport cu celelalte. De data aceasta au fost cei mici. Extrem de numeroși, clasa a IX-a din acest an cuprinde nume de care sînt sigur că vom mai auzi ... După masă, totul s-a reluat. Parcă am fi întrerupt numai puțin tabăra, deși trecuse un an și iată, acum, cu toate că de-abia sîntem de 24 ore împreună, prietenille s-au reînnodat și totul decurge de la sine. Concurenții au devenit coechipieri jucînd tenis de masă ...

Scanned with OKEN Scanner

Seara se pot face primele constatări și în ceea ce privește concursul propriu-zis, având în vedere concurenții sosiți în tabără. Caracteristic acestui concurs e faptul că nici timpul de gîndire, nici ceilalți adversari nu sînt principalul concurent. Luptați-n sine fiecare o va purta în timpul concursului cu sine însuși. Avem de-a face cu un punctaj care nu e limitat superior și care crează cele mai bune condiții pentru depășirea recordurilor stabilite anterior.

Sîmbătă 13 august. Primul miniconcurs. Așa cum era de așteptat mariajul făcut între Ardeal și Brăila a produs o echipă ce a pierdut pe parcurs numai două puncte. Era o problemă de tradiție. Întotdeauna atît Ardealul cît și Brăila au avut echipe competitive în concurs, echipe ce „mergeau la sigur" în miniconcursuri.

Marea revelație a fost însă, și aflcm lucrul acesta cu riscul de a fi subiectiv și de a lăuda echipajul pe care l-am văzut din interior ca pe un joc pe care ai putea să-l privești citind în gîndul tuturor participanților, echipajul București 3, considerat la început ca o echipă de tineret, cu șanse mari în viitor. Acest echipaj a dus o luptă strînsă cu Ardeal—Brăila și a pierdut „la fotografie" primul loc.

Duminică 14 august. Excursia. Atît de mult așteptată, anul acesta ea s-a desfășurat pe un traseu nou. Castelul Bran, poate cunoscut unora dintre noi, a prilejuit o și mai strînsă unificare a diversității de personaje pe care tabăra de vară a Gazetei Matematice le-a unit sub semnul său. Din colțuri diferite ale țării, oameni care poate nu s-ar fi întîlnit în alte condiții niciodată, au stat de vorbă și au făcut destăinuiri ...

Luni 15 august. Această a doua săptămînă a taberei seamănă cu o ultimă sută de metri pe care alergătorii o vor parcurge cu întreaga forță ce le-a mai rămas. În fond e vorba de încununarea tuturor faptelor din acest an, prezența a ci în tabără însemnînd de la început adevărul că cei prezenți au în urma lor cel puțin un an de lucru în Gazeta Matematică. Totul e ca un joc ...

Ne-am pregătit pentru cel de-al doilea miniconcurs. Dificultatea acestor probleme s-a dovedit sporită față de cea din problemele propuse de comisie. Probabil că elevii, ca propunători, sînt mult mai insistenți și mult mai categorici ca dascălii lor ...

— S-a cîștigat cu o medie mică, 40 de puncte din cele 50 posibile. Învingător, echipajul Ardeal—Brăila, care reușește să redediteze performanța echipajului legendar București de anul trecut, cînd ambele miniconcursuri au fost cîștigate de același echipă ...

După amiaza de azi a însemnat mult pentru unitatea tuturor celor din tabără. După preferințe, am plecat în oraș în grupuri din ce în ce mai numeroase. Aceasta înseamnă din ce în ce mai multe prietenii ..."

Întrerupem aici cronica taberei, din lipsă de spațiu, dar nu fără a culege din mers cîteva reflexii din seara de despărțire:

Sîmbătă 20 august. „În fiecare zi am voit să scriu ceva în acest jurnal, dar mereu s-a ivit acea mînă care m-a chemat în altă parte. Acum e sîmbătă seara și luna se pregătește să apună, după ce veșnic mincinoasă, m-a anunțat că descrește.

Masa festivă aproape s-a terminat, glasuri vesele, altele plictisite sau adormite, multă vreme se aud din capătul sălii. Păcat! A durat atît de puțin! Fiecare se gîndește la ceva petrecut în această tabără măcar în inconștient ...

Imaginile disparate ale taberei ne vor reveni în memorie mereu, în momentele cele mai neașteptate. Și aceasta nu înseamnă oare că ...?"

O altă mărturisire:

„Cred că-mi voi aduce aminte mereu de zilele taberei de la Cîmpulung, zile punctate intens de peripeții și întîmplări hazlii, zile în care am făcut noi prieteni matematicieni, reușind împreună să petrecem zile minunate în imperiul distracției și bucuriei, în care primul consilier era matematica. Acum, după înmînarea premiilor și începerea mesei festive, simt cum nostalgia pentru zilele taberei mă invadează într-un ritm accelerat, într-un crescendo forțat ..."

În sfîrșit, pentru încheiere, o ultimă însemnare din jurnalul de bord:

„Acum cînd zilele au trecut, cînd speranțele noastre s-au împlinit sau nu, părăsim tabăra de la Cîmpulung-Muscel cu regret. Cu regretul de a fi lăsat în urmă cîteva zile de neuitat, zile care ne-au umplut de bucurie. Tot ce a fost aici a fost un joc al fanteziei și inteligenței, un miraj al matematicii, ea care nu ține cont de vîrstă, ea care ne unește pe toți cei care o iubesc.

Nu voi uita niciodată acest concurs, această manifestare deosebită, organizată de oameni deosebiți".

Jurnalul de bord este impresionant în fiecare an prin gîndurile exprimate de concurenți, gînduri care dovedesc sensibilitate, profunzime spirituală și bucuria de a trăi într-o ambianță dorită, care se realizează neașteptat de repede prin lianțul atrăgător al prieteniei.

Este remarcabil faptul că însemnările concurenților arată că matematicienii pot da dovadă de talent literar, că pot exprima simțiri duioase, că pot avea humor și înclinații poetice.

Concursul anual al rezolvitorilor Gazetei Matematice este revelator și în această privință. El este în plus un exemplu de ceea ce este un laborator de matematică, în care munca

Scanned with OKEN Scanner

Scanned with OKEN Scanner

inimoasă de atelier se desfășoară într-o strînsă și demnă colaborare între profesori și elevi, între maeștri și ucenici, ca altădată în atelierele marilor pictori și sculptori, ca astăzi în laboratoarele de cercetare colectivă, care urmăresc proiecte ambițioase și de succese răsunătoare.

§ 4. Concluzii, mulțumiri și perspective

După această a noua ediție se poate vorbi de o experiență în concepția și organizarea Concursului anual al rezolvitorilor G.M. Jurnalul de bord testează an cu an legăturile conducerii S.S.M. cu elevii cei mai înzestrați și mai zeloși, colaboratori în număr impresionant de mare, răspîndiți în toate centrele de învățămînt din țară. Aceste legături au o puternică încărcătură afectivă, concurenții se angajează de-a lungul unui an și apoi an cu an într-o competiție care cere eforturi permanente, așteptări înfrigurate să vină G.M. cu casetele de probleme, să sosească momentul în care se anunță selecționarea și zilele taberei-concurs. Concepția și structura concursului place tineretului nostru, fiind o competiție sportivă de tip maraton, în care fiecare își încearcă puterile și rezistența, cunoștințele, experiența, tehnica și imaginația, cu convingerea că este sprijinit și privit cu simpatie, integrat într-un lot de concurenți valoroși, apreciat fiind de o comisie care judecă fără părtiniri și fără preferințe, care încurajează de-a lungul taberei străduințile tuturor.

În anul acesta am introdus inovația alcătuirii concursului din două părți, cea de-a doua fiind destinată premianților și menționaților noștri pe care îi chemăm încă o dată la o întîlnire cu premianții celorlalte concursuri prestigioase ca olimpiadele, balcaniadele și concursurile interjudețene. Această nouă competiție între laureați s-a desfășurat în prima sa ediție la Mangalia în intervalul 2—9 septembrie 1988, în condiții asemănătoare primei și a marcat încă o dată semnul prieteniei și cordialității, al apropierii între concurenți și între aceștia și comisia de concurs.

Intenționăm ca începînd cu anul următor, să extindem concursul și la elevii claselor a VII-a și a VIII-a, dînd satisfacție solicitărilor insistente ale acestora, ale profesorilor și părinților din toată țara. De asemenea intenționăm să înființăm în cadrul S. S. M. o asociație a foștelor participante la Concursul anual al rezolvitorilor, studenți sau încadrați în producție, pentru a întări legăturile dintre aceștia și carierele în care se disting după absolvirea studiilor universitare și a-i menține în contact cu G.M. prin evenimentul anual al concursului.

Mulțumim, ca în fiecare an celor care ne-au ajutat să organizăm și să desfășurăm concursul: în primul rînd Inspectoratul școlar județean Argeș, în frunte cu tov. inspector general *Irina Nicolaescu*, pentru asigurarea găzduirii taberei-concurs, tov. inspector *Sorin Simion* care și-a luat sarcina de a ne sprijini în organizare. Mulțumiri deosebite se cuvin tov. prof. *Gh. Dascălu* — directorul Liceului pedagogic Cîmpulung Muscel, gazda taberei și a concursului, pentru calda ospitalitate de care ne-am bucurat. Mulțumim călduros tuturor membrilor comisiei de concurs pentru devotamentul înimos și competent de care au dat dovadă de-a lungul tuturor zilelor taberei și pentru modul cum au știut să cîștige atașamentul și respectul concurenților.

Ca și aceștia vom păstra vie și rodnică amintire acestui concurs care ne-a înfrumusețat vacanța, dîndu-i un sens și o semnificație de care sîntem mîndri.

UTILIZAREA CALCULATORULUI ÎN STUDIUL UNOR ȘIRURI RECURENTE

de S. Cremarenco și B. Enescu, profesori, Buzău

Introducerea calculatoarelor personale în licee, precum și modificările aduse programei de matematică — în sensul introducerii unor noțiuni de informatică — constituie o parte din motivele care au condus la scrierea acestui articol. Fără îndoială, ideile expuse aici nu reprezintă decît o posibilă direcție de folosire a calculatorului, ca instrument de experimentare numerică a convergenței unor șiruri. Am lăsat deoparte aspectele metodice, considerînd că acestea trebuie (și, de fapt, sînt) supuse unor discuții mai ample în presa pedagogică. Desigur, calculatorul nu ne poate (încă) furniza demonstrații, dar de multe ori găsirea soluției e mult simplificată de cunoașterea unor informații dobîndite cu ajutorul său. Sperăm ca exemplele care urmează să ilustreze acest lucru și să ofere celor interesați un instrument simplu și eficient în depistarea unor particularități ale șirurilor recurente.

În „Matematica v școle" (6/1983) este menționată o problemă de olimpiadă:

„Care din numerele $a_n=\sqrt{2+\sqrt{3+\sqrt{2+\dots}}}$ *sau* $b_n=\sqrt{3+\sqrt{2+\sqrt{3+\dots}}}$ *este mai mare, în fiecare apărînd n radicali suprapuși"*,

Un program BASIC simplu ne arată că $a_n < b_n$ și $|a_n - b_n| < 1$, $(\forall)n \geqslant 1$. Pornind de la această problemă, ne-am întrebat ce se întîmplă în cazul general.

Fie, deci, a, $b > 0$, $a_1 = \sqrt{a}$, $b_1 = \sqrt{b}$ și $a_{n+1} = \sqrt{a + b_n}$, $b_{n+1} = \sqrt{b + a_n}$, $n \geqslant 1$, $a < b$. Experimentînd, pentru diferite valori ale numerelor a, b, cu ajutorul programului următor:

```
10 INPUT A: INPUT B
20 LET N = 1: LET X = SQR (A): LET Y = SQR (B)
30 LET Z = X
40 LET X = SQR(A + Y): LET Y = SQR (B + Z)
50 LET N = N + 1
60 PRINT N; TAB(3); X; TAB(11); Y; TAB(21); X - Y
70 GO TO 30
```

am constatat că șirurile sînt mereu convergente, avînd limite supraunitare.

Demonstrația acestei observații nu e complicată. Inductiv, se obține monotonia: dacă $a_{n-1} < a_n$ și $b_{n-1} < b_n$, atunci $a_n = \sqrt{b + a_{n-1}} < \sqrt{b + a_n} = a_{n+1}$ și analog, $b_n < b_{n+1}$; cum evident $a_1 < a_2$, $b_1 < b_2$, rezultă că șirurile sînt crescătoare. Pe de altă parte, atît a_n cît și b_n sînt majorate de $c_n = \sqrt{b + \sqrt{b + \ldots + \sqrt{b}}}$, care e mai mic decît $\frac{1 + \sqrt{1 + 4b}}{2}$.

Interesantă este chestiunea comparării termenilor a_n și b_n. Folosind calculatorul, am obținut următorul rezultat: dacă $0 < a < b$ și $a + b > 1$, atunci $0 < b_n - a_n < b - a$, $(\forall)\, n \geqslant 1$. Într-adevăr, $0 < \sqrt{b} - \sqrt{a} = \frac{b - a}{\sqrt{b} + \sqrt{a}} < b - a$ $(n = 1)$. Presupunînd $0 < b_n - a_n < b - a$, rezultă:

$$b_{n+1} - a_{n+1} = \sqrt{b + a_n} - \sqrt{a + b_n} = \frac{b + a_n - a - b_n}{\sqrt{b + a_n} + \sqrt{a + b_n}} > 0,$$

iar

$$b_{n+1} - a_{n+1} < b - a \Leftrightarrow \sqrt{b + a_n} + a < \sqrt{a + b_n} + b \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow b + a_n + a^2 + 2a\sqrt{b + a_n} < a + b_n + b^2 + 2b\sqrt{a + b_n},$$

care se dovedește imediat însumînd inegalitățile evidente $b + a^2 < a + b^2$, $a_n < b_n$ și $2a\sqrt{b + a_n} < 2b\sqrt{a + b_n}$.

În cazul $a + b < 1$, se constată că semnul diferenței $b_n - a_n$ alternează pînă la un anumit termen, după care din nou devine pozitiv.

Un alt exemplu interesant este șirul recurent cunoscut $x_1 > 0$, $x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right)$, care este convergent către $\sqrt{a}$. Folosind programul

```
10 INPUT X: INPUT A
20 LET N = 1
30 LET X = 1/2*(X + A/X)
40 LET N = N + 1
50 PRINT N, X
60 GO TO 30
```

se constată o convergență rapidă a șirului către $\sqrt{a}$. Explicația acestei convergențe rapide este aceea că dacă vom considera un șir $x_n \to \sqrt{a}$ cu $x_n > a$, atunci șirul $a/x_n \to \sqrt{a}$ cu $a/x_n < \sqrt{a}$, iar termenul general x_{n+1} este media aritmetică a celor două aproximații, una prin lipsă și cealaltă prin adaos și deci, evident, o aproximație mai bună. Iată, de altfel, ce se obține cu ajutorul calculatorului pentru $x_1 = 1$ și $a = 3$:

$$x_2 = 2;\ x_3 = 1{,}75;\ x_4 = 1{,}7321429;\ x_5 = 1{,}7320508;\ x_6 = 1{,}7320508;\ \ldots\ldots$$

iar pentru $x_1 = 2$ și $a = 3$:

$$x_2 = 1{,}75;\ x_3 = 1{,}7321429;\ x_4 = 1{,}7320508;\ x_5 = 1{,}7320508;\ \ldots\ldots\ldots$$

Scanned with OKEN Scanner

Observînd aproximările succesive ale lui $\sqrt{3}$, ne punem întrebarea: dacă x_n îl aproximează pe $\sqrt{a}$ cu N zecimale exacte, cu cîte zecimale exacte îl aproximează x_{n+1}? Răspunsul este dat de următorul calcul: dacă $|x_n - \sqrt{a}| < \frac{1}{10^N}$, atunci $|x_{n+1} - \sqrt{a}| = \left|\frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right) - \sqrt{a}\right| = \frac{(x_n - \sqrt{a})^2}{2x_n} < (x_n - \sqrt{a})^2 < \frac{1}{10^{2N}}$, pentru $x_n > 1$, deci x_{n+1} îl aproximează pe $\sqrt{a}$ cu cel puțin $2N$ zecimale exacte.

Este interesantă legătura dintre această problemă și un sistem din [2], propus la admitere în U.R.S.S.:

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2}\left(y + \frac{2}{y}\right) \\ y = \frac{1}{2}\left(z + \frac{2}{z}\right) \\ z = \frac{1}{2}\left(x + \frac{2}{x}\right) \end{cases}$$

Căutînd soluțiile pozitive ale sistemului (cele negative obținîndu-se imediat din acestea) și luînd $x_1 = x$, rezultă că șirul este de fapt $x, z, y, x, z, y, \ldots$, deci un șir periodic. Fiind și convergent, el e constant, deci $x = y = z = \lim_{n\to\infty} x_n = \sqrt{2}$.

Legătura aceasta dintre sistemele simetrice și șirurile recurente poate fi exploatată și în direcție inversă. Plecînd de la sistemul:

$$\begin{cases} x = \frac{1}{b}\left(y + \frac{a}{y}\right) \\ y = \frac{1}{b}\left(z + \frac{a}{z}\right) \\ z = \frac{1}{b}\left(x + \frac{a}{x}\right) \end{cases}$$

unde a, $b>0$, am considerat șirul $x_1=c>0$, $x_{n+1} = \frac{1}{b}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right)$, $n \geqslant 1$. Pe calculator, modificînd linia 3Ø a programului anterior în 3Ø LET $X = 1/B*(X + A/X)$ obținem, pentru diverse valori ale lui b, că șirul este convergent dacă $b>1$, și divergent dacă $0 < b \leqslant 1$, deci sistemul are soluția $x = y = z = \pm\sqrt{\frac{a}{b-1}}$ pentru $b > 1$, și nu are soluții dacă $b \leqslant 1$. Demonstrațiile acestor afirmații nu prezintă dificultăți.

Vom prezenta în continuare o altă problemă, în a cărei rezolvare inițială s-a strecurat o eroare, descoperită ulterior cu ajutorul calculatorului.

Fie șirul $x_{n+1} = \sqrt[3]{x_n^2 - x_n + 1}$, *cu* $x_0 = a \in \mathbf{R}$. *Să se studieze convergența șirului după valorile lui a.*

Să observăm că $x_{n+1} - x_n = \sqrt[3]{x_n^2 - x_n + 1} - \sqrt[3]{x_{n-1}^2 - x_{n-1} + 1} =$

$$= \frac{(x_n - x_{n-1})(x_n + x_{n-1} - 1)}{\sqrt[3]{(x_n^2 - x_n + 1)^2} + \sqrt[3]{(x_n^2 - x_n + 1)(x_{n-1}^2 - x_{n-1} + 1)} + \sqrt[3]{(x_{n-1}^2 - x_{n-1} + 1)^2}}$$

dar, cum pentru $n \geqslant 1$, $x_n = \sqrt[3]{x_{n-1}^2 - x_{n-1} + 1} = \sqrt[3]{(x_{n-1} - 1/2)^2 + 3/4} \geqslant \sqrt[3]{3/4}$, rezultă că pentru $n \geqslant 2$, $x_n + x_{n-1} - 1 \geqslant 2\sqrt[3]{3/4} - 1 > 0$, deci diferențele $x_{n+1} - x_n$ și $x_n - x_{n-1}$ au

Scanned with OKEN Scanner

același semn, adică (x_n) e monoton. Tipul monotoniei îl deducem din compararea primilor termeni:

$$x_1 - x_0 = \sqrt[3]{a^2 - a + 1} - a = \frac{(1-a)(1+a^2)}{\sqrt[3]{(a^2-a+1)^2} + a\sqrt[3]{a^2-a+1} + a^2}$$

deci pentru $a > 1$, șirul e descrescător, pentru $a = 1$ e constant, iar pentru $a < 1$, e monoton crescător. Evident, în cazul $a > 1$, șirul fiind descrescător și cu termeni pozitivi este convergent, limita sa determinîndu-se ușor prin trecere la limită în relația de recurență; notînd $\lim_{n\to\infty} x_n = x$, obținem $x = \sqrt[3]{x^2 - x + 1}$, deci $x = 1$.

Rămîne de studiat cazul $a < 1$, unde vom cerceta mărginirea superioară a șirului.

Să observăm că $x_{n+1} < 1 \Leftrightarrow \sqrt[3]{x_n^2 - x_n + 1} < 1 \Leftrightarrow x_n(x_n - 1) < 0 \Leftrightarrow x_n < 1$, deci recurent, totul depinde de poziția lui x_1 față de 1. Dar $x_1 < 1 \Leftrightarrow \sqrt[3]{a^2 - a + 1} < 1 \Leftrightarrow a(a-1) < 1$ și deci, dacă $a \in (0,1)$, șirul e mărginit superior de 1, iar pentru $a < 0$, șirul e mărginit inferior de 1. În primul caz obținem din nou că $\lim_{n\to\infty} x_n = 1$, în timp ce în cel de-al doilea caz, șirul e divergent (dacă (x_n) ar fi mărginit superior și deci ar fi convergent, notînd $\lim_{n\to\infty} x_n = x$, am obține din nou $x = 1$, imposibil, întrucît $x_n > x_1 > 1$).

În concluzie, pentru $a \geqslant 0$, șirul e convergent și are limita 1, iar pentru $a < 0$, șirul e divergent.

Evident că pe parcursul acestei „demonstrații" s-au făcut greșeli mai mult sau mai puțin vizibile, dar ele n-au fost observate pînă cînd, încercînd să studiem pe calculator rapiditatea convergenței șirului, am constatat că, pentru orice $a \in \mathbf{R}$, șirul e convergent și are limita 1.

La reluarea considerațiilor făcute, am constatat că greșeala s-a comis la compararea lui x_1 cu x_0 (ar fi trebuit x_2 cu x_1), în orice caz șirul fiind descrescător.

De altfel, o soluție rapidă e dată de principiul contracției:

Fie $f(x) = \sqrt[3]{x^2 - x + 1}$, evident derivabilă pe $\mathbf{R}$. Aplicînd teorema creșterilor finite pe intervalul $(1, x_n)$ (sau pe $(x_n, 1)$), obținem că $(\exists)\, c \in \mathbf{R}$ astfel încît

$$|x_{n+1} - 1| = |f(x_n) - 1| = |x_n - 1| \cdot |f'(c)| \leqslant |x_n - 1| \sup_{x\in\mathbf{R}} |f'(x)| = |x_n - 1| \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{9}}$$

și deci, inductiv, $|x_{n+1} - 1| \leqslant \left(\frac{1}{\sqrt[3]{9}}\right)^n \cdot |x_1 - 1|$, de unde evident, $\lim_{n\to\infty} x_n = 1$.

Bibliografie:

[1] Matematica v școle (1983).

[2] *C. Năstăsescu, C. Niță, D. Joița, M. Brandiburu*, „Culegere de probleme de algebră", E.D.P. 1983.

ASUPRA ECUAȚIEI FUNCȚIONALE $f(x+a) = f(x) \cdot g(x) + h(x)$

de **D. M. Bătinețu-Giurgiu** și **Florin Vulpescu-Jalea**

Este cunoscut faptul că în teoria ecuațiilor funcționale există puține metode generale. De aceea, această teorie nu este suficient de unitară și coerentă. Prezentul articol constituie o încercare de a da un punct de vedere unitar asupra unor probleme apărute în Gazeta Matematică, legate de ecuația funcțională din titlu.

În tot ceea ce urmează, vom nota $[x]$ și $\{x\}$ partea întreagă, respectiv partea fracționară, a numărului real x.

În acest articol vom obține soluția generală a ecuației funcționale

$$f(x + a) = f(x) \cdot g(x) + h(x), \quad (\forall) x \in \mathbf{R}, \tag{1}$$

unde $a \in \mathbf{R}^*$, iar $g, h : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ sînt funcții periodice date, avînd perioada $|a|$. Rezultatul obținut se va dovedi bogat în aplicații interesante.

Scanned with OKEN Scanner

Teorema 1. *Dacă $a \in \mathbf{R}^*$ și $g,\ h : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ sînt funcții periodice cu perioada $|a|$, atunci soluția generală a ecuației funcționale* (1) *este funcția $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$,*

$$f(x) = \begin{cases} (g(x))^{\left[\frac{x}{a}\right]} \cdot k_1(x) + \dfrac{(g(x))^{\left[\frac{x}{a}\right]} - 1}{g(x) - 1} \cdot h(x), & \text{dacă } g(x) \in \mathbf{R}^* - \{1\}, \\ k_2(x) + \left[\dfrac{x}{a}\right] \cdot h(x), & \text{dacă } g(x) = 1, \\ h(x) & \text{dacă } g(x) = 0, \end{cases} \tag{2}$$

unde $k_1,\ k_2 : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ sînt funcții periodice arbitrare, avînd perioada $|a|$.

Demonstrație. Fie $a \in \mathbf{R}^*$ și $g,\ h : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ două funcții periodice, cu perioada $|a|$. Notăm $M_1 = \{x \in \mathbf{R} \mid g(x) \neq 0,\ g(x) \neq 1\}$, $M_2 = \{x \in \mathbf{R} \mid g(x) = 1\}$, $M_3 = \{x \in \mathbf{R} \mid g(x) = 0\}$. Din periodicitatea funcției g, deducem $x \in M_i$ dacă și numai dacă $x + a \in M_i$, $i \in \{1, 2, 3\}$. De aici rezultă că fiecare din mulțimile M_1, M_2, M_3 este sau vidă sau infinită. Fie $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ o funcție care verifică relația (1). Avem trei cazuri:

1) Dacă $M_1 \neq \emptyset$, construim funcția $k_1 : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, definită arbitrar pe $M_2 \cup M_3$, așa încît $k_1(x+a) = k_1(x)$, $(\forall)\ x \in M_2 \cup M_3$ și

$$k_1(x) = \left(f(x) - \frac{(g(x))^{\left[\frac{x}{a}\right]} - 1}{g(x) - 1} \cdot h(x) \right) \cdot (g(x))^{-\left[\frac{x}{a}\right]}, \quad (\forall) x \in M_1, \tag{3}$$

Avem:

$$k_1(x+a) = \left(f(x+a) - \frac{(g(x+a))^{\left[\frac{x+a}{a}\right]} - 1}{g(x+a) - 1} \cdot h(x+a) \right) \cdot (g(x))^{-\left[\frac{x+a}{a}\right]} =$$

$$= \left(f(x)g(x) + h(x) - \frac{(g(x))^{\left[\frac{x}{a}\right]+1} - 1}{g(x) - 1} \cdot h(x) \right) \cdot (g(x))^{-\left[\frac{x}{a}\right]-1} =$$

$$= \left(f(x) - \frac{h(x)}{g(x)} - \frac{(g(x))^{\left[\frac{x}{a}\right]+1} - 1}{g(x) \cdot (g(x) - 1)} \cdot h(x) \right) \cdot (g(x))^{-\left[\frac{x}{a}\right]} =$$

$$= \left(f(x) - \frac{(g(x))^{\left[\frac{x}{a}\right]} - 1}{g(x) - 1} \cdot h(x) \right) \cdot (g(x))^{-\left[\frac{x}{a}\right]} = k_1(x), \quad (\forall) x \in M_1.$$

De aici rezultă că funcția k_1 este periodică de perioadă $|a|$. Din relația (3) deducem imediat că:

$$f(x) = (g(x))^{\left[\frac{x}{a}\right]} \cdot k_1(x) + \frac{(g(x))^{\left[\frac{x}{a}\right]} - 1}{g(x) - 1} \cdot h(x), \quad (\forall) x \in M_1.$$

ii) Dacă $M_2 \neq \emptyset$, introducem funcția $k_2 : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, definită arbitrar pe mulțimea $M_1 \cup M_2$ așa încît

$$k_2(x + a) = f(x) - \left[\frac{x}{a}\right] \cdot h(x), \quad (\forall) x \in M_2, \tag{4}$$

Scanned with OKEN Scanner

Rezultă atunci că:

$$k_2(x+a) = f(x+a) - \frac{x+a}{a} \cdot h(x+a) = f(x) + h(x) - \left(\frac{x}{a} - 1\right) \cdot h(x) =$$

$$= f(x) - \frac{x}{a} \cdot h(x) = k_2(x), \quad (\forall)\ x \in M_2.$$

Prin urmare, funcția k_2 este periodică de perioadă $|a|$ și atunci din relația (4) obținem:

$$f(x) = k_2(x) + \frac{x}{a} \cdot h(x), \quad (\forall)\ x \in M_2.$$

iii) Dacă $M_3 \neq \emptyset$ și $x \in M_3$, atunci $g(x-a) = 0$ și atunci substituind în (1) pe x prin $x-a$ deducem $f(x) = h(x-a)$, ceea ce arată că $f(x) = h(x)$, $(\forall)\ x \in M_3$.

Reciproc, dacă funcția $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ are forma dată de relația (2) să arătăm că f este soluție a ecuației funcționale (1).

i) Dacă $x \in M_1$ rezultă că:

$$f(x+a) = (g(x+a))^{\left[\frac{x+a}{a}\right]} \cdot k_1(x+a) + \frac{(g(x+a))^{\left[\frac{x+a}{a}\right]} - 1}{g(x+a) - 1} \cdot h(x+a) =$$

$$= g(x) \cdot (g(x))^{\left[\frac{x}{a}\right]} \cdot k_1(x) + \frac{(g(x))^{\left[\frac{x}{a}\right]+1} - 1}{g(x) - 1} \cdot h(x) =$$

$$= g(x)\left(f(x) - \frac{(g(x))^{\left[\frac{x}{a}\right]} - 1}{g(x) - 1} \cdot h(x)\right) + \frac{(g(x))^{\left[\frac{x}{a}\right]+1} - 1}{g(x) - 1} \cdot h(x) =$$

$$= f(x) \cdot g(x) + h(x).$$

ii) Dacă $x \in M_2$, deducem:

$$f(x+a) = k_2(x+a) + \frac{x+a}{a} \cdot h(x+a) = k_2(x) + \left(\frac{x}{a} + 1\right) \cdot h(x) =$$

$$= f(x) - \frac{x}{a} \cdot h(x) + \left(\frac{x}{a} + 1\right) \cdot h(x) = f(x) + h(x).$$

iii) Dacă $x \in M_3$ și $f(x) = h(x)$, atunci $f(x+a) = h(x+a) = h(x)$ și egalitatea (1) este echivalentă cu $h(x) = h(x)$.

Cu aceasta demonstrația este încheiată.

Soluția generală (2), a ecuației funcționale (1), are dezavantajul că funcția $u : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $u(x) = (g(x))^{\left[\frac{x}{a}\right]}$ nu este, în general, continuă pe $\mathbf{R}$, chiar dacă g este o funcție continuă. De aceea vom demonstra și

Teorema 2. *Dacă $a \in \mathbf{R}_+^*$, $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}_+^*$ și $h : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ sînt funcții periodice cu perioada $|a|$, atunci soluția generală a ecuației funcționale (1) este:*

$$f(x) = \begin{cases} (g(x))^{\frac{x}{a}} \cdot k_1(x) - \dfrac{h(x)}{g(x) - 1}, & \text{dacă } g(x) \neq 1, \\ k_2(x) + \dfrac{x}{a} \cdot h(x), & \text{dacă } g(x) = 1, \end{cases} \tag{5}$$

unde k_1, $k_2 : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ sînt funcții periodice arbitrare de perioadă $|a|$.

Scanned with OKEN Scanner

Demonstrație. Cazul $g(x) = 1$ a fost demonstrat în teorema 1. Fie deci $M = \{x \in \mathbf{R} \mid g(x) \neq 1\}$. Dacă $M \neq \emptyset$, atunci $x \in M$ dacă și numai dacă $x + a \in M$. Fie $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ o funcție care satisface egalitatea (1). Construim funcția $k_1 : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, definită în mod arbitrar pe $\mathbf{R} - M$, așa încît

$$k_1(x + a) = k_1(x), \quad (\forall)\, x \in \mathbf{R} - M \text{ și}$$

$$k_1(x) = \left(f(x) + \frac{h(x)}{g(x) - 1}\right)(g(x))^{-\frac{x}{a}}, \quad (\forall)\, x \in M, \tag{6}$$

Avem:

$$k_1(x + a) = \left(f(x + a) + \frac{h(x + a)}{g(x + a) - 1}\right)\cdot(g(x + a))^{-\frac{x+a}{a}} = \left(f(x)\cdot g(x) + h(x) + \right.$$

$$\left. + \frac{h(x)}{g(x) - 1}\right)\cdot(g(x))^{-\frac{x}{a}-1} = \left(f(x) + \frac{h(x)}{g(x)} + \frac{h(x)}{g(x)(g(x) - 1)}\right)\cdot(g(x))^{-\frac{x}{a}} =$$

$$= \left(f(x) + \frac{h(x)}{g(x) - 1}\right)\cdot(g(x))^{-\frac{x}{a}} = k_1(x), \quad (\forall)\, x \in M,$$

de unde deducem că funcția k_1 este periodică, cu perioada $|a|$. Din (6), rezultă:

$$f(x) = (g(x))^{\frac{x}{a}}\cdot k_1(x) - \frac{h(x)}{g(x) - 1}, \quad (\forall)\, x \in M.$$

Reciproc, dacă $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ are forma (5) și $x \in M$, atunci:

$$f(x + a) = (g(x + a))^{\frac{x+a}{a}}\cdot k_1(x + a) - \frac{h(x + a)}{g(x + a) - 1} = g(x)\cdot(g(x))^{\frac{x}{a}}\cdot k_1(x) -$$

$$- \frac{h(x)}{g(x) - 1} = g(x)\left(f(x) + \frac{h(x)}{g(x) - 1}\right) - \frac{h(x)}{g(x) - 1} = f(x)g(x) + h(x)$$

și cu aceasta demonstrația este încheiată.

Observația 1. Dacă $a \in \mathbf{N}^*$, teoremele 1 și 2 rămîn adevărate pentru $f, g, h, k_1, k_2 : \mathbf{N}^* \to \mathbf{R}$, demonstrațiile fiind analoge.

Demonstrăm în continuare un rezultat echivalent problemei 21360 din Gazeta Matematică.

Teorema 3. *Fie $a \in \mathbf{R}^*$ și $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}^* - \{1\}$, $h : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ două funcții periodice cu perioada $|a|$. Atunci funcția $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ are proprietatea că $f(x + a) = f(x)\cdot g(x) + h(x)$, $(\forall)\, x \in \mathbf{R}$, dacă și numai dacă*

$$f(x) = (g(x))^{\left[\frac{x}{a}\right]}\cdot f\left(a\left\{\frac{x}{a}\right\}\right) + \frac{(g(x))^{\left[\frac{x}{a}\right]} - 1}{g(x) - 1}\cdot h(x), \quad (\forall) x \in \mathbf{R}.$$

Demonstrație. Pentru orice $x \in \mathbf{R}$, notăm $m = \left[\frac{x}{a}\right]$ și $u = \left\{\frac{x}{a}\right\}$ și atunci $x = ma + au$.

Distingem trei cazuri:

1) Dacă $m \in \mathbf{N}^*$, obținem:

$$f(x) = f(ma + au) = f((m - 1)a + au + a) = f((m - 1)a + au)\cdot g(x) + h(x) =$$

$$= f((m - 2)a + au + a)g(x) + h(x) = (f((m - 2)a + au)g(x) + h(x))g(x) + h(x) =$$

$$= (g(x))^2\cdot f((m - 2)a + au) + (g(x) + 1)h(x) = \ldots = (g(x))^m\cdot f(au) +$$

$$+ ((g(x))^{m-1} + (g(x))^{m-2} + \ldots + g(x) + 1)h(x) = (g(x))^m\cdot f(au) +$$

$$+ \frac{(g(x))^m - 1}{g(x) - 1}\cdot h(x) = (g(x))^{\left[\frac{x}{a}\right]}\cdot f\left(a\left\{\frac{x}{a}\right\}\right) + \frac{(g(x))^{\left[\frac{x}{a}\right]} - 1}{g(x) - 1}\cdot h(x), \quad (\forall)\, x \in \mathbf{R}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Scanned with OKEN Scanner

ii) Dacă $m = 0$, atunci $x = a \cdot \frac{x}{a} = a \cdot \left\{\frac{x}{a}\right\}$ și deci

$$f(x) = f\left(a\left\{\frac{x}{a}\right\}\right) = 1 \cdot f\left(a\left\{\frac{x}{a}\right\}\right) + 0 \cdot h(x) = (g(x))^0 \cdot f\left(a\left\{\frac{x}{a}\right\}\right) + \frac{(g(x))^0 - 1}{g(x) - 1} \cdot h(x) =$$

$$= (g(x))^{\left[\frac{x}{a}\right]} f\left(a\left\{\frac{x}{a}\right\}\right) + \frac{(g(x))^{\left[\frac{x}{a}\right]} - 1}{g(x) - 1} \cdot h(x), \ (\forall) x \in \mathbf{R}.$$

iii) Pentru $m \in \mathbf{Z} - \mathbf{N}$, notăm $p = -m$ și $k(x) = \frac{1}{g(x)}$. Din $f(x + a) = f(x) \cdot g(x) + h(x)$, rezultă $f(x) = f(x + a)k(x) - k(x)h(x)$, $(\forall)\ x \in \mathbf{R}$. Prin urmare:

$$f(x) = f(ma + au) = f(-pa + au) = k(x) \cdot f((-p + 1)a + au) - k(x)h(x) =$$

$$= k(x)(k(x) \cdot f((-p + 2)a + au) - k(x)h(x)) - k(x)h(x) = (k(x))^2 \cdot f((-p + 2)a +$$

$$+ au) - k(x)k(x)(k(x) + 1) = \ldots = (k(x))^p \cdot f(au) - k(x)k(x)((k(x))^{p-1} +$$

$$+ (k(x))^{p-2} + \ldots + 1) = (g(x))^{-p} \cdot f(au) - \frac{k(x)}{g(x)} \cdot \frac{(k(x))^p - 1}{k(x) - 1} =$$

$$= (g(x))^{-p} \cdot f(au) + \frac{k(x)}{g(x)} \cdot \frac{-1 + (g(x))^m}{\frac{1}{g(x)} - 1} = (g(x))^{-p} \cdot f(au) + \frac{(g(x))^m - 1}{g(x) - 1} \cdot h(x) =$$

$$= (g(x))^{\left[\frac{x}{a}\right]} \cdot f\left(a\left\{\frac{x}{a}\right\}\right) + \frac{(g(x))^{\left[\frac{x}{a}\right]} - 1}{g(x) - 1} \cdot h(x), \ (\forall) x \in \mathbf{R}.$$

Reciproc,

$$f(x + a) = (g(x + a))^{\left[\frac{x+a}{a}\right]} \cdot f\left(a\left\{\frac{a + a}{a}\right\}\right) + \frac{(g(x + a))^{\left[\frac{x+a}{a}\right]} - 1}{g(x + a) - 1} \cdot h(x + a) =$$

$$= (g(x))^{\left[\frac{x}{a}\right]+1} \cdot f\left(a\left\{\frac{x}{a}\right\}\right) + \frac{(g(x))^{1+\left[\frac{x}{a}\right]} - 1}{g(x) - 1} \cdot h(x) =$$

$$= g(x)\left(f(x) - \frac{(g(x))^{\left[\frac{x}{a}\right]} - 1}{g(x) - 1} \cdot h(x)\right) + \frac{(g(x))^{1+\left[\frac{x}{a}\right]} - 1}{g(x) - 1} \cdot h(x) =$$

$$= f(x)g(x) + h(x), \ (\forall)\ x \in \mathbf{R},$$

ceea ce încheie demonstrația.

Observația 2. Demonstrația teoremei 3 rezultă și cu ajutorul teoremei 1 dacă luăm $k_1(x) = f\left(a\left\{\frac{x}{a}\right\}\right)$.

În continuare prezentăm cîteva aplicații ale acestor teoreme.

Aplicația 1. La Sesiunea Științifică pe țară a elevilor, care a avut loc la Brașov, iulie 1987, eleva *Cristina-Mihaela Petrescu-Prodan* a prezentat (sub îndrumarea profesorilor *D. M. Bătinețu-Giurgiu* și *D. Il. Moraru*) o lucrare care a fost premiată și în care tratează despre ecuații și inecuații funcționale. În această lucrare, printre alte propoziții se demonstrează și propoziția următoare:

Propoziția 1. *Fie* $a \in \mathbf{R}^*$ *și* $h : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ *o funcție periodică de perioadă* $|a|$. *Atunci funcția* $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ *are proprietatea că* $f(x + a) = f(x) + h(x)$, $(\forall) x \in \mathbf{R}$, *dacă și numai dacă* $f(x) = \left[\frac{x}{a}\right] \cdot h(x) + f\left(a\left\{\frac{x}{a}\right\}\right)$, $(\forall)\, x \in \mathbf{R}$.

Demonstrația 1. Se obține din teorema 3 considerînd $g(x) = 1$, $(\forall) x \in \mathbf{R}$.

Demonstrația 2. Dacă $f(x + a) = f(x) + h(x)$, $(\forall)\, x \in \mathbf{R}$, atunci conform teoremei 1, funcția $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ are forma $f(x) = k_2(x) + \frac{x}{a} h(x)$, $(\forall)\, x \in \mathbf{R}$, $k_2 : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ fiind o funcție periodică arbitrară, cu perioada $|a|$. Alegînd $k_2(x) = f\left(a\left\{\frac{x}{a}\right\}\right) - \left\{\frac{x}{a}\right\} \cdot h(x)$, obținem:

$$f(x) = \left[\frac{x}{a}\right] \cdot h(x) + f\left(a\left\{\frac{x}{a}\right\}\right), \quad (\forall)\ x \in \mathbf{R}. \tag{7}$$

Reciproc, dacă f are forma (7), cu $h(x + a) = h(x)$, $(\forall)\, x \in \mathbf{R}$, atunci:

$$f(x + a) = \left[\frac{x + a}{a}\right] \cdot h(x + a) + f\left(a\left\{\frac{x + a}{a}\right\}\right) = \left(1 + \left[\frac{x}{a}\right]\right) \cdot h(x) + f\left(a\left\{\frac{x}{a}\right\}\right) =$$

$$= f(x) + h(x), \ (\forall)\ x \in \mathbf{R},$$

ceea ce încheie demonstrația.

Observația 3. Dacă în această propoziție considerăm $h(x) = a$, $(\forall)\, x \in \mathbf{R}$ atunci obținem problema 21039 din Gazeta Matematică, autor *Florin Vulpescu-Jalea*.

Aplicația 2. (Problema C : 567 din Gazeta Matematică, enunț parțial).

Fie $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ *o funcție cu proprietatea că există* $n \in \mathbf{N}^* - \{1\}$ *și* $a \in \mathbf{R}^*$, *așa încît* $(\underbrace{f \circ f \circ \ldots \circ f}_{n \text{ ori}})(x) = x + a$, $(\forall)\, x \in \mathbf{R}$. *Să se arate că funcția* f *se poate scrie ca suma dintre o funcție periodică și o funcție de gradul întîi.*

Soluție. Deoarece $(\underbrace{f \circ f \circ \ldots \circ f}_{n \text{ ori}})(x) = x + a$, $(\forall) x \in \mathbf{R}$, atunci

$$f(x + a) = \underbrace{f((f \circ f \circ \ldots \circ f)(x))}_{n \text{ ori}} = \underbrace{(f \circ f \circ \ldots \circ f)}_{n \text{ ori}}(f(x)) = f(x) + a, \ (\forall)\ x \in \mathbf{R},$$

ceea ce arată că $f(x + a) = f(x) + a$, $(\forall)\, x \in \mathbf{R}$. Aplicînd teorema 1, în cazul $g(x) = 1$ $(\forall)\, x \in \mathbf{R}$ și $h(x) = a$, $(\forall)\, x \in \mathbf{R}$, deducem $f(x) = k(x) + x$, $(\forall)\, x \in \mathbf{R}$ unde $k : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ este o funcție periodică, de perioadă $|a|$, ceea ce încheie soluția.

Aplicația 3. (Problema C : 581 din Gazeta Matematică). *Să se determine toate șirurile de numere naturale* $(x_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ *așa încît* $x_{x_n} = n + 2$, $(\forall)\, n \in \mathbf{N}^*$.

Soluție. Fie $f : \mathbf{N}^* \to \mathbf{N}^*$, $f(n) = x_n$. Atunci egalitatea $x_{x_n} = n + 2$ se scrie $(f \circ f)(n) = f(f(n)) = n + 2$, $(\forall) n \in \mathbf{N}^*$ și prin urmare avem:

$$f(n + 2) = (f \circ f \circ f)(n) = (f \circ f)(f(n)) = f(n) + 2. \ (\forall)\ n \in \mathbf{N}^* \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(n + 2) = f(n) + 2, \ (\forall)\ n \in \mathbf{N}^*.$$

Conform celor demonstrate în teorema 1 și observației 1, deducem că:

$$f(n) = n + k(n), \ (\forall)\ n \in \mathbf{N}^*, \tag{8}$$

unde $k : \mathbf{N}^* \to \mathbf{Z}$ este o funcție periodică arbitrară cu perioada 2. Să notăm $a = k(1)$ și $b = k(2)$; pe baza relației (8) obținem că:

$$f(2n) = 2n + b, \ (\forall) n \in \mathbf{N}^* \text{ și } f(2n + 1) = 2n + 1 + a, \quad (\forall) n \in \mathbf{N}^*. \tag{9}$$

Rezultă deci că:

$$2n + 2 = f(f(2n)) = f(2n + b), \ (\forall)\ n \in \mathbf{N}^*, \tag{10}$$

Dacă $b \in 2\mathbf{Z}$ atunci din (9) și (10) obținem $2n + 2 = f(2n + b) = 2n + 2b$ de unde rezultă că $b = 1$, ceea ce contrazice $b \in 2\mathbf{Z}$. Deci $b \in 2\mathbf{Z} + 1$ și atunci $2n + 2 = f(2n + b) = 2n + b + a$ ceea ce arată că $b = 2 - a$ și în consecință $a \in 2\mathbf{Z} + 1$ ceea ce arată că relația (9) devine:

$$f(2n) = 2n + 2 - a, \ (\forall) n \in \mathbf{N}^* \text{ și } f(2n + 1) = 2n + 1 + a, \ (\forall) n \in \mathbf{N}^*, \tag{11}$$

Scanned with OKEN Scanner

Din relația (11) deducem : $1 \leqslant f(1) = a + 1$ și $1 \leqslant f(2) = 4 - a$, ceea ce conduce la $a \in [0,3] \cap \mathbf{Z}$ și deci $a \in \{1, 3\}$. Pentru $a = 1$, din (10) rezultă $f(n) = n + 1$, iar din $a = 3$ deducem $f(n) = n + 1 + 2(-1)^{n-1}$. În concluzie șirurile $(x_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ care verifică enunțul au termenul general $x_n = n + 1$, $(\forall)\ n \in \mathbf{N}^*$ sau $x_n = n + 1 + 2(-1)^{n-1}$, $(\forall)\ n \in \mathbf{N}^*$.

Aplicația 4. (Problema C : 650 din Gazeta Matematică, enunț adaptat).

Fie $\mathcal{F} = \{f : \mathbf{R} \to \mathbf{R} \mid (\exists)\ a \in \mathbf{R}^*, b \in \mathbf{R}_+^*, c \in \mathbf{R}, f(x+a) = b \cdot f(x) + c, (\forall)\ x \in \mathbf{R}\}$.

Să se arate că $\mathcal{F}$ include mulțimea funcțiilor periodice, mulțimea funcțiilor polinomiale de gradul întîi și mulțimea funcțiilor exponențiale.

Soluție. Pentru $b = 1$ din teorema 1, rezultă că mulțimea $\mathcal{F}$ conține funcțiile $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, care au forma $f(x) = k(x) + \frac{c}{a} \cdot x$, $(\forall)\ x \in \mathbf{R}$, unde $k : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ este o funcție periodică arbitrară de perioadă $|a|$. Dacă $c = 0$, rezultă că $\mathcal{F}$ include mulțimea funcțiilor periodice de perioadă $|a|$ și cum a poate fi luat arbitrar în $\mathbf{R}^*$ deducem că $\mathcal{F}$ include mulțimea tuturor funcțiilor periodice $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$. Dacă $\frac{c}{a} = m \in \mathbf{R}^*$ și $k(x) = n \in \mathbf{R}$, $(\forall)\ x \in \mathbf{R}$, deducem că $\mathcal{F}$ include mulțimea tuturor funcțiilor polinomiale de gradul întîi. Dacă $b \neq 1$, conform teoremei 2, mulțimea funcțiilor $\mathcal{F}$ conține funcțiile $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, de forma $f(x) = b^{x a^{-1}} \cdot k(x) + \frac{c}{1-b}$, $(\forall)\ x \in \mathbf{R}$, unde $k : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ este o funcție periodică, arbitrară, de perioadă $|a|$. Alegînd $c = 0$ și $k(x) = 1$, $(\forall)\ x \in \mathbf{R}$ și notînd $b^{a^{-1}} = t$ rezultă $f(x) = t^x$ și prin urmare $\mathcal{F}$ include mulțimea tuturor funcțiilor exponențiale.

Aplicația 5. (Problema C : 766 din Gazeta Matematică, enunț parțial).

Fie $t \in \mathbf{R}_+^*$. Să se determine toate funcțiile continue $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ așa încît $\sin \circ f$ și $\cos \circ f$ sînt funcții periodice de perioadă t.

Soluție. Deoarece $\sin(f(x) + t) = \sin f(x)$, $(\forall)\ x \in \mathbf{R}$, deducem că oricare ar fi $x \in \mathbf{R}$ există $n_x \in \mathbf{Z}$ cu proprietatea că :

$$f(x + t) = f(x) + 2n_x\pi \text{ sau } f(x + t) = -f(x) + 2n_x\pi + \pi, \tag{12}$$

De asemenea din periodicitatea funcției $\cos \circ f$, deducem că oricare ar fi $x \in \mathbf{R}$ există $m_x \in \mathbf{Z}$ așa încît :

$$f(x + t) = f(x) + 2m_x\pi \text{ sau } f(x + t) = -f(x) + 2n_x\pi, \tag{13}$$

Din relațiile (12) și (13) rezultă că oricare ar fi $x \in \mathbf{R}$ există $n_x \in \mathbf{Z}$ așa încît

$$f(x + t) = f(x) + 2n_x\pi, \tag{14}$$

Vom arăta că numărul $n_x \in \mathbf{Z}$, din relația (14), este unic, adică nu depinde de $x \in \mathbf{R}$. Într-adevăr, notînd $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $g(x) = \frac{f(x+t) - f(x)}{2\pi}$, egalitatea (14) devine $g(x) = n_x$, $(\forall)\ x \in \mathbf{R}$. Deoarece funcția f este continuă pe $\mathbf{R}$ rezultă că și funcția g este continuă pe $\mathbf{R}$. Datorită faptului că $\operatorname{Im} g \in \mathbf{Z}$, deducem că există $n \in \mathbf{Z}$, așa încît $g(x) = n$, $(\forall)\ x \in \mathbf{R}$ și atunci, din relația (14), obținem $f(x + t) = f(x) + 2n\pi$, $(\forall)\ x \in \mathbf{R}$. Conform cu teorema 1 deducem că $f(x) = k(x) + \frac{2n\pi}{t} x$, $(\forall)\ x \in \mathbf{R}$, unde $k : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ este o funcție continuă și periodică, arbitrară, de perioadă t.

În legătură cu problema C : 766 din Gazeta Matematică, demonstrăm și

Propoziția 2. a) *Oricare ar fi $t \in \mathbf{R}_+^*$ există o infinitate de funcții continue $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, așa încît funcția $\sin \circ f$ are perioada t, iar funcția $\cos \circ f$ nu are perioada t.*

b) *Oricare ar fi $t \in \mathbf{R}_+^*$ există o infinitate de funcții continue $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, așa încît funcția $\cos \circ f$ are perioada t, iar funcția $\sin \circ f$ nu are perioada t.*

Demonstrație. a) Este suficient să demonstrăm că există o infinitate de funcții continue $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ cu proprietatea că există $n \in \mathbf{Z}$, așa încît :

$$f(x + t) = -f(x) + (2n + 1)\pi, \ (\forall)\ x \in \mathbf{R}, \tag{15}$$

Scanned with OKEN Scanner

Conform cu teorema 1 din egalitatea (15) deducem că

$$f(x) = (-1)^{\left[\frac{x}{t}\right]} \cdot k(x) + \frac{(-1)^{\left[\frac{x}{t}\right]} - 1}{-2} (2n+1)\pi, \quad (\forall)\ x \in \mathbf{R}, \tag{16}$$

unde $k : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ este o funcție periodică arbitrară de perioadă t. Este suficient deci să arătăm că există o infinitate de funcții periodice și continue $k : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, pentru care funcția f dată de (16), este continuă pe $\mathbf{R}$. Deoarece funcția k este continuă pe $\mathbf{R}$, atunci funcția f dată de (16) este continuă pe $\mathbf{R} - t\mathbf{Z}$. Pentru $m \in \mathbf{Z}$, fixat, avem:

$$\lim_{\substack{x \to mt \\ x < mt}} f(x) = (-1)^{m-1} \cdot k(mt) + \frac{(-1)^{m-1} - 1}{-2} \cdot (2n+1)\pi = (-1)^{m-1} \cdot k(0) +$$

$$+ \frac{1 - (-1)^{m-1}}{2} \cdot (2n+1)\pi; \quad \lim_{\substack{x \to mt \\ x > mt}} f(x) = (-1)^m k(mt) + \frac{(-1)^m - 1}{-2} \cdot (2n+1)\pi =$$

$$= (-1)^m k(0) + \frac{1-(-1)^m}{2} \cdot (2n+1)\pi = f(mt).$$

Impunînd condiția ca f să fie continuă în mt, rezultă $k(0) = n\pi + \frac{\pi}{2}$. În consecință, pentru orice funcție continuă și periodică $k : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, avînd perioada t, cu $k(0) = n\pi + \frac{\pi}{2}$, funcția f, dată de (16), este continuă pe $\mathbf{R}$.

b) Este suficient să arătăm că există o infinitate de funcții continue $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, așa încît $f(x+t) = -f(x) + 2n\pi$, $(\forall)\ x \in \mathbf{R}$, unde $n \in \mathbf{Z}$ este fixat. Procedînd ca la punctul a), rezultă:

$$f(x) = (-1)^{\left[\frac{x}{t}\right]} \cdot k(x) + \left(1 - (-1)^{\left[\frac{x}{t}\right]}\right) \cdot n\pi, \quad (\forall)\ x \in \mathbf{R}, \tag{17}$$

unde $k : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ este o funcție periodică arbitrară de perioadă t, continuă pe $\mathbf{R}$, așa încît $k(0) = n\pi$.

Observația 4. Problemele din aplicațiile 1—5 pot fi soluționate și altfel, deoarece în momentul propunerii lor în Gazeta Matematică, autorii lor nu cunoșteau rezultatele acestui articol.

În încheiere, propunem cititorului să utilizeze rezultatele din acest articol în rezolvarea problemelor C : 628, 21364 și O : 544 din Gazeta Matematică.

PROBLEME DIN MANUALE

Asupra unei inegalități geometrice

de Cornel Berceanu, profesor, Bacău

Scopul acestei note matematice este:

1) Demonstrația inegalității $\cos^2 \frac{B-C}{2} \geqslant \frac{2r}{R}$, (*), valabilă pentru orice triunghi ABC;

2) Obținerea unei condiții necesare și suficiente, respectiv a unei condiții necesare pentru ca în (*) să avem egalitate;

3) Construirea unui triunghi ABC în care: $\cos^2 \frac{B-C}{2} = \frac{2r}{R}$.

Scanned with OKEN Scanner

Comentariu. Relația lui *Euler*, $OI^2 = R(R - 2r)$ atrage atenția că (*) nu este banală și că în cazul cînd ABC este un triunghi echilateral, (*) se scrie cu egalitate.

Problema 1) figurează în manualul de geometrie de clasa a X-a și soluția prezentată acolo folosește principiul trinomului, metodă care nu sugerează elementele necesare pentru 2) și 3).

Soluție pentru relația (*): Fie $\mathcal{C}(O, R)$ cercul circumscris triunghiului ABC, $\{D\} = (AI \cap \mathcal{C}(O, R)$ și E punctul diametrul opus lui D. Notăm cu σ semiplanul deschis de frontieră BC care conține pe A. Avem:

$$AD = 2R\cos\frac{B-C}{2} \text{ și}$$

$$AI \cdot ID \leqslant \left(\frac{AI + ID}{2}\right)^2 = \frac{AD^2}{4} = R^2\cos^2\frac{B-C}{2}.$$

Cum $AI \cdot ID$ este puterea punctului I față de $\mathcal{C}(O, R)$, avem $AI \cdot ID = R^2 - OI^2 = R^2 - (R^2 - 2Rr) = 2Rr$ și obținem $2Rr \leqslant R^2\cos^2\frac{B-C}{2}$, de unde rezultă (*).

În (*) avem egalitate $\Leftrightarrow AI \cdot ID = \left(\frac{AI + ID}{2}\right)^2 \Leftrightarrow AI = ID \Leftrightarrow I = O$ sau $AI \perp AD$.

Ne propunem următoarea problemă de construcție:

Dacă B și C sînt puncte fixe pe $\mathcal{C}(O, R)$, iar A este mobil pe $\sigma \cap \mathcal{C}(O, R)$, să se construiască A astfel încît în (*) să avem egalitate.

Construcția lui I se face prin metoda intersecției de locuri geometrice, I fiind în intersecția dintre cercul de diametru OD cu arcul din σ capabil de $\frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}\cdot A$, de capete B și C (arcul capabil fiind $\mathcal{C}(D, DB) \cap \sigma$). Punctul I fiind construit, definim $\{A\} = (DI \cap \mathcal{C}(O, R)$.

Dacă $DB = 2R\sin\frac{A}{2} < R \Leftrightarrow A < \frac{\pi}{6}$, în intersecția celor două locuri geometrice vor fi punctele I_1 și I_2 (simetrice în raport cu DB).

Dacă $A = \frac{\pi}{3}$, atunci $I = O$ și triunghiul ABC este echilateral.

Dacă $A > \frac{\pi}{3}$, în (*) avem inegalitate strictă pentru orice $A \in \sigma \cap \mathcal{C}(O, R)$.

Așadar o condiție necesară ca în (*) să fie egalitate este ca $A \leqslant \frac{\pi}{3}$.

De asemenea, obținem următoarea caracterizare pentru triunghiul echilateral:

ABC este triunghi echilateral $\Leftrightarrow \Sigma\cos^2\frac{A-B}{2} = 24\,\Pi\sin\frac{A}{2}$.

CONCURSUL DE MATEMATICĂ

Clasele VI — VIII, etapa finală, Bacău — aprilie 1987

Clasa a VI-a

1. Un număr de trei cifre are suma cifrelor 7. Arătați că dacă numărul se divide cu 7, atunci cifra zecilor este egală cu cifra unităților.

* * *

2. Să se afle toate perechile de numere naturale pentru care suma dintre produsul lor și diferența lor este 1987.

I. Diaconu

3. Fie A' un punct oarecare pe baza BC a triunghiului ABC și fie I mijlocul segmentului AA'. Dreapta BI taie pe AC în M, iar dreapta CI taie pe AB în N. Paralela dusă din A' la AC taie pe BM în P, iar paralela dusă din A' la AB taie pe CN în Q. Să se arate că $MNPQ$ este paralelogram.

Scanned with OKEN Scanner

Clasa a VII-a (algebră)

1. Fie expresia $E(x) = x^2 - \frac{2}{m}x + \frac{m+1}{m}$. Să se arate că $E(x) > 0$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$ și orice $m > 1$.

I. Chițcă, A. Olaru

2. Să se arate că pentru orice x, y numere reale pozitive are loc inegalitatea $x + y \geq 2\sqrt{xy}$.

b) Fie a, b, c, d numere reale pozitive cu $abcd = 1$. Atunci are loc inegalitatea:

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + ab + ac + cd + da + ac + bd \geq 10.$$

* * *

3. Fie m și n numere naturale care se pot scrie ca sume de două pătrate de numere naturale. Să se arate că produsul $m \cdot n$ se poate scrie ca o sumă de două pătrate de două numere naturale.

* * *

4. Să se arate că pentru orice x întreg și orice a, $b \in Z$, impare, numărul $M = a^2x + 3a^2 - b^2x - 3b^2$ se divide cu 8.

C. Hărăbor

Clasa a VIII-a (algebră)

1. Să se arate că pentru $k \in N$, k impar, numărul $N = 10^{3k} + 2^{3k}$ se divide cu 7.

I. Mitrache

2. Fie polinomul:

$$P(X) = a_0 X^{2n} + a_1 X^{2n-1} + \ldots + a_{2n-1} X + a_{2n}$$

cu coeficienți reali. Fiind date:

$$b = a_0 + a_1 + \ldots + a_{2n} \text{ și}$$

$$c = a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + \ldots - a_{2n-1} + a_{2n},$$

să se determine restul lui $P(X)$ la împărțirea cu $X^2 - 1$.

C. Timiraș

3. Fie a, b, c numere întregi impare. Să se arate că nu există x număr rațional care să verifice relația:

$$ax^2 + bx + c = 0.$$

* * *

4. Fie a, b, $c \in N$, distincte și mai mari sau egale cu 2. Să se arate că

$$\left(1 - \frac{1}{a^2}\right)\left(1 - \frac{1}{b^2}\right)\left(1 - \frac{1}{c^2}\right) > \frac{1}{2}.$$

V. Brânzănescu

Clasa a VII-a (geometrie)

1. Fie ABC un triunghi cu toate unghiurile ascuțite, O centrul cercului circumscris și H ortocentrul triunghiului ABC. Presupunem că bisectoarea unghiului A este perpendiculară pe OH. Să se arate că $m(\widehat{BAC}) = 60°$.

* * *

2. Considerăm triunghiul ABC neisoscel și M mijlocul lui BC. Fie P un punct oarecare pe MA. Notăm cu E și F proiecțiile punctului P pe laturile AB, respectiv AC. Să se arate că $EF \| BC$ dacă și numai dacă $m(\widehat{BAC}) = 90°$.

I. Diaconu

3. Fie ABC un triunghi echilateral și M un punct oarecare pe baza BC, diferit de mijlocul lui BC. Perpendiculara în M pe BC taie paralela din A la BC în punctul O. Cercul de centru O și rază OM intersectează segmentele AB și AC în punctele P și Q. Să se arate că patrulaterul $AOQP$ este inscriptibil.

V. Brânzănescu

4. Într-un dreptunghi $ABCD$ în care $AB = a$, $BC = b$, $a < b$, se înscrie în alt dreptunghi $A'B'C'D'$ ($A' \in AD$, $B' \in AB$, $C' \in BC$, $D' \in CD$) cunoscîndu-se raportul $\frac{A'B'}{B'C'} = k > 0$. Să se calculeze lungimile laturilor dreptunghiului $A'B'C'D'$ în funcție de a, b, k și să se precizeze condițiile satisfăcute de k pentru care există dreptunghiul $A'B'C'D'$.

Acad. *N. Teodorescu*

Clasa a VIII-a (geometrie)

1. Fie $OABCD$ o piramidă patrulateră regulată cu vîrful O. Prin muchia AB se duce un plan oarecare α care taie muchiile OC, OD în M, respectiv N.
a) Să se arate că $ABMN$ este trapez isoscel;
b) Să se arate că aria triunghiului OBM este medie geometrică între ariile triunghiurilor OAB, și OMN.

V. Brânzănescu

2. În cubul $ABCDA'B'C'D'$ de muchie a se notează cu M, N mijloacele muchiilor AD respectiv AB, iar cu E, F mijloacele muchiilor $B'C'$, respectiv $C'D'$.
a) Să se demonstreze că planele $A'MN$ și CEF sînt paralele.
b) Să se calculeze distanța dintre planele $A'MN$ și CEF.

M. Trifu, I. Diaconu

3. Fie $ABCD$ un tetraedru regulat de muchie a și M un punct interior segmentului AC. Ducem prin M planul paralel cu muchiile AB și CD care taie muchiile BC, BD și AD respectiv în N, P și Q. Să se arate că patrulaterul $MNPQ$ este dreptunghi și să se determine $x = AM$ astfel încît aria lui $MNPQ$ să fie maximă.

V. Brânzănescu, D. Barșai

4. Fie $ABCD$ un tetraedru oarecare și M un punct pe muchia AD. Să se arate că raportul $\frac{AM}{MD}$ este egal cu raportul ariilor triunghiurilor ABC și DBC dacă și numai dacă M este egal depărtat de fețele ABC și DBC.

* * *

SUBIECTELE DATE LA ADMITEREA ÎN ÎNVĂȚĂMÎNTUL SUPERIOR ÎN ANUL 1988

A. ÎNVĂȚĂMÎNTUL UNIVERSITAR (Facultățile de matematică)

a. ALGEBRĂ

I. Sesiunea specială, iunie 1988, pentru componenții echipelor olimpice participante la olimpiadele internaționale

1. Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația

$$x^2 + 6x + \sqrt{x^2 + 6x} = 20.$$

2. Fie $P = X^3 + aX^2 + bX + c \in \mathbb{R}[X]$. Să se arate că rădăcinile polinomului P au aceeași parte reală dacă și numai dacă sînt îndeplinite condițiile $c = \frac{ab}{3} - \frac{2a^3}{27}$ și $3b \geqslant a^2$.

3. Să se determine termenul general al șirului $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ definit prin relația de recurență $(n+2)(n+1) \cdot a_{n+2} = n^2 \cdot a_n$, $(\forall)\ n \in \mathbb{N}^*$ știind că $a_1 = 0$ și $a_2 = 1$.

4. Fie $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $A = (a_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$. Dacă $a_{ij} = \bar{a}_{ji}$ oricare ar fi $(i,j) \in \{1,2,\ldots,n\} \times \{1,2,\ldots,n\}$ unde $\bar{a}_{ji}$ este conjugatul numărului complex a_{ji} să se arate că $\det A$ este un număr real.

5. a) Să se determine subgrupurile finite ale grupului $(\mathbb{R}, +)$.
b) Să se determine subgrupurile finite ale grupului $(\mathbb{R}^*, \cdot)$.

II. 15 iulie 1983, ora 10,00

1. Fie $a \in \mathbb{R}^*$ și $x, y, z \in \mathbb{R}^*$ care satisfac relațiile $x + y + z = a$, $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{a}$. Să se arate că printre numerele x, y, z există două dintre ele care au suma nulă.

2. Să se stabilească egalitatea $\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} k C_n^k = 0$, $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$.

3. Fie $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ o matrice singulară nenulă. Să se arate că există o funcție $f : \mathbb{R}^4 \times \mathbb{N}^* \to \mathbb{R}$ astfel încît $A^n = f(a,b,c,d)A$ pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$ și orice $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ în condițiile date.

4. Fie $f \in \mathbb{Z}_4[X]$, $f = X^3 + \hat{2}X^2 + X + \hat{1}$. Să se determine toate polinoamele $g = aX^3 + bX^2 + cX + d \in \mathbb{Z}_4[X]$ cu proprietatea că $\tilde{g} = \tilde{f}$, ($\tilde{f} : \mathbb{Z}_4 \to \mathbb{Z}_4$ este funcția polinomială asociată lui f).

5.1) Fie $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $B = (b_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$. Dacă $\bar{b}_{ij}$ este conjugatul numărului complex b_{ij}, notăm $\bar{B}$ matricea $(\bar{b}_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$. Să se arate că $\det \bar{B} = \overline{\det B}$ și că $\det(B \cdot \bar{B})$ este un număr real pozitiv.

2) Fie $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Să se arate că $\det(A^2 + I_n) \geqslant 0$.

b. ANALIZA MATEMATICĂ

III. Iunie 1983, sesiunea specială pentru componenții echipei olimpice

1. Să se dea definiția continuității unei funcții într-un punct și să se menționeze cîteva proprietăți ale funcțiilor continue pe un compact. Să se studieze continuitatea funcției $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$ definită de

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin \pi x^2}{\pi x}, & \text{dacă } 0 < x \leqslant 1 \\ m, & \text{dacă } x = 0 \\ e^{-1} \cdot (1+x)^{\frac{1}{x}}, & \text{dacă } -1 \leqslant x < 0, \end{cases}$$

unde m este un parametru real.

2. Fie $f : [a,b] \to [a,b]$ o funcție continuă pe întreg intervalul compact $[a,b]$. Să se arate că ecuația $f(x) = x$ admite cel puțin o rădăcină $x \in [a,b]$. Este adevărat acest rezultat pentru funcții $f : I \to I$ continue pe un interval necompact? Dați un exemplu.

3. Să se determine extremele funcției $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definită de $f(x) = a^x - (a-1)x$ unde $a > 0$, $a \neq 1$.

4. Să se calculeze $\int_{-1}^{1} \frac{x + [x]}{|x| + [x] + 2}\, dx$ unde am notat cu $[x]$ partea întreagă a lui $x \in \mathbb{R}$.

Scanned with OKEN Scanner

3. Fie $f:[0,\infty)\to\mathbb{R}$ o funcție continuă astfel încît $\lim_{x\to\infty} f(x)=l$. Considerăm funcția

$$g:[0,\infty)\to\mathbb{R} \text{ definită de } g(t)=\int_0^1 f(tx)\,dx.$$

i) Să se arate că există $\lim_{t\to\infty} g(t)$ și să se calculeze această limită.

ii) Să se calculeze $\lim_{t\to 0} g(t)$. Să se arate că g este derivabilă pe $(0,\infty)$ și să se calculeze derivata sa.

IV. 16 iulie 1988, ora 10,00

1. i) Să se arate că pentru orice $a\in\mathbb{R}$ ecuația $x+x^3=a$ admite o rădăcină reală unică.

ii) Fie șirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definit prin recurență astfel $x_{n+1}+x_{n+1}^3=x_n$, $n\in\mathbb{N}$, $x_0>0$. Să se arate că șirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este convergent și să se determine limita sa.

2. Să se calculeze cu ajutorul teoremei lui l'*Hospital* limita $\lim_{x\to 0}\dfrac{\sin x+x\cos x}{e^x-e^{-x}-2\sin x}$ și să se enunțe teorema utilizată.

3. Fie f, g: $[a,b]\to\mathbb{R}$ funcții continue pe intervalul compact $[a,b]$ și derivabile pe (a,b). Să se arate că dacă $f(a)=f(b)=0$ și $f'(x)\cdot g(x)-f(x)\cdot g'(x)\neq 0$, $(\forall)x\in(a,b)$ atunci există cel puțin un punct $c\in[a,b]$ astfel încît $g(c)=0$.

4. Să se determine punctele de extremum local ale funcției

$$f(x)=\begin{cases}|x^3-1|, & \text{dacă } |x|\geqslant 1\\ e-e^{x^2}, & \text{dacă } |x|<1.\end{cases}$$

5. Să se calculeze integrala $\int_0^2 \max(\ln(1+x^2),1)\,dx$.

c. GEOMETRIE PLANĂ ȘI ÎN SPAȚIU, GEOMETRIE ANALITICĂ ȘI TRIGONOMETRIE

V. iunie 1988, sesiunea specială pentru componenții echipei olimpice

1. Se consideră un trapez circumscris unui cerc de rază r. Să se arate că $d_1^2+d_2^2\geqslant 16r^2$ unde d_1 și d_2 sînt lungimile diagonalelor trapezului.

2. În triunghiul ABC bisectoarele interioare ale unghiurilor $\hat{A}$ și $\hat{B}$ taie (BC) și (AC) în M și respectiv N. Fie $\{O\}=[AM]\cap[BN]$. Se știe că $\dfrac{AO}{OM}=\sqrt{3}$, $\dfrac{ON}{BO}=\sqrt{3}-1$. Să se calculeze măsurile unghiurilor triunghiului ABC.

3. Într-un plan se consideră șapte drepte distincte cu proprietatea că oricare două dintre ele sînt concurente. Să se demonstreze că există o pereche de astfel de drepte care formează un unghi mai mic de 26°.

4. Se consideră o sferă de centru O și două puncte A și B interioare sferei, necoliniare cu O. Să se arate că în mulțimea planelor ce conțin punctele A și B există unul și numai unul cu proprietatea că cercul după care el intersectează sfera este de rază minimă.

5. Se dau două sfere. Să se construiască un plan care intersectează cele două sfere după cercuri de raze egale.

VI. 17 iulie 1988, ora 10,00

1. Punctele A, B, C sînt vîrfurile unui triunghi în care oricare două laturi diferite au lungimile diferite. În cîte moduri poate fi ales un punct D în planul triunghiului ABC, astfel încît mulțimea $\{A,B,C,D\}$ să admită o axă de simetrie?

Scanned with OKEN Scanner

2. Se consideră un poligon regulat convex (ale cărui vîrfuri sînt notate succesiv) $A_0A_1A_2\ldots A_{n-1}$, cu $n \geqslant 4$ și lungimea laturii egală cu 1. Se notează $\{B_2\} = [A_1A_{n-1}] \cap [A_0A_2]$, $\{B_3\} = [A_1A_{n-1}] \cap [A_0A_3]$, ..., $\{B_{n-2}\} = [A_1A_{n-1}] \cap [A_0A_{n-2}]$. Să se demonstreze că în oricare dintre triunghiurile $A_0A_1B_2$, $A_0B_2B_3$, ..., $A_0B_{n-2}A_{n-1}$, există o latură a cărei lungime este egală cu produsul lungimilor celorlalte două laturi.

3. Se consideră un poligon regulat convex cu n laturi și un punct P în interiorul său. Să se demonstreze că $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{d_k} > \frac{2\pi}{l}$, unde d_1, d_2, ..., d_n sînt distanțele punctului P la laturile poligonului, iar l este lungimea laturii poligonului.

4. O piramidă are toate muchiile congruente. Să se arate că baza ei nu poate fi un poligon cu șapte laturi.

5. Fie a, b, c trei tangente distincte la o parabolă, care se intersectează două cîte două în trei puncte distincte $a \cap b = \{A_3\}$, $b \cap c = \{A_1\}$, $c \cap a = \{A_2\}$. Să se demonstreze că focarul parabolei se află pe cercul circumscris triunghiului $A_1A_2A_3$.

VII. iulie 1988, secția matematică, 3 ani

1. Să se rezolve inecuația $\log_{\frac{x+4}{2}} \left(\log_2 \frac{2x-1}{3+x}\right) < 0$.

2. Se consideră primii n termeni ai unei progresii geometrice $a_1, a_2, \ldots, a_n$, $(n \geqslant 2)$. Presupunînd cunoscute sumele $s_1 = \sum_{k=1}^{n} a_k$, $s_2 = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k}$, să se calculeze $P = \prod_{k=1}^{n} a_k$.

3. Să se demonstreze că în orice triunghi ABC are loc inegalitatea

$$\sin \frac{A}{2} \leqslant \frac{a}{2\sqrt{bc}}.$$

4. Vîrfurile unui patrulater convex sînt notate succesiv $A_1A_2A_3A_4$. Fie M mijlocul segmentului (A_1A_4) și N mijlocul segmentului (A_2A_3). Să se demonstreze că dacă $MN = \frac{1}{2}(A_1A_2 + A_3A_4)$ atunci dreapta ce trece prin A_1 și A_2 este paralelă cu dreapta ce trece prin A_3 și A_4.

5. Să se demonstreze că dacă într-un tetraedru $[ABCD]$, AB este perpendiculară pe BD și AC este perpendiculară pe CD atunci piciorul înălțimii tetraedrului dusă din vîrful A se află pe cercul circumscris triunghiului BCD.

B. ÎNVĂȚĂMÎNTUL SUPERIOR TEHNIC

a. ALGEBRA ȘI ANALIZA MATEMATICĂ

VIII. iunie 1988, sesiunea specială pentru componenții seției olimpice

1. a) Fie $a, b, c \in \mathbf{R}$ și $a + b + c = 1$. Să se arate că $a^2 + b^2 + c^2 \geqslant \frac{1}{3}$.

b) Fie $m, n, p \in \mathbf{R}_+$ și $mnp = 1$. Să se arate că $m + n + p + mn + np + pm \geqslant 6$.

2. Să se rezolve inecuația $\log_a x + \log_{ax} x > 0$; discuție după parametrul real $a > 0$, $a \neq 1$.

3. Fie $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = \arcsin \frac{2x}{1+x^2}$. Să se determine punctele în care funcția f nu este derivabilă și să se traseze graficul său.

4. Să se calculeze $\int_0^{\frac{\pi}{4}} x \operatorname{tg}^2 x \, dx$. Ținînd seama că pe $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$, $\operatorname{tg}^2 x \leqslant 1$, să se deducă inegalitatea $\ln 2 \geqslant \frac{\pi(4-\pi)}{8}$.

Scanned with OKEN Scanner

5. Fie $P: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ o funcție polinomială de gradul n, $n \geq 2$. Să se arate că:

a) Dacă $x_1 \in \mathbf{R}$ este o rădăcină de multiplicitate n_1, $(n_1 \geq 2)$ a lui P, atunci x_1 este o rădăcină de multiplicitate $n_1 - 1$ a derivatei P'; pentru $n_1 = 1$ arătați că x_1 nu este rădăcină a lui P'.

b) Dacă toate rădăcinile lui P sînt reale, atunci derivata P' are, de asemenea, toate rădăcinile reale.

IX. 15 iulie 1988, ora 10,00

1. Fie polinomul $P = 5X^6 - 4X^4 + 5X^3 + 5X^2 - 4X + 5 \in \mathbf{C}[X]$. Să se descompună P în factori ireductibili peste $\mathbf{R}$.

2. Să se determine parametrul real a, pentru care funcția $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = \ln(1 + x^2) - ax$ este strict crescătoare pe $\mathbf{R}$. Pentru $a = -\frac{3}{2}$, știind că $0{,}6931 < \ln 2 < 0{,}6932$, să se calculeze cu trei zecimale exacte valoarea $\frac{1}{2} \cdot f(1)$.

3. Fie $G = \left\{ A = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbf{R}) \;\middle|\; t \in \mathbf{R} \right\}$.

i) Arătați că G este parte stabilă a lui $\mathcal{M}_2(\mathbf{R})$ în raport cu înmulțirea matricelor.

ii) Arătați că $(G, \cdot)$ este grup abelian.

4. Să se determine rădăcinile reale ale ecuației $e^x = mx^2$, m fiind un parametru real. Pentru $m = \sqrt{e}$ să se arate că ecuația are o rădăcină în intervalul $(-1, 0)$.

5. Fie $I_n = \int_1^e (\ln x)^n \, dx$.

i) Să se arate că șirul $(I_n)_{n \geq 1}$ este monoton și mărginit.

ii) Să se găsească o relație între I_n și I_{n-1} și să se calculeze $\lim_{n \to \infty} I_n$.

X. 15 iulie 1988, ora 16,00

1. Să se demonstreze inegalitatea $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k} > \frac{13}{24}$, $(\forall)$ $n \geq 2$.

2. Să se determine valorile parametrului $a \in \mathbf{R}$ astfel încît ecuația $x^4 + 2x^3 + ax^2 + 2x + 1 = 0$, să aibă toate rădăcinile reale.

3. Să se reprezinte grafic funcția $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = \sqrt{x^2 + 2|x|}$ și să se calculeze aria cuprinsă între grafic, axa Ox și dreptele de ecuații $x = 0$ și $x = 1$.

4. Fie $H_1 = \{A \in \mathcal{M}_2(\mathbf{R}) \mid {}^tA = A\}$ și $H_2 = \{A \in \mathcal{M}_2(\mathbf{R}) \mid {}^tA = -A\}$, unde ${}^tA$ este transpusa matricei A.

i) Să se arate că H_1 și H_2 sînt subgrupuri ale grupului $(\mathcal{M}_2(\mathbf{R}), +)$.

ii) Să se arate că pentru orice $A \in \mathcal{M}_2(\mathbf{R})$ există matricele $B \in H_1$ și $C \in H_2$ astfel încît $A = B + C$.

5. Fie m un parametru real.

i) Să se arate că pentru orice $m \leq 0$, inegalitatea $e^x \geq mx + 1$ are loc pentru orice $x \in [0, \infty)$.

ii) Să se afle valorile lui $m > 0$ pentru care inegalitatea $e^x \geq mx + 1$ are loc pentru orice $x \in [0, \infty)$.

XI. 18 iulie 1988, ora 10,00

1. Fie $f: (-\infty, 2] \to \mathbf{R}$, $f(x) = \sqrt{2 - x} - x$. Să se rezolve ecuația $f(x) = 0$ și inecuația $\ln f(x) \leq 0$.

2. Fie $P = X^4 - (3m + 2)X^2 + m^2 \in \mathbf{R}[X]$. Să se determine valorile parametrului real m, astfel încît rădăcinile x_1, x_2, x_3, x_4 ale polinomului P să verifice relațiile $x_2 - x_1 = x_3 - x_2 = x_4 - x_3$. Pentru valorile lui m astfel determinate să se afle rădăcinile x_1, x_2, x_3, x_4.

3. Să se traseze graficul funcției $f: (-\infty, -2) \cup (0, \infty) \to \mathbf{R}$, $f(x) = \ln\left(1 + \frac{2}{x}\right)$ și să se calculeze limita șirului cu termenul general $a_n = \sum_{k=1}^{n} f(k) - \ln \frac{n(n+1)}{2}$, $n \geq 1$.

Scanned with OKEN Scanner

4. Fie $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ astfel încît $AB = BA$. Să se arate că au loc egalitățile $A^m B^k = B^k A^m$, $(\forall)\, k,\ m \in \mathbb{N}^*$ și $A^m - B^m = (A - B)(A^{m-1} + A^{m-2}B + \ldots + AB^{m-2} + B^{m-1})$, $(\forall) m \in \mathbb{N},\ m \geq 2$.

5. Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{1}{3 + \cos x}$.

i) Să se determine primitivele lui f pe intervalul $[0, \pi)$.

ii) Să se determine primitivele lui f pe intervalul $[0, 2\pi]$ și să se calculeze $\int_0^{2\pi} f(x)\,dx$.

XII. 18 iulie 1988, ora 16,00

1. Să se rezolve în $\mathbb{R}$ sistemul:

$$\begin{cases} ax + y + z = 1 \\ x + ay + z = 0 \\ x + y + az = -1. \end{cases}$$

Discuție după $a \in \mathbb{R}$.

2. Să se determine primitivele funcției

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = x - 2 + \sqrt{x^2 - 2x + 1} + \sqrt{x^2 - 6x + 9}.$$

3. Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt[3]{x^3 - 3x + 2}$. Să se determine punctele în care funcția f nu este derivabilă și să se traseze graficul său.

4. Să se determine restul împărțirii polinomului $P = X^{2n} + X^n + X^2 + 1 \in \mathbb{R}[X]$ prin $(X - 1)^2$.

5. i) Să se arate că șirul cu termenul general $a_n = \dfrac{1}{2^{2n}} C_{2n}^n$, $n \geq 1$ este monoton și mărginit.

ii) Folosind eventual inegalitatea $\dfrac{\sqrt{(2k-1)(2k+1)}}{2k} < 1$, $k \in \mathbb{N}^*$ să se calculeze $\lim\limits_{n \to \infty} a_n$.

XIII. Sesiunea septembrie 1988

1. Fie $a \in \mathbb{R}^*$. Să se determine $x, y, z \in \mathbb{R}^*$, care satisfac simultan relațiile $x + y + z = a$, $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z} = \dfrac{1}{a}$, $xy + yz + zx = -2$.

2. Să se determine $m \in \mathbb{R}$ astfel încît sistemul următor să aibă soluție nenulă și în acest caz să se rezolve sistemul:

$$\begin{cases} x - 2y + z - t = 0 \\ 2x - y + 3z - 3t = 0 \\ x + y + z + t = 0 \\ 2x + (m-1)y + 2z + mt = 0. \end{cases}$$

3. Fie $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{2 \ln x - 1}{x^2}$. Să se traseze graficul funcției f (folosind și derivata a doua) și să se calculeze aria cuprinsă între graficul lui f, axa Ox și dreptele de ecuații $x = \sqrt{e}$, $x = e$.

4. Să se determine $a \in \mathbb{Z}$ astfel încît $\mathbb{Z}$ împreună cu legea de compoziție „$*$", $x * y = x + y - axy$, pentru orice $x, y \in \mathbb{Z}$, să fie un grup abelian.

5. Fie $g : \mathbb{R} \setminus \{-1\} \to \mathbb{R}$, $g(x) = \dfrac{1}{1 + x}$ și fie șirul $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $a_n = \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{(-1)^k}{k!} \cdot g^{(k)}(1)$, unde $g^{(k)}$ este derivata de ordinul k, $k \in \mathbb{N}^*$, $g^{(0)} = g$ și $n \in \mathbb{N}$ (se cunoaște convenția $0! = 1$). Să se calculeze $\lim\limits_{n \to \infty} a_n$.

Scanned with OKEN Scanner

XIV. Septembrie 1988, Academia militară

1. Să se rezolve ecuația

$$\frac{1}{2}(\lg(x+1)+\lg 2+\lg(0{,}25))=\lg 20-\lg\sqrt{x+1}.$$

2. Fie $f(x)=x^2-4x+4\,I_3$ unde I_3 este matricea unitate de ordinul 3. Dacă $A=\begin{pmatrix}0 & a & 0\\ 1 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}$, să se determine $a\in\mathbb{R}$ astfel încît

$$f(A)=\begin{pmatrix}3 & 4 & -1\\ -3 & 3 & -3\\ -3 & -1 & 1\end{pmatrix}.$$

3. Să se determine valorile extreme ale funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt{(x-2)^2+4}$.

4. Fie $f:\mathbb{R}\setminus\{-a\}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{1}{x+a}$, $a>0$ și șirul $(x_n)_{n\geq 0}$, $x_n=\sum_{k=0}^{n}\dfrac{(-1)^k}{k!}\times$ $\times f^{(k)}(a)$. Să se studieze convergența șirului $(x_n)_{n\geq 0}$ și în caz de convergență să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

5. Să se calculeze $I=\int_0^{\pi}x\sin^2 x\,dx$.

b. GEOMETRIE PLANĂ, GEOMETRIE ÎN SPAȚIU ȘI TRIGONOMETRIE

XV. 16 iulie 1988, ora 10,00

1. Fie L un patrulater convex și $(\mathcal{C}_1)$, $(\mathcal{C}_2)$, $(\mathcal{C}_3)$, $(\mathcal{C}_4)$ cercurile ce au drept diametre laturile lui L. Să se demonstreze că $[L]\subset\bigcup_{i=1}^{4}[\mathcal{C}_i]$ unde $[L]=L\cup\operatorname{Int}L$, $[\mathcal{C}_i]=(\mathcal{C}_i)\cup\operatorname{Int}\mathcal{C}_i$, $i=1,2,3,4$.

2. Fie σ aria unui patrulater $ABCD$ circumscris unui cerc și σ' aria patrulaterului ce are ca vîrfuri punctele de contact ale laturilor patrulaterului $ABCD$ cu cercul. Să se demonstreze că

$$\sigma'=2\sigma\cdot\sin\frac{A}{2}\cdot\sin\frac{B}{2}\cdot\sin\frac{C}{2}\cdot\sin\frac{D}{2}.$$

3. Se consideră un triunghi ABC avînd toate unghiurile ascuțite. Fie A', B', C' picioarele înălțimilor duse din A, B și respectiv C. Să se demonstreze că $\dfrac{p(ABC)}{p(A'B'C')}=\dfrac{R}{r}$ unde $p(ABC)$ este perimetrul triunghiului ABC, $p(A'B'C')$ este perimetrul triunghiului $A'B'C'$, R este raza cercului circumscris triunghiului ABC, iar r raza cercului înscris în triunghiul ABC.

4. Să se demonstreze că nu există poligoane convexe care să aibă mai mult de trei unghiuri ascuțite.

5. Într-o piramidă triunghiulară $VABC$, $(VA)\equiv(VB)\equiv(VC)$. Să se arate că piciorul perpendicularei din V pe planul (ABC) coincide cu centrul cercului circumscris triunghiului ABC.

XVI. 16 iulie 1988, ora 16,00

1. Să se arate că dacă a_i și α_i, $i=1,2,\ldots,n$ sînt numere reale astfel încît $\sum_{i=1}^{n}a_i\cos\alpha_i=$ $=0$ și $\sum_{i=1}^{n}a_i\cos(1+\alpha_i)=0$ atunci pentru orice $\beta\in\mathbb{R}$ este adevărată egalitatea

$$\sum_{i=1}^{n}a_i\cos(\alpha_i+\beta)=0.$$

2. Într-un plan α se consideră un triunghi echilateral ABC și un punct P astfel încît $PA = 2$ și $PB = 3$. Să se arate că $PC \leqslant 5$.

3. Se consideră un patrulater convex (cu vîrfurile notate succesiv) $A_1A_2A_3A_4$. Pe latura $[A_1A_2]$ se ia un punct M și un punct P astfel încît $A_1M = MP = PA_2$, iar pe $[A_3A_4]$, punctele R și Q astfel încît $A_4R = RQ = QA_3$. Să se arate că $\sigma[MPQR] = \frac{1}{9} \cdot \sigma[A_1A_2A_3A_4]$.

4. Fie punctul P variabil pe cercul circumscris triunghiului ABC. Se notează cu M piciorul perpendicularei din P pe AB, și cu N piciorul perpendicularei din P pe AC. Să se determine poziția punctului P pentru care $[MP]$ este de lungime maximă și să se calculeze lungimea maximă a lui $[MN]$ în funcție de elementele triunghiului ABC.

5. Să se determine mulțimea tuturor punctelor M din spațiu cu proprietatea că diferența pătratelor distanțelor la două puncte fixe A și B este un număr dat.

XVII. 19 iulie 1988, ora 16,00

1. Se consideră două patrulatere convexe $A_1A_2A_3A_4$ și $A_1'A_2'A_3'A_4'$, în ambele patrulatere vîrfurile fiind notate succesiv. Presupunem că (A_1A_2) are același mijloc cu $(A_1'A_2')$ și analog (A_2A_3) cu $(A_2'A_3')$, (A_3A_4) cu $(A_3'A_4')$ și (A_4A_1) cu $(A_4'A_1')$. Să se arate că cele două patrulatere au aceeași arie.

2. Fie $\mathcal{C}(O, r)$ cercul înscris în triunghiul $A_1A_2A_3$ și d_1, d_2, d_3 tangentele la $\mathcal{C}(O, r)$, paralele cu laturile triunghiului: $A_1A_2A_3$, (adică $d_1 \| A_2A_3$, $d_2 \| A_3A_1$, $d_3 \| A_1A_2$) și $\{C_3\} = d_3 \cap A_3A_1$, $\{C_1\} = d_1 \cap A_1A_2$, $\{C_2\} = d_2 \cap A_2A_3$. Fie $\mathcal{C}(O_i, r_i)$, $i = 1,2,3$ cercul circumscris triunghiului $A_iB_iC_i$. Să se demonstreze că $r_1 + r_2 + r_3 = r$.

3. Fie $ABCD$ un pătrat cu latura de lungime 1. Să se demonstreze că pentru orice punct P din interiorul pătratului cel mult una dintre distanțele PA, PB, PC, PD poate fi strict mai mare decît $\frac{\sqrt{5}}{2}$.

4. În mulțimea triunghiurilor care au același perimetru să se determine acelea pentru care $\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c}$ este minimă.

5. Să se demonstreze că dacă într-un tetraedru muchiile opuse sînt două cîte două perpendiculare atunci cele șase mijloace ale muchiilor sînt pe o sferă.

XVIII. Sesiunea septembrie 1988

1. Se consideră un triunghi ABC, punctul $M \in (AC)$ astfel încît $(AM) \equiv (MC)$ și punctul $L \in (BM)$ astfel încît $\frac{BL}{LM} = \frac{1}{2}$. Fie K punctul în care dreapta ce trece prin A și L intersectează (BC). Să se calculeze $\frac{\sigma[ABK]}{\sigma[ABC]}$.

2. Să se demonstreze că singurul poligon regulat convex $A_1A_2 \ldots A_n$, $n \geqslant 4$, în care este adevărată egalitatea $\frac{1}{A_1A_2} = \frac{1}{A_1A_3} + \frac{1}{A_1A_4}$ este poligonul regulat convex cu șapte laturi.

3. Tangentele în punctele A și B la cercul circumscris triunghiului ABC se intersectează în punctul S. Fie $\{M\} = [SC] \cap [AB]$. Să se arate că $\frac{AM}{MB} = \frac{AC^2}{BC^2}$.

4. Într-un trapez $ABCD$ $(BC \| AD)$ diagonalele $[AC]$ și $[BD]$ se intersectează în punctul O. Fie σ_1 aria triunghiului BOC și σ_2 aria triunghiului AOD. Să se arate că aria trapezului $ABCD$ este $\sigma[ABCD] = \sigma_1 + \sigma_2 + 2\sqrt{\sigma_1 \cdot \sigma_2}$.

5. Se consideră un triunghi ABC și un punct V care nu aparține planului (ABC). Să se găsească un punct P în interiorul triunghiului ABC astfel încît volumele tetraedrelor $[VAPB]$, $[VBPC]$ și $[VCPA]$ să fie egale.

XIX. Sesiunea septembrie 1988, Academia militară

1. În triunghiul ABC se împart medianele $[AA']$, $[BB']$, $[CC']$ prin punctele M, N, P în același raport k, adică $\frac{MA}{MA'} = \frac{NB}{NB'} = \frac{PC}{PC'} = k$. Să se demonstreze că triunghiurile ABC și MNP sînt asemenea și să se determine raportul lor de asemănare în funcție de k.

Scanned with OKEN Scanner

2. Se consideră triunghiul ABC în care $AB = R\sqrt{3}$, unde R este raza cercului circumscris triunghiului ABC iar $\mu(\widehat{BAC}) = x$.

a) Să se determine lungimile celorlalte laturi și măsurile unghiurilor triunghiului în funcție de x și R.

b) Să se determine x pentru care este îndeplinită relația $AC^2 - BC^2 = 3R^2$.

3. O piramidă cu baza hexagon regulat înscris într-un cerc de rază R are muchiile laterale congruente între ele și de lungime comună $L = R\sqrt{2}$. Să se calculeze:

a) Volumul și aria laterală a piramidei;

b) Aria hexagonului rezultat prin secționarea piramidei cu un plan paralel cu planul bazei, la distanța x de vîrf.

4. Să se arate că dacă într-un triunghi ABC există relația $\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C = 2$, atunci triunghiul este dreptunghic.

5. Să se rezolve ecuația $\sin x + \cos x + \sin x \cdot \cos x = 1$.

XX. 18 iulie 1988, ora 10,00, subingineri

1. Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația

$$\sqrt{x^2 - 1} + 1 = \sqrt{x^2 + \sqrt{2x + 18}}.$$

2. Să se afle valoarea parametrului real m și să se rezolve ecuația $x^3 + 3x^2 - x - m = 0$, știind că rădăcinile sale sînt în progresie aritmetică.

3. Dacă $X \in \mathcal{M}_2(\mathbf{R})$ să se rezolve ecuația matriceală:

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 8 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 5 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 13 \\ -4 & -7 \end{pmatrix}.$$

4. Să se rezolve ecuația $\cos^2 x + 4 \sin x \cdot \cos x - 2 \sin^2 x = 2$.

5. Fie $\mathcal{C}_1$ și $\mathcal{C}_2$ două cercuri secante în A și B. Tangenta în A la cercul $\mathcal{C}_1$ se intersectează cu cercul $\mathcal{C}_1$ din nou în D, iar tangenta în A la cercul $\mathcal{C}_1$ se intersectează din nou cu cercul $\mathcal{C}_2$ în E. Să se stabilească egalitatea $AD^2 \cdot BE = AE^2 \cdot BD$.

XXI. Subingineri, septembrie 1988, Academia militară

1. Să se rezolve ecuația $x^4 - 7x^3 + 21x^2 + ax + b = 0$ și să se determine constantele $a, b \in \mathbf{R}$, știind că $1 + 2i$ este o rădăcină a sa.

2. Se dau matricele $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ și $X = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ u & v \end{pmatrix}$, unde $u, v \in \mathbf{R}$.

a) Să se determine u și v astfel încît $AX = XA$;

b) Să se calculeze A^n, $n \in \mathbf{N}^*$.

3. În triunghiul ABC unghiul $\hat{A}$ este de două ori mai mare decît unghiul B.

a) Să se determine măsurile unghiurilor A, B, C atunci cînd triunghiul este isoscel sau dreptunghic.

b) Notînd cu D intersecția bisectoarei unghiului $\widehat{BAC}$ cu latura $[BC]$, să se arate că bisectoarea unghiului $\widehat{ADC}$ este paralelă cu AB.

4. Fie $E_1 = 1 + \cos x + \cos 2x$ și $E_2 = \sin x + \sin 2x + \sin 3x$.

a) Să se transforme E_1 și E_2 în produse.

b) Să se rezolve ecuația $E_1 = E_2$.

C. ÎNVĂȚĂMÎNTUL ECONOMIC

XXII. 15 iulie 1988, ora 10,00

1. Să se rezolve ecuația $4x^3 - 12x^2 + 11x - a = 0$ și să se determine parametrul real a știind că rădăcinile sale sînt în progresie aritmetică.

2. Fie $A = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbf{C})$. Să se afle valorile lui a pentru care matricea A este inversabilă și să se calculeze în acest caz A^{-1}.

Scanned with OKEN Scanner

3. Fie $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f(x)=\dfrac{x^2}{\sqrt{x^2+1}}$. Să se afle aria mulțimii cuprinse între graficul funcției f, axa Ox și dreptele de ecuații $x=-1$ și $x=1$.

4. Să se arate că au loc inegalitățile $1<\dfrac{x}{\sin x}\leqslant\dfrac{\pi}{2}$, pentru orice $x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right]$.

5. Să se calculeze limita $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{1}{2}\left(a^{\frac{1}{x}}+b^{\frac{1}{x}}\right)\right)^x$, unde $a,b\in\mathbf{R}$, $a>1$, $b>1$.

XXIII. 15 iulie 1988, ora 16,00

1. Să se rezolve inecuația $\lg 2+\lg(4^{x-2}+9)\leqslant 1+\lg(2x-1+1)$, logaritmii fiind în baza 10.

2. Să se rezolve în mulțimea numerelor reale sistemul:

$$\begin{cases} mx+2y+2z=1\\ mx+3y+2z=1\\ mx+2y+5z=2n-1.\end{cases}$$

Discuție după parametrii reali m și n.

3. Fie $f,\ g\in\mathbf{Z}_5[X]$, $f=\hat{3}X^5+X^3+\hat{2}X+\hat{4}$, $g=X^3+\hat{4}X^2+\hat{3}$. Să se arate că f și g sînt prime între ele.

4. Să se determine $a\in\mathbf{R}$ astfel încît $\int\limits_a^{a+1}(x^3+4)\,dx=\dfrac{25}{2}$.

5. Să se determine $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^{2n+1}-x^2+6}{x^{2n}+x^2+4}$, $n\in\mathbf{N}^*$ și să se reprezinte grafic.

XXIV. 18 iulie 1988, ora 10,00

1. Fie $f\in\mathbf{Z}[X]$, $f=a_0+a_1X+a_2X^2+a_3X^3$. Determinați coeficienții polinomului f dacă $f(1)+f(2)+\ldots+f(n)=n^4$, pentru orice $n\in\mathbf{N}^*$.

2. Dacă $X\in\mathcal{M}_3(\mathbf{R})$ să se rezolve ecuația matriceală:

$$X\cdot\begin{pmatrix}1&2&3\\0&1&2\\-1&2&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&5&3\\2&1&-1\\-3&4&-5\end{pmatrix}.$$

3. Fie $f:\mathbf{R}\setminus\{-2,2\}\to\mathbf{R}$, $f(x)=\dfrac{x}{4-x^2}$. Să se traseze graficul funcției f și să se calculeze aria mulțimii cuprinse între grafic, axa Ox și dreptele de ecuații $x=0$ și $x=1$.

4. Fie $(a_n)_{n\geqslant 1}$ un șir astfel încît $\sum\limits_{k=1}^{n}a_k=\dfrac{3n^2+9n}{2}$, pentru orice n natural, $n\geqslant 1$.

Să se arate că șirul este o progresie aritmetică și să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{na_n}\cdot\sum\limits_{k=1}^{n}a_k$.

5. Să se arate că pentru orice $x\in(-1,1)$ are loc inegalitatea $\ln(1-x^2)<x+\dfrac{1}{2}$.

XXV. 18 iulie 1988, ora 16,00

1. Să se rezolve inecuația $\dfrac{x^2-2x+2^{|m|}}{x^2-m^2}<0$, $m\in\mathbf{R}$.

2. Să se rezolve în mulțimea numerelor reale sistemul

$$\begin{cases} x+y+z=2\\ 2x-y-2z=-2\\ x+4y+mz=8.\end{cases}$$ Discuție după $m\in\mathbf{R}$.

3. Fie $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = \sqrt[3]{x^3 + 3x^2 - 4}$. Să se determine punctele în care funcția f nu este derivabilă și să se traseze graficul acestei funcții.

4. Fie $G = (0, \infty) \setminus \{1\}$. Arătați că aplicația $(x, y) \to x * y = e^{\ln x \cdot \ln y}$ este o lege de compoziție pe G și că $(G, *)$ este grup abelian.

5. Să se calculeze $\lim_{b \to \infty} \int_2^b |x - 3| e^{-x} dx$.

PROBLEME REZOLVATE PENTRU GIMNAZIU

Clasa a V-a

Problema E: 9275* (G.M. 11—12/1987, pag. 457)

Un număr de trei cifre împărțit la răsturnatul său dă câtul 3 și restul 175, iar diferența dintre cifra sutelor și cea a unităților numărului este 7. Să se afle numărul.

Gheorghe Cornia, profesor, Fălticeni

Soluția autorului. Fie $\overline{xyz}$ numărul; dintr-o condiție a problemei avem $x - z = 7$. Diferența între număr și răsturnatul său este:

$$\overline{xyz} - \overline{zyx} = 100x + 10y + z - 100z - 10y - x = 99x - 99z = 99(x - z) = 99 \cdot 7 = 693.$$

Notăm cu A răsturnatul numărului. Conform teoremei împărțirii cu rest în numere naturale, rezultă că numărul este $3A + 175$. Scriem că diferența dintre număr și răsturnatul său este 693, deci avem $3A + 175 - A = 693$ sau $2A = 518$ deci $A = 259$. Numărul căutat este 952.

Problema E: 9282* (G.M. 11—12/1987, pag. 457)

Care număr este mai mare: 37^{150} sau 215^{100}?

Costică Negoiță, profesor, Buzău

Soluție. Avem succesiv:
$215^{100} < 216^{100} = (6^3)^{100} = (6^2)^{150} = 36^{150} < 37^{150}$. Deci $37^{150} > 215^{100}$.

Soluție bună au dat: *Gabriela Hlpea*, cl. a V-a, Șc. gen. 29 Galați; *Ravaru Vasile*, cl. a V-a, Șc. gen. 11 Roman; *Pascu Oana*, cl. a V-a, Șc. gen. 11 București.

Clasa a VI-a

Problema E: 9283* (G.M. 11—12/1988, pag. 458)

În triunghiul ABC bisectoarele unghiurilor $\hat{B}$ și $\hat{C}$ intersectează dreapta care trece prin mijloacele laturilor AB și AC în M și N. Să se demonstreze că $AB \equiv AC$ dacă și numai dacă $AM \equiv AN$.

Marin Grigorovici, profesor, Buzău

Soluție. Fie D și E mijloacele laturilor AB și AC.

a) Dacă $AB \equiv AC$ atunci $AM \equiv AN$: Dacă $AB \equiv AC$ rezultă că triunghiul ABC este isoscel și avem:

$$\widehat{ABM} \equiv \widehat{MBC} \equiv \widehat{ACN} \equiv \widehat{NCB} \text{ și } AD \equiv DB \equiv AE \equiv EC.$$

Triunghiul ABC fiind isoscel și DE linie mijlocie a sa, avem $DE \| BC$ și $\widehat{BDE} \equiv \widehat{DEC}$. Prin urmare triunghiurile DMB și NEC sînt congruente (U.L.U.) de unde $BM \equiv NC$. Rezultă că triunghiurile ABM și ANC sînt congruente (L.U.L.), deci $AM \equiv AN$.

b) Dacă $AM \equiv AN$ atunci $AB \equiv AC$: Dacă $AM \equiv AN$ rezultă că triunghiul AMN este isoscel, de unde $\widehat{ANM} \equiv \widehat{AMN}$, (1) și $\widehat{AND} \equiv \widehat{AME}$, (2). Din $\widehat{DMB} \equiv \widehat{MBC}$ (alterne

Scanned with OKEN Scanner

interne) și $\widehat{DBM} \equiv \widehat{MBC}$, obținem $\widehat{DMB} \equiv \widehat{DBM}$, deci triunghiul BDM este isoscel, de unde $BD \equiv DM$, dar $BD \equiv AD$. Rezultă că $DM \equiv AD$, prin urmare triunghiul ADM este isoscel, deci $\widehat{DAM} \equiv \widehat{DMA}$, (3).

Din $\widehat{MNC} \equiv \widehat{NCB}$ (alterne interne) obținem printr-un raționament analog că $\widehat{EAN} \equiv \widehat{ENA}$, (4).

Din (1), (3) și (4) rezultă că $\widehat{DAN} \equiv \widehat{MAE}$.

Triunghiurile DAN și MEA sînt congruente (U.L.U.) de unde obținem $AD \equiv AE$; dar $AD = \frac{1}{2} AB$ și $AE = \frac{1}{2} AC$, deci $AB \equiv AC$.

Soluție bună au dat: *Arsenie Mihaela*, cl. a VI-a, Lic. Ind. Isaccea; *Naghi Rodica*, cl. a VI-a, Șc. gen. Șomcuța Mare.

Problema E: 9291* (G.M. 11—12/1988, pag. 459)

Pe latura DC a dreptunghiului $ABCD$ se iau în ordine punctele F și E (în ordinea $D-F-E-C$) și ducem $FM \perp AE$ ($M \in AE$) și $EN \perp BF$ ($N \in BF$). Arătați că $ABEF$ este trapez isoscel dacă și numai dacă $FM \equiv EN$.

Ilie Bălășan, profesor, Fălticeni, Suceava

Soluție. a) Dacă $ABEF$ este trapez isoscel atunci $FM \equiv EN$: Deoarece $ABEF$ este trapez isoscel avem $AF \equiv BE$ și $\widehat{EFB} \equiv \widehat{AEF}$. Rezultă că triunghiurile AFE și FEB sînt congruente (L.U.L.) și deci $FM \equiv EN$ ca înălțimi omoloage în triunghiuri congruente.

b) Dacă $FM \equiv EN$ atunci $ABEF$ este trapez isoscel: Triunghiurile dreptunghice FEM și FEN sînt congruente (I.C.), de unde $\widehat{EFO} \equiv \widehat{FEO}$, unde $\{O\} = AE \cap BF$, deci triunghiul EOF este isoscel și avem $EO \equiv FO$, (1).

Deoarece $FE \parallel AB$ rezultă că $\widehat{EFO} \equiv \widehat{OBA}$ (alterne interne) și $\widehat{FEO} \equiv \widehat{OAB}$ (alterne interne); dar $\widehat{EFO} \equiv \widehat{FEO}$, deci $\widehat{OBA} \equiv \widehat{OAB}$; prin urmare triunghiul AOB este isoscel, de unde avem $AO \equiv OB$, (2).

Din (1) și (2) rezultă $AE \equiv FB$. Deducem că triunghiurile AFB și AEB sînt congruente (L.U.L.) de unde $AF \equiv EB$, prin urmare $AFEB$ este trapez isoscel.

Soluție bună au dat: *Tița Floarea*, cl. a VI-a, Șc. gen. 7 Caracal; *Ganea Tudor*, cl. a VI-a, Șc. gen. 3 București.

Problema E: 9296* (G.M. 11—12/1988, pag. 459)

Fie $ABCD$ un paralelogram. Se duc $BM \perp AD$ ($M \in AD$) și $DN \perp BC$ ($N \in BC$). Fie $\{E\} = BM \cap CD$ și $\{F\} = DN \cap AB$. Să se arate că dreptele EF, MN, AC sînt concurente.

Costina Milea, elevă, Rm. Sărat

Soluție. Din $BM \perp AD$ și $AD \parallel BC$ rezultă că $BM \perp BC$. Din $BM \perp BC$ și $DN \perp BC$ rezultă că $BM \parallel DN$, deci $BE \parallel DF$. Din $BE \parallel DF$ și $DE \parallel BF$ (sînt incluse în DC și respectiv AB, care sînt paralele) rezultă că $BFDE$ este paralelogram. Prin urmare diagonalele EF și BD sînt concurente și se înjumătățesc. Fie O mijlocul lui BD; deci $O \in EF$, (1).

Din $BM \parallel DN$ și $BN \parallel DM$ rezultă că $BNDM$ este dreptunghi (deoarece $BN \perp DM$) Diagonalele sale BD și MN se înjumătățesc, deci $O \in MN$, (2). Deoarece $ABCD$ este paralelogram rezultă că $O \in AC$, (3).

Din (1), (2) și (3) avem $EF \cap MN \cap AC = \{O\}$.

Soluție bună au dat: *Ursache Marius*, cl. a VI-a, Lic. „C. Negruzzi" *Iași*; *Budei Simona*, cl. a VI-a, Șc. gen. 24 Galați.

Clasa a VII-a

Problema E: 9300* (G. M. 11—12/1988, pag. 460).

Să se arate că ecuația $x^3 + y^3 = x + y + 1987$ nu are soluții în mulțimea numerelor întregi.

Felicia Polesciuc, profesoară, Cîmpulung Moldovenesc

Soluție. Ecuația din enunț se mai poate scrie :

$$(x+y)(x^2-xy+y^2)-(x+y)=1987 \Leftrightarrow (x+y)(x^2-xy+y^2-1)=1987.$$

Notăm $x+y=S$ și $xy=P$; atunci $x^2+y^2=(x+y)^2-2xy=S^2-2P$. Cu acestea, ecuația devine :

$$S(S^2-3P-1)=1987, \quad (1).$$

Deoarece x și y sînt numere întregi rezultă că S și P sînt numere întregi. Ținînd seama că 1987 este număr prim, din (1) rezultă următoarele cazuri :

a) $\begin{cases} S=1 \\ S^2-3P-1=1987 \end{cases}$ b) $\begin{cases} S=1987 \\ S^2-3P-1=1 \end{cases}$

c) $\begin{cases} S=-1 \\ S^2-3P-1=-1987 \end{cases}$ d) $\begin{cases} S=-1987 \\ S^2-3P-1=-1. \end{cases}$

Din a) deducem $P=-\dfrac{1987}{3}$ care nu e număr întreg, deci sistemul a) nu are soluții în mulțimea numerelor întregi.

Din b) deducem $3P=S^2-2$; dar $S=1987=3\cdot 662+1$ adică $S=\mathcal{M}3+1$. Prin urmare :

$$P=\frac{S^2-2}{3}=\frac{(\mathcal{M}3+1)^2-2}{3}\,\frac{\mathcal{M}3+1-2}{3}=\frac{\mathcal{M}3-1}{3}.$$

Numărătorul nefiind multiplu de 3 rezultă că P nu este număr întreg, deci nici în acest caz nu avem soluții în mulțimea numerelor întregi.

Analizăm analog cazurile c) și d) și deducem că în nici unul din cazuri nu obținem soluții în mulțimea numerelor întregi.

Soluție bună au dat : *Iacob Iulian*, cl. a VII-a, Șc. gen. 8 Suceava ; *Gălăteanu Violeta*, cl. a VII-a, Șc. gen. Beiu.

Problema E : 9301* (G. M. 11—12/1988, pag. 469).

Să se rezolve ecuația :

$$x^{y^z}\cdot y^{z^x}\cdot z^{x^y}=5xyz,$$

știind că x, y, z sînt numere naturale nenule.

Bogdan Berliba, elev, Suceava

Soluție. Ecuația din enunț se mai poate scrie :

$$x^{y^z}\cdot y^{z^x}\cdot z^{x^y}-5xyz=0 \Leftrightarrow xyz\,(x^{y^z-1}\cdot y^{z^x-1}\cdot z^{x^y-1}-5)=0.$$

Deoarece $x\neq 0$, $y\neq 0$, $z\neq 0$, rezultă că

$$x^{y^z-1}\cdot y^{z^x-1}\cdot z^{x^y-1}=5, \quad (1).$$

Ținînd seama că 5 e număr prim, el poate fi scris ca produs de trei numere naturale ca $5\cdot 1\cdot 1$ sau $1\cdot 5\cdot 1$ sau $1\cdot 1\cdot 5$, deci din (1) avem :

$$\begin{cases} x^{y^z-1}=5 \\ y^{z^x-1}=1 \\ z^{x^y-1}=1 \end{cases} \text{ sau } \begin{cases} x^{y^z-1}=1 \\ y^{z^x-1}=5 \\ z^{x^y-1}=1 \end{cases} \text{ sau } \begin{cases} x^{y^z-1}=1 \\ y^{z^x-1}=1 \\ z^{x^y-1}=5 \end{cases}$$

Rezolvăm primul sistem, celelalte două rezolvîndu-se analog. Din a doua ecuație avem $y=1$ sau $z^x-1=0$, iar din a treia ecuație deducem $z=1$ sau $x^y-1=0$. Studiem pe rînd aceste patru cazuri.

Scanned with OKEN Scanner

Pentru $y = 1$ sistemul devine:

$$\begin{cases} x^{1-1} = 5 \\ 1 = 1 \\ z^{z-1} = 1, \end{cases}$$

care este imposibil din cauza primei ecuații care este falsă.

Pentru $z = 1$ sistemul devine:

$$\begin{cases} x^{y-1} = 5 \\ y^0 = 1 \\ 1 = 1. \end{cases}$$

Ultimele două relații sînt adevărate, iar din prima obținem $x = 5$ și $y - 1 = 1$, de unde $x = 5$ și $y = 2$. Prin urmare avem o soluție a sistemului: $x = 5$, $y = 2$, $z = 1$.

Pentru $z^x - 1 = 0$ avem $z^x = 1$, de unde $z = 1$ (caz studiat) sau $x = 0$ care nu convine (deoarece $x \neq 0$).

Pentru $x^y - 1 = 0$ avem $x^y = 1$ de unde $x = 1$ care nu convine (deoarece înlocuind în prima ecuație a sistemului, obținem $1 = 5$, ceea ce este fals) sau $y = 0$, care nu convine (deoarece $y \neq 0$).

Prin urmare, primul sistem are o singură soluție și anume $x_1 = 5$, $y_1 = 2$, $z_1 = 1$.

Rezolvînd analog celelalte două sisteme, mai obținem încă două soluții:

$$x_2 = 1, y_2 = 5, z_2 = 2 \text{ și } x_3 = 2, \quad y_3 = 1, \quad z_3 = 5.$$

Soluție bună au dat: *Mariș Mihai*, cl. a VII-a, Șc. gen. 3 Timișoara; *Berceanu Adriana*, cl. a VII-a, Șc. gen. 3 Alexandria.

Problema E: 9302* (G. M. 11—12/1988, pag. 460)

Fie unghiul ascuțit $\widehat{xOy}$ și Oz bisectoarea lui. Se consideră un cerc de centru $M (M \in Oz)$ care intersectează laturile Ox și Oy în P, N și respectiv Q, C astfel încît P să fie între O și N, iar Q între O și C. Să se demonstreze că Oz trece prin mijloacele arcelor $\overset{\frown}{QP}$ și $\overset{\frown}{CN}$.

Alexandru Marchitan, elev, Suceava

Soluție. Fie S și T punctele în care Oz intersectează arcele $\overset{\frown}{QP}$ și respectiv $\overset{\frown}{NC}$. Ducem din M perpendiculara pe Ox care intersectează coarda PN în A, iar arcul $\overset{\frown}{PN}$ în D și perpendiculara din M pe Oy care intersectează coarda QC în B și arcul $\overset{\frown}{QC}$ în E. Deoarece M aparține bisectoarei Oz rezultă că $MA \equiv MB$, deci $PN \equiv QC$ și $\overset{\frown}{PN} \equiv \overset{\frown}{QC}$. Prin urmare avem $PA \equiv AN = QB \equiv BC$ și $\overset{\frown}{PD} \equiv \overset{\frown}{DN} \equiv \overset{\frown}{QE} \equiv \overset{\frown}{EC}$.

Triunghiurile dreptunghice OAM și OBM sînt congruente (cazul I.U.) deci $\widehat{OMA} \equiv \widehat{OMB}$, prin urmare $\overset{\frown}{SD} \equiv \overset{\frown}{SE}$.

Din $\overset{\frown}{SD} \equiv \overset{\frown}{SE}$ și $\overset{\frown}{PD} \equiv \overset{\frown}{QE}$ rezultă $\overset{\frown}{SP} \equiv \overset{\frown}{SQ}$, deci Oz trece prin mijlocul arcului $\overset{\frown}{PQ}$.

Tot ca diferență de arce congruente demonstrăm că $\overset{\frown}{NT} \equiv \overset{\frown}{TC}$, deci Oz trece și prin mijlocul arcului $\overset{\frown}{NC}$.

Soluție bună au dat: *Voina Liana*, cl. a VI-a, Lic. Pedag. Brașov; *Nicolescu Florin*, cl. a VII-a, Șc. gen. 174 București.

Problema E: 9305* (G.M. 11—12/1988 pag. 461)

Latura unui pătrat $ABCD$ este egală cu a. Pe diagonala AC se ia un punct P astfel încît $PC = \frac{AC}{4}$. Fie E intersecția lui BP cu CD, O centrul pătratului și M intersecția lui BP cu perpendiculara ON din O pe BC. Se cere:

a) *Să se calculeze* CE.
b) *Să se arate că triunghiul* OEM *este isoscel.*

Mihaela Ionită, elevă, Pănătău, Buzău

Soluție. Din enunțul problemei avem: $OA = OC$; $OP = PC = \frac{AC}{4}$; $ON \perp BC$; rezultă $CN = NP$, $ON \| CD$ și $ON = \frac{1}{2} CD$.

a) Din $MN \| EC$ și $CN = NP$ rezultă că MN este linie mijlocie în triunghiul BCE; deci $EM = MB$, (1) și $MN = \frac{1}{2} EC$, (2). Din $OP = PC$, $\widehat{ECP} \equiv \widehat{POM}$ (alterne interne) și $\widehat{OPM} \equiv \widehat{EPC}$ (opuse la vîrf) rezultă că triunghiurile OPM și EPC sînt congruente (U.L.U.), de unde $EC = OM$, (3).

Din (2) și (3) avem $ON = OM + MN = EC + \frac{1}{2} EC = \frac{3}{2} EC$; dar $ON = \frac{1}{2} DC = \frac{a}{2}$; deci $\frac{a}{2} = \frac{3}{2} EC$, prin urmare $EC = \frac{a}{3}$.

b) Din (3) și $EC \| OM$ rezultă că $OMCE$ este paralelogram, deci $EO = CM$, (4). În triunghiul CMB, MN este înălțime și mediană, deci triunghiul CMB este isoscel, deci $CM = MB$, (5). Din (1), (4) și (5) rezultă că $EO = EM$, prin urmare triunghiul EOM este isoscel.

Soluție bună au dat: *Ștefănescu Cătălina*, cl. a VII-a, Șc. gen. 56 București; *Paicu Marius*, cl. a VII-a, Șc. gen. 1 Motru.

Clasa a VIII-a

Problema E: 9319. (G. M. 11—12/1987, pag. 462)

Să se determine numerele întregi x *și* y, *prime între ele, astfel încît fracția* $\frac{x+y}{x^2+xy+y^2}$ *să fie echivalentă cu fracția* $\frac{5}{19}$.

Bogdan Grigoriu, profesor, Fălticeni, Suceava

Soluție. Arătăm mai întîi că fracția $\frac{x+y}{x^2+xy+y^2}$ este ireductibilă.

Deoarece $x^2 + xy + y^2 = x(x+y) + y^2 = y(x+y) + x^2$, orice divizor al lui $x+y$ și x^2+xy+y^2 trebuie să fie divizor și pentru numerele x^2 și y^2.

Dar singurul divizor comun al lui x^2 și y^2 este 1, deoarece x și y sînt prime între ele. Deci numerele $x+y$ și x^2+xy+y^2 sînt prime între ele, adică fracția $\frac{x+y}{x^2+xy+y^2}$ este ireductibilă.

Deoarece și $\frac{5}{19}$ este ireductibilă rezultă că fracțiile $\frac{x+y}{x^2+xy+y^2}$ și $\frac{5}{19}$ sînt echivalente dacă și numai dacă:

$$\begin{cases} x+y=5 \\ x^2+xy+y^2=19 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=5, \\ (x+y)^2-xy=19 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=5 \\ xy=6, \end{cases}$$

sistem care are soluțiile $x=2$, $y=3$ sau $x=3$, $y=2$.

Soluție bună au dat: *Alexe Daniela*, cl. a VIII-a, Șc. gen. 3 Însurăței; *Săvescu Dana*, cl. a VIII-a, Șc. gen. 9 Craiova.

Problema E: 9319* (G. M. 11—12/1987, pag. 463)

Fie $ABCA'B'C'$ *o prismă oblică unde* $AA' \perp BC$, $N \in BC$ *și* $4BN = BC$.
a) Să se arate că $4S_{ANA'} < 3S_{ABA'} + S_{ACA'}$.

Scanned with OKEN Scanner

b) *Știind că proiecția punctului C pe AA' este M și că* $\frac{AM}{MA'} = \frac{3}{7}$ *și volumul tetraedrului MABC este a, să se afle volumul prismei ABCA'B'C'.*

Soluție. a) Deoarece $AA' \perp CM$ și $AA' \perp BC$ rezultă că $AA' \perp (MBC)$ deci $AA' \perp MB$ și $AA' \perp MN$, căci MB și MN aparțin planului (MBC). Dacă P este mijlocul segmentului BC atunci MP este mediană în triunghiul CMB deci $2MP < MB + MC$, (1). În triunghiul PMB, MN este mediană conform ipotezei, deci $2MN < MP + MB$, (2).

Din (1) și (2) rezultă că $4MN < 3MB + MC \Leftrightarrow 4 \cdot \frac{MN \cdot AA'}{2} < 3\,\frac{MB \cdot AA'}{2} + \frac{MC \cdot AA'}{2}$, (3).

Deoarece $MB \perp AA'$, $NM \perp AA'$, $CM \perp AA'$, din (3) rezultă că

$$4\,S_{ANA'} < 3\,S_{ABA'} + S_{ACA'}.$$

b) În tetraedrul $A'MCB$ avem $A'M \perp (MBC)$, deci

$$V_{A'MCB} = \frac{A'M \cdot S_{MBC}}{3}, \quad (4).$$

În tetraedrul $AMCB$, avem $AM \perp (MBC)$, deci

$$V_{AMCB} = \frac{AM \cdot S_{MBC}}{3}, \quad (5).$$

Din relațiile (4) și (5) obținem

$$\frac{V_{A'MCB}}{V_{AMCB}} = \frac{A'M}{AM} = \frac{7}{3}, \text{ deci } V_{A'MCB} = \frac{7a}{3}.$$

Dar $V_{ABCA'} = V_{AMCB} + V_{A'MCB} = a + \frac{7a}{3} = \frac{10\,a}{3}$, deci

$$V_{ABCA'B'C'} = 2 \cdot V_{ABCA'} = \frac{20\,a}{3}.$$

Soluție bună au dat: *Antonescu Lavinia*, cl. a VIII-a, Lic. ind. 8 Rm. Vîlcea; *Votna Mihaela*, cl. a VIII-a, Lic. mat. fiz. „Horia, Cloșca și Crișan" Alba Iulia.

PROBLEME REZOLVATE PENTRU LICEU

Clasa a IX-a

Problema 21265* (G.M. 11—12/1987, pag. 465)

Dacă a și b sînt două numere reale astfel încît $\sin x + \sin a \geqslant b \cos x$, $(\forall) x \in \mathbf{R}$, *atunci* $b = 0$.

Jenică Cringanu, student, București

Soluție. În inegalitatea din enunț înlocuim x cu $-x$ și obținem:

$$-\sin x + \sin a \geqslant b \cos x, \ (\forall)\, x \in \mathbf{R} \text{ sau}$$

$$\sin x + b \cos x \leqslant \sin a, \ (\forall)\, x \in \mathbf{R} \text{ sau}$$

$$\frac{1}{\sqrt{1+b^2}} \sin x + \frac{b}{\sqrt{1+b^2}} \cos x \leqslant \frac{\sin a}{\sqrt{1+b^2}}, \ (\forall)\, x \in \mathbf{R}, \ (1).$$

Scanned with OKEN Scanner

Deoarece $0 < \frac{1}{\sqrt{1+b^2}} \leqslant 1$ rezultă că există $\varphi \in [0, 2\pi)$ astfel încît $\cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{1+b^2}}$ și $\sin\varphi = \frac{b}{\sqrt{1+b^2}}$, inegalitatea (1) devine

$$\sin(x+\varphi) \leqslant \frac{\sin a}{\sqrt{1+b^2}}, \quad (\forall)\, x \in \mathbf{R}, \quad (2).$$

Alegînd x convenabil astfel încît $\sin(x+\varphi)=1$, din (2) rezultă că $1 \leqslant \frac{\sin a}{\sqrt{1+b^2}}$ sau

$\sqrt{1+b^2} \leqslant \sin a \leqslant 1$, deci $\sqrt{1+b^2} \leqslant 1$, adică $b = 0$.

Soluție bună au dat: *Costea Viorel*, cl. a IX-a, Lic. mat. fiz. Zalău; *Răuță Florentina* cl. a IX-a, Lic. ind, „Unirea" Focșani.

Problema 21266* (G.M. 11—12/1987, pag. 465)

Fie A, B două puncte fixe ale unui cerc de centru O și C un punct mobil pe același cerc. Să se afle locul geometric al centrului cercului ce trece prin B și este tangent în C la AC.

Mitică Dudău, profesor, Galați

Soluție. Notăm cu A' punctul diametral opus lui A în cercul dat. Pentru orice punct C de pe cercul dat, notat cu $\mathcal{C}(O)$, centrul P al cercului ce trece prin B și este tangent în C la dreapta AC se obține intersectînd dreapta CA' cu perpendiculara din O pe BC. Deoarece $OP \perp BC$ rezultă că $m(\widehat{BOP}) = \frac{m(\widehat{CB})}{2} = m(\widehat{CAB})$, (1).

Dacă $A' \in [CP]$ atunci $m(\widehat{BA'P}) = m(\widehat{CAB})$, (2), deoarece $\widehat{BA'P}$ este unghi exterior patrulaterului inscriptibil $A'CAB$.

Dacă $P \in [A'C]$ atunci $m(\widehat{BA'C}) + m(\widehat{CAB}) = m(\widehat{BA'P}) + m(\widehat{BAC}) = 180°$, (2').

Din (1), (2), (2') deducem că unghiurile $\widehat{BA'P}$ și $\widehat{BOP}$ sînt congruente sau suplementare deci punctul P aparține cercului circumscris triunghiului $A'OB$, al cărui centru îl notăm cu O_1. Deci locul geometric căutat este inclus în cercul circumscris triunghiului $A'OB$, notat cu $\mathcal{C}(O_1)$.

Reciproc, fie M un punct al cercului $\mathcal{C}(O_1)$. Trebuie arătat că punctul M este centrul unui cerc notat cu $\mathcal{C}(M)$ ce trece prin B și intersectează cercul $\mathcal{C}(O)$ într-un punct N, astfel încît AN este tangentă la cercul $\mathcal{C}(M)$.

Avem $\mathcal{C}(O) \cap \mathcal{C}(M) = \{B, N\}$, $OM \perp BN$, deci în cercul $\mathcal{C}(O)$ avem $m(\widehat{BOM}) = \frac{m(\widehat{BN})}{2}$, (3), $m(\widehat{BA'N}) = \frac{m(\widehat{BN})}{2}$, (4), iar în cercul $\mathcal{C}(O_1)$ avem $m(\widehat{BA'M}) = m(\widehat{BOM})$, (5)

Din (3), (4) și (5) rezultă că $\widehat{BA'M} \equiv \widehat{BA'N}$, deci punctele A', M și N sînt coliniare și deoarece AA' este diametru în cercul $\mathcal{C}(O)$ avem că $m(\widehat{ANA'}) = 90$, deci $m(\widehat{ANM}) = 90$, adică $AN \perp NM$. Rezultă că AN este tangentă la cercul $\mathcal{C}(M)$.

În concluzie locul geometric căutat este cercul circumscris triunghiului $A'OB$.

Soluție bună au dat: *Medrea Ioana*, cl. a IX-a, Lic. mat. fiz. „Horia, Cloșca și Crișan" Alba Iulia; *Ivașcu Ady*, cl. a IX-a, Lic. mat. fiz. „N. Bălcescu" Rîmnicu Vîlcea.

Clasa a X-a

Problema 21354* (G.M. 2/1988, pag. 75)

Se dau n numere reale pozitive $a_1, a_2, \ldots, a_n$ astfel încît $a_1+a_2+\ldots+a_n=1$. Să se arate că:

$$\sqrt{4a_1+1} + \sqrt{4a_2+1} + \ldots + \sqrt{4a_n+1} \leqslant \sqrt{n(n+4)}.$$

Ioan Crișan, profesor, Arad

Soluție. Folosim vectorii din $\mathbb{R}^n$, $\mathbf{a} = (1,1,\ldots,1)$, $\mathbf{b} = (\sqrt{4a_1+1}, \ldots, \sqrt{4a_n+1})$ și efectuăm produsele scalare: $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = \sqrt{4a_1+1}+\ldots+\sqrt{4a_n+1}$, $\mathbf{a}^2 = n$, $\mathbf{b}^2 = \sum_{k=1}^{n}(\sqrt{4a_k+1})^2 = 4\sum_{k=1}^{n} a_k + n = 4+n$. Atunci, inegalitatea *Cauchy-Buniakovski-Schwartz* $(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})^2 < \mathbf{a}^2\cdot\mathbf{b}^2$, devine $(\sqrt{4a_1+1}+\ldots+\sqrt{4a_n+1})^2 \leqslant n(n+4)$, care este echivalentă cu cea din enunț.

Soluție bună au dat: *Petrea Adrian*, cl. a X-a, Lic. ind. „Unirea" Focșani; *Costin Daniela*, cl. a X-a, Lic. „N. Bălcescu" Brăila.

Problema 21357* (G.M. 2/1988, pag. 78)

Să se arate că dacă între lungimile laturilor a, b, c ale unui triunghi ABC are loc relația $(a-b)^2+(c-b)^2 = b^2$, atunci $B \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)\setminus\left\{\frac{\pi}{3}\right\}$.

Gheorghe Marchitan, profesor, Suceava

Soluție. Relația dată se scrie $a^2+b^2+c^2 = 2ab+2bc$ și atunci $\cos B = \frac{a^2+c^2-b^2}{2ac} = \frac{b}{ac}(a+c-b) > 0$, de unde $B \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

Presupunînd prin absurd că $B = \frac{\pi}{3}$, rezultă $\cos B = \frac{1}{2}$ adică:

$$\frac{b}{ac}(a+c-b) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2ab+2bc-2b^2 = ac \Leftrightarrow ab+a(b-c)-b(b-c)+bc-b^2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow b(a+c-b)+(b-c)(a-b) = 0$$

și cum $a+c-b > 0$, rezultă că este necesar ca $(b-c)(a-b) < 0$. Dar această condiție este îndeplinită dacă:

I. $b-c<0$ și $a-b>0$, adică $b<c$ și $b<a$, adică $B<\pi/3$, contradicție, sau

II. $b-c>0$ și $a-b<0$, adică $b>c$ și $b>a$, deci $B>\pi/3$, contradicție.

În concluzie $B \in (0, \pi/2)\setminus\{\pi/3\}$.

Soluție bună au dat: *Grindean Mihai*, cl. a X-a, Lic. mat. fiz. Zalău; *Simion Ovidiu*, cl. a X-a, Lic. mat. fiz. 1 Pitești.

Clasa a XI-a

Problema 21290* (G.M. 11–12/1987, pag. 468)

Să se calculeze limita șirului cu termenul general dat de relația:

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{2k+\sqrt{4k^2-1}}}.$$

(În legătură cu problema 13963).

Mihai Ștefan, profesor, Rm. Sărat

Soluție. Folosind formula radicalilor suprapuși obținem:

$$\sqrt{2k+\sqrt{4k^2-1}} = \sqrt{\frac{2k+1}{2}}+\sqrt{\frac{2k-1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{2k+1}+\sqrt{2k-1}\right)$$

și termenul general al sumei se va scrie

$$\frac{1}{\sqrt{2k+\sqrt{4k^2-1}}} = \frac{2}{\sqrt{2k+1}+\sqrt{2k-1}} = \sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{2k+1}-\sqrt{2k-1}}{2k+1-2k+1} = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\sqrt{2k+1}-\sqrt{2k-1}\right).$$

Scanned with OKEN Scanner

Atunci avem:

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2k + \sqrt{4k^2 - 1}}} = \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \sum_{k=1}^{n} (\sqrt{2k+1} - \sqrt{2k-1}) =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{n}} (\sqrt{3} - 1 + \sqrt{5} - \sqrt{3} + \ldots + \sqrt{2n+1} - \sqrt{2n-1}) = \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{n}} (\sqrt{2n+1} - 1).$$

Trecînd la limită, obținem:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{2}\,(\sqrt{2n+1} - 1)}{2\sqrt{n}} = 1.$$

Soluție bună au dat: *Brustur Horia*, cl. a XI-a, Lic. „Gh. Lazăr" Sibiu; *Bényi Árpád*, cl. a XI-a, Lic. „Axente Sever" Mediaș.

Problema 21298* (G.M. 11—12/1987, pag. 470)

Să se calculeze

$$\lim_{n\to\infty} \sin((n\pi\sqrt[3]{n^3 + 3n^2 + 4n - 5}).$$

Andrei Gămulea, student, București

Soluție. Ținînd seama de periodicitatea funcției sin, putem scrie $\sin\alpha = \sin(\alpha - 2k\pi)$, $(\forall)k \in \mathbf{Z}$. Cum pentru $n \in \mathbf{N}$ avem $n^2 + n = 2k$, $(k \in \mathbf{Z})$ limita din enunț se mai poate scrie

$$L = \lim_{n\to\infty} \sin(n\pi\sqrt[3]{n^3 + 3n^2 + 4n - 5} - (n^2 + n)\pi).$$

De aici obținem mai departe:

$$L = \lim_{n\to\infty} \sin n\pi(\sqrt[3]{n^3 + 3n^2 + 4n - 5} - (n+1)) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sin n\pi \frac{n^3 + 3n^2 + 4n - 5 - n^3 - 3n^2 - 3n - 1}{\sqrt[3]{(n^3 + 3n^2 + 4n - 5)^2} + (n+1)\sqrt[3]{n^3 + 3n^2 + 4n - 5} + (n+1)^2} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sin n\pi \frac{n - 6}{n^2\left(\sqrt[3]{\left(1 + \frac{3}{n} + \frac{4}{n^2} - \frac{5}{n^3}\right)^2} + \left(1 + \frac{1}{n}\right)\sqrt[3]{1 + \frac{3}{n} + \frac{4}{n^2} - \frac{5}{n^3}} + \left(1 + \frac{1}{n}\right)^2\right)} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sin \frac{1 - \frac{6}{n}}{\sqrt[3]{\left(1 + \frac{3}{n} + \frac{4}{n^2} - \frac{5}{n^3}\right)^2} + \left(1 + \frac{1}{n}\right)\sqrt[3]{1 + \frac{3}{n} + \frac{4}{n^2} - \frac{5}{n^3}} + \left(1 + \frac{1}{n}\right)^2} =$$

$$= \sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Soluție bună au dat: *Beleuz Mihail*, cl. a XI, Lic. ind. Buhuși; *Stemate Dan*, cl. a XI-a, Lic. „N. Bălcescu" Pitești.

Clasa a XII-a

Problema 21308* (G.M. 11—12/1987, pag. 471).

Se consideră două funcții $f, g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, continue. Știind că $\lim_{x\to\infty} f(x)$, $\lim_{x\to\infty} g(x)$ există și pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, avem

$$\int_n^{n+1} f(x)\mathrm{d}x = \int_n^{n+1} g(x)\mathrm{d}x,$$

să se arate că $\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} g(x)$.

Florin Rotaru, matematician, Focșani

Soluția autorului. Relația din ipoteză din enunț se scrie

$$\int_n^{n+1} (f(x) - g(x))\mathrm{d}x = 0, \quad (1).$$

Pe de altă parte aplicînd prima teoremă de medie de la integrala definită pentru funcția $h(x) = f(x) - g(x)$ pe intervalul $[n, n+1]$ avem:

$$\int_n^{n+1} (f(x) - g(x))\mathrm{d}x = (n + 1 - n)(f(\theta_n) - g(\theta_n)), \quad (2)$$

unde $n < \theta_n < n + 1$. Deoarece $\theta_n > n$, $(\forall) n \in \mathbb{N}$, rezultă că $\lim_{n\to\infty} \theta_n = +\infty$.

Să presupunem că $\lim_{x\to\infty} f(x) = a$, $\lim_{x\to\infty} g(x) = b$. Deci șirurile $(f(\theta_n))_{n\in\mathbb{N}}$ și $(g(\theta_n))_{n\in\mathbb{N}}$ au respectiv limitele a și b. Dar comparînd egalitățile (1) și (2) obținem că $f(\theta_n) = g(\theta_n)$, $(\forall) n \in \mathbb{N}$. Deci cele două șiruri $(f(\theta_n))$ și $(g(\theta_n))$ coincid, de unde rezultă că au aceeași limită, adică $a = b$.

Problema 21311* (G.M. 11—12/1987, pag. 472)

Să se arate că are loc inegalitatea:

$$\int_0^e (\sqrt{e^x - 1} + \ln(x^2 + 1))\mathrm{d}x \geqslant e^2.$$

Teofilia Grădinaru, profesoară, Suceava

Soluție. Fie funcția $f : [0, +\infty) \to [0, \infty)$, $f(x) = \ln(x^2 + 1)$, continuă și strict crescătoare pe $[0, +\infty)$ și $f(0) = 0$.

Inversa funcției f va fi $f^{-1} : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$, $f^{-1}(x) = \sqrt{e^x - 1}$. Deci se poate aplica *inegalitatea lui Young* funcției f pe $[0, +\infty)$. Enunțul *inegalității lui Young* este: „Fie $f : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ o funcție continuă, strict crescătoare pe $[0, +\infty)$ și cu $f(0) = 0$. Atunci avem:

$$\int_0^a f(x)\mathrm{d}x + \int_0^b f^{-1}(y)\mathrm{d}y \geqslant ab, \quad a, b \in [0, +\infty)."$$

Scanned with OKEN Scanner

Deci

$$\int_0^a (\sqrt{e^x - 1} + \ln(x^2 + 1))dx \geq e^a.$$

Soluție bună au dat: *Jugănaru Ion*, cl. a XII-a, Lic. ind. Strehaia; *Simon Enikő*, cl. a XII-a, Lic. ind. 2 Topliţa.

PROBLEME PENTRU CICLUL PRIMAR

81. La un chioșc sînt 1505 ziare și reviste. După ce s-au vîndut 101 ziare și 60 reviste, ziarele au rămas de două ori mai multe ca revistele. Cîte reviste și cîte ziare erau la început?

Mihaela Uricaru, elevă, Bacău

82. a) Dovediți că oricare ar fi trei numere naturale consecutive, media lor aritmetică este un număr natural.

b) Știind că media aritmetică a trei numere consecutive este 1988 aflați numerele.

Maria Stoica, profesoară, Bacău

83. Să se afle numărul a din egalitatea:

$$\frac{(a + 5370 : 30) - 639}{9315 : 27 - (2681 + 417 \cdot 28 - 14019)} = 26.$$

Eugen Teirău, învățător, Bacău

84. Să se afle produsul $a \cdot b$ a două numere naturale a și b știind că diferența $a - b$ este 36, iar citul lor $a : b$ este 4.

Ioan Surdu, institutor, Bacău

85. Dacă împărțim suma numerelor 279 și 361 la diferența dintre numărul 376 și un alt număr necunoscut a, obținem cîtul 34 și restul 27. Să se afle numărul a. Faceți proba.

Eugen Teirău, învățător, Bacău

86. Să se afle cel mai mare număr de trei cifre, care adunat cu răsturnatul său să dea suma 1009.

Valentina Munteanu și *Grigore Munteanu*, învățători, Bustuchin, Gorj

87. Determinați valoarea lui a din egalitatea:

$$3 + \{4 \times [2 + (6 + a) : 3] - 17\} \times 7 = 24.$$

Ion Predescu, profesor, Mateești, Vîlcea

88. Să se reconstituie scăderea

$$\overline{a00a} - \overline{b660} = \overline{ccaa}.$$

Valentina Munteanu și *Grigore Munteanu*, învățători, Bustuchin, Gorj

89. Suma a trei numere este 1359. Dacă din primul număr se scade 174, din al doilea 35, din al treilea 187, numerele obținute sînt egale. Care sînt cele trei numere?

Marcela Marin, învățătoare, Rm. Sărat, Buzău

90. Reconstituiți înmulțirea:

$$\begin{array}{r} BBC\times \\ EA \\ \hline CDA \\ ACEE \\ \hline 27552 \end{array}$$

Puiu Dumitra, învățător, Rm. Sărat

91. Ion, Mioara și Florin au economisit împreună 790 lei. Ion a economisit cu 26 lei mai mult decît Mioara, iar Florin de patru ori mai mult decît Ion.
Cîți lei a economisit fiecare copil?

Puiu Dumitra, învățător, Rm. Sărat

92. Să se afle cel mai mic și cel mai mare număr natural de două cifre care împărțit la un număr de o singură cifră dă restul 7.

Paulina Costin, profesoară, București

93. La o întrecere în rezolvarea de probleme organizată de gazeta de perete se dau 5 puncte pentru o problemă bine rezolvată și se scad 3 puncte pentru o problemă greșit rezolvată. Un elev a trimis rezolvările a 10 probleme și a obținut 26 puncte. Să se afle cîte probleme a rezolvat bine și cîte a greșit.

Victoria-Ana Lupescu, profesoară, București

94. Găsiți valoarea lui a din egalitatea:

$$2a\times(4a-27)=\overline{a0}.$$

Ion Z. Predescu, profesor, Rast, Dolj

95. Într-un depozit se află de 4 ori mai multă făină decît în altul. Dacă din primul se scot 960 kg făină și din al doilea se scot 60 kg, rămîn

cantități egale. Ce cantitate de făină a fost la început în fiecare depozit?

Marcela Marin, învățătoare, Rm. Sărat, Buzău

96. Să se determine toate numerele de forma $\overline{abc}$, cu a, b, c cifre distincte, pentru care are loc egalitatea:

$$\overline{abc} - \overline{cba} = 594.$$

Liviu Anton Pîrșan, elev, București

PROBLEME PENTRU GIMNAZIU

Clasa a V-a

E: 9563. Cîte numere naturale din sistemul zecimal se scriu în sistemul de numerație cu baza 6, cu trei cifre? Generalizare.

Avram Țifrea, profesor, Bacău

E: 9564*. Să se afle numerele naturale a și b știind că diferența lor este 100, iar suma dintre $\frac{2}{5}$ din a și $\frac{3}{5}$ din b este 190.

Angelica Ciobanu, elevă, Bacău

E: 9565. Să se stabilească relația dintre $m, n \in \mathbf{N}$ pentru ca numărul $3^{2n} - 7^m$ să fie divizibil cu 10.

Cornelia Soorțanu, elevă, Bacău

E: 9566. Arătați că din oricare trei numere naturale, există două astfel încît produsul dintre suma și diferența lor este divizibil cu 4.

Ionuț Sîrbu, elev, Bacău

E: 9567. Notăm cu $U(n)$ cifra unităților numărului natural n și cu $Z(n)$ cifra zecilor numărului natural n.

1) Calculați: a) $U(739)$; b) $U(1986^{1986})$; c) $U(1988^{1985})$; d) $Z(125^{314})$; e) $U(729) + U(730) + U(731) + \ldots + U(832)$.

2) Determinați n din ecuația:

a) $Z(1900) + Z(1900 + 1) + \ldots + Z(1900 + n) = 39$;

b) $Z(1) + Z(2) + Z(3) + \ldots + Z(n) = 1650$.

3) Să se determine valoarea minimă a lui $n \in \mathbf{N}$ pentru care $U(Z(37) + Z(38) + \ldots + Z(37 + n)) = 1$.

Dumitru Săvulescu, profesor, Bacău

E: 9568*. Suma unor numere naturale pare consecutive este 1988. Să se afle numerele. (Găsiți toate situațiile posibile).

Damitru Săvulescu, profesor, Bacău

E : 9569*. Să se determine numărul natural n astfel încît numerele : $n-12$, $n-10$, $n-4$, $n-2$, $n+2$, $n+4$ să fie simultan numere prime.

Dan Codin, profesor, Buzău

E : 9570. Să se determine valoarea de adevăr a următoarei afirmații : „Din 7 numere naturale distincte se pot alege două a căror diferență să fie multiplu de 6".

Dan Codin, profesor, Buzău

E : 9571*. Să se determine mulțimile A și B știind că :

$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$; $B \setminus A = \{1, 6, 8\}$; $A \cap B = \{2, 3, 4\}$.

Oana Tătoiu, elevă, Rm. Sărat

E : 9572*. Să se rezolve ecuația :

$$x \cdot \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8}.$$

* * *

E : 9573*. Să se reconstituie scăderea :

$$\overline{aaab} - \overline{baaa} = 999.$$

Ion Z. Predescu, profesor, Rast, Dolj

E : 9574. Găsiți două numere naturale care împărțite dau cîtul 49, iar restul împărțirii este strict mai mare decît 4 și cu 294 mai mic decît deîmpărțitul.

Ion Z. Predescu, profesor, Rast, Dolj

Clasa a VI-a

E : 9575*. Arătați că media geometrică a oricăror două numere raționale strict pozitive este medie geometrică între media aritmetică și media armonică a celor două numere.

* * *

E : 9576. Fie a, b două numere naturale, iar $[a, b]$ = c.m.m.m.c. al lor și (a, b) = c.m.m.d.c al lor. Dacă $[a, b] - (a, b) = 2a + b$, să se arate că $a + b$ este divizibil cu 7.

Dan Codin, profesor, Buzău

E : 9577*. Să se construiască un paralelogram cunoscînd măsura unui unghi ascuțit și distanțele de la punctul de intersecție al diagonalelor la cele două laturi ale unghiului ascuțit.

Oana Tătoiu, elevă, Rm. Sărat

Scanned with OKEN Scanner

E : 9578. Fie un triunghi ABC. Știind că înălțimea AD și bisectoarea AE $(D, E \in BC)$ fac între ele un unghi de 10°, iar $AB = 10$ cm și $AD = 5$ cm, să se afle unghiurile triunghiului ABC.

Hareta Costan, profesoară, Buzău

E : 9579*. Fie triunghiul ABC $(\hat{A} \neq 90^\circ)$. Pe AC se ia punctul D astfel încît $BA \equiv BD$ și pe AB se ia punctul E astfel încît $CA \equiv CE$. Notăm cu M mijlocul lui AE și cu N mijlocul lui AD și fie $\{P\} = CM \cap BN$. Să se arate că $AP \perp BC$.

C. Apostol, profesor, Rm. Sărat

E : 9580*. Demonstrați că pentru n natural mai mare ca 1, numărul $A = 7 + 7^2 + 7^3 + \ldots + 7^{3n}$ se divide cu 1032.

Maria Stoica, profesoară, Bacău

E : 9581. Fie $x, y, z \in \mathbf{N}^*$ astfel încît există relațiile :

$$\frac{xy + zy}{2xz} = \frac{66}{35}; \quad \frac{3xy}{x^2 + xz} = \frac{55}{28} \text{ și } \frac{3z^3}{x^2y + xyz} = \frac{125}{308}.$$

Aflați x, y, z știind că $x^2 + y^2 + z^2 = 4875$.

Vasile Drăgan, profesor, Bacău

E : 9582*. Să se arate că numărul $\frac{4^n + 5^n - 9^n}{5}$ este întreg, oricare ar fi $n \in \mathbf{N}^*$.

Ana Bogdan, profesoară, Bacău

E : 9583*. Cîte numere naturale, pătrate perfecte, conține mulțimea $A \cap B$, unde $A = \{x \mid x = 11a + 3,\ a \in \mathbf{N}\}$ și $B = \{x \mid x = 79 - b, b \in \mathbf{N}\}$?

D. Săvulescu, profesor, Bacău

E : 9584. În triunghiul ABC, I este intersecția bisectoarelor, iar M și N sînt mijloacele laturilor AB și AC. Să se arate că triunghiul ABC este isoscel dacă și numai dacă $IM \equiv IN$.

Eugen Blăjuț, Bacău

E : 9585. Într-un triunghi dreptunghic ABC cu $\hat{B} = 90^\circ$ și $\hat{A} = 15^\circ$ se duc înălțimea BD, bisectoarea BF și mediana BE.
Se cere :
a) Să se afle unghiurile triunghiurilor EBD, FBC, DBC, FBA și ABD;
b) Să se demonstreze că unghiurile ABC și EBD au aceeași bisectoare;

Scanned with OKEN Scanner

c) Să se afle lungimea lui BF și să se calculeze raportul $\frac{BD + BM}{BF}$, știind că $BE = 30$ cm și $EF + DC = 20$ cm.

Corina Poraicu, elevă, Bacău

E : 9586. Să se afle locul geometric al punctului M situat în interiorul unui unghi XOY pentru care $MA + MB = l$ (l fiind o lungime dată), MA și MB fiind paralele cu laturile unghiului, $A \in (OX$, $B \in (OY$.

M. Nechita, profesor, Bacău

Clasa a VII-a

E : 9587. Din oricare 6 numere naturale pare se pot lua două astfel încît produsul dintre suma și diferența lor să fie de forma $20k$, unde $k \in \mathbb{N}$? Justificare.

Ionuț Sârbu, elev, Bacău

E : 9588*. Se dă $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, cu $f(x) = 2x + \sqrt{9 - 6x + x^2} - \sqrt[4]{(x+4)^4}$. Să se găsească coordonatele punctelor de intersecție ale graficului funcției f cu graficul funcției $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = x - 1$.

Andrei Corneliac, elev, Bacău

E : 9589*. Să se afle $\min (ab + (ab)^{-1})$, știind că a și b sînt numere reale strict pozitive care satisfac relațiile $a^2 + a - 1 = 0$ și $b^2 + b - 1 = 0$.

Viorica Iacob, profesoară, Bacău

E : 9590. Să se determine $m \in \mathbb{R}$ pentru care funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} 2x - 1, & \text{pentru } x \geq m \\ -x + 2, & \text{pentru } x < n \end{cases}$$

îndeplinește condiția :

$$f(m^2 + 1) + 2f(m - 3) - f^2(m + 1) = 2m f(m + 1)$$

și apoi să se reprezinte graficul funcției.

D. Săvulescu, profesor, Bacău

E : 9591*. Fie triunghiul ABC ($\hat{A} = 90^\circ$) cu $AC = 60$ cm, iar mediana AD corespunzătoare ipotenuzei egală cu 5 cm. În punctul D se duce perpendiculara pe BC care intersectează latura AB în E. Pe segmentul DE se consideră un punct M astfel încît $DM = 3$ cm. Să se arate că

rădăcina pătrată din suma distanțelor lui M la laturile AB și AD este un număr rațional (de centimetri).

Eugen Tarasă, profesor, Bacău

E : 9592. Fie $ABCD$ un paralelogram și E, F proiecțiile vîrfurilor A, B pe diagonalele BD și respectiv AC. Dacă $\{G\} = AE \cap DC$ și $\{H\} = BF \cap DC$, să se arate că mijlocul segmentului AB este coliniar cu centrele cercurilor circumscrise triunghiurilor FHG și DEC.

Gh. Neagu, profesor, Bacău

E : 9593. a) Să se arate că oricare ar fi numerele reale a și b avem :

$$a^2 + ab + b^2 = 3\left(\frac{a+b}{2}\right) + \left(\frac{a-b}{2}\right)^2.$$

b) Dacă $a + b = \sqrt{5}$ și $a - b = 2$, să se determine valoarea expresiei $F(a, b) = a^3 - b^3$.

Oana Tătoiu, elevă, Rm. Sărat

E : 9594*. Fie numerele :

$$x = 1989^4 + 2 \cdot 1988^2 + 4 \cdot 1989 - 1,$$

$$y = 1989^4 + 4 \cdot 1989 - 2 \cdot 1990^2 + 3.$$

Să se arate că x și y sînt pătrate perfecte.

Ioana Manea, profesoară, Rm. Sărat

E : 9595*. Determinați cifrele a, b, c din egalitatea :

$$\overline{a} + \overline{bc} + a \times \overline{aa} = \overline{a0a}.$$

(numerele sînt scrise în baza zece).

Liviu Pîrșan

E : 9596*. Fie un triunghi ascuțitunghic ABC. Se duce înălțimea BE care se prelungește cu un segment $EN \equiv BE$ și înălțimea AD care se prelungește cu un segment $DM \equiv DA$.

a) Există triunghiuri ascuțitunghice ABC astfel încît N, C, M să fie coliniare ?

b) Există triunghiuri ascuțitunghice ABC astfel încît patrulaterul $DECM$ să fie înscriptibil ?

Florin Șetaru, elev, Buzău

E : 9597. Din vîrful A al triunghiului ABC, de arie S și în care $BC = a$, se duce perpendiculara pe bisectoarea unghiului B. Să se afle distanța de la piciorul acestei perpendiculare la dreapta BC.

Constantin Apostol, profesor, Rm. Sărat, Buzău

E : 9598. Se consideră triunghiul ABC cu $\operatorname{tg} B = 2$. Arătați că ortocentrul H al triunghiului este la mijlocul înălțimii din A dacă și numai dacă $\widehat{ACB} = 45°$.

Dumitru Mircă, profesor, Rm. Sărat

Clasa a VIII-a

E : 9599*. Se consideră funcția $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}, f(x) = 2x - 1$. Să se determine valorile $M > 0$ astfel încît pentru orice $x \in \mathbf{R}$ cu proprietatea $|x - 2| < M$ să avem $10(f(x))^2 - 60f(x) + 89 < 0$.

Maria Zaharia și *Dan Zaharia*, profesori, Gh. Gheorghiu-Dej, Bacău

E : 9600. Fie $P(x) = x^3 + 994x^2 - x - \dfrac{a}{2}$ și

$$Q(x) = x^2 + 994x + 993.$$

a) Să se găsească valorile lui a pentru care cel mai mare divizor comun al polinoamelor $P(x)$ și $Q(x)$ este un polinom de gradul 1.

b) Să se găsească polinomul $S(x)$ de gradul I astfel încît polinoamele $T(x)$ și $Q(x)$, unde $T(x) = P(x) - S(x)$, admit drept cel mai mare divizor comun un polinom de gradul al II-lea.

Ana Bogdan, profesoară, Bacău

E : 9601*. Să se arate că dacă a, b, c sînt numere reale pozitive astfel încît $a^2 + b^2 + c^2 = 4\sqrt{abc}$, atunci $a + b + c \geq 2\sqrt{abc}$.

Nistor Budescu, profesor, Dalboșeț, Caraș-Severin

E : 9602. Fie a, b, c numere reale. Să se arate că:

1) Dacă $a + b + c = 1$, atunci $a^4 + b^4 + c^4 \geq abc$;

2) Dacă $abc = 1$, atunci $a^4 + b^4 + c^4 \geq a + b + c$.

Alexandru Szörös, profesor, Drobeta-Tr. Severin

E : 9603*. Să se rezolve în numere întregi ecuația:

$$2xy + 6x + y + 1 = 0.$$

Constantin Dinu, profesor, Buzău

Scanned with OKEN Scanner

E : 9604. Fiind date două numere reale a și b astfel încît $a + b = 1$, arătați că $a^3 + b^3 \geqslant \frac{1}{4}$.

* * *

E : 9605*. Se dau polinoamele $P(x) = mx^4 + nx^2 + p$ și $Q(x) = x^2 - 4x + 3$. Știind că m este un număr întreg și că $P(x)$ este divizibil cu $Q(x)$, să se arate că n este multiplu de 10, p este multiplu de 9 și m este c.m.m.d.c. al numerelor n și p.

Marin Simion, profesor, Rm. Sărat, Buzău

E : 9606. Polinomul $P(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$, $a, b, c, d, e \in \mathbf{Z}$, are printre rădăcini trei numere întregi consecutive. Să se arate că numărul $17a + 9b + 5c + 3d + 3e$, este divizibil cu cel puțin o rădăcină a polinomului.

D. Săvulesu, profesor, Bacău

E : 9607. Să se arate că :

$$\frac{1^2}{1^4+1} + \frac{2^2-1}{2^4+2} + \frac{3^2-2}{3^4+3} + \ldots + \frac{1000^2-999}{1000^4+1000} = \frac{1000}{1001}.$$

Ion Radu, profesor, Bacău

E : 9608*. Fie $ABCDEF$ un hexagon regulat de latură a, iar M mijlocul segmentului $[BF]$. Pe perpendiculara în M pe planul hexagonului se ia punctul V astfel încît $VM = \frac{a}{2}$.

a) Dacă $VN \perp AB$, $VP \perp AF$, $N \in (AB)$, $P \in (AF)$, arătați că punctele M, P, A, N sînt conciclice;

b) Găsiți măsurile unghiurilor formate de VA și VB cu planul hexagonului;

c) Calculați volumul piramidei $VABMP$.

Dumitru Mirică, profesor, Rm. Sărat

E : 9609. Fie triunghiul isoscel ABC cu $(AB) \equiv (AC)$, $AD \perp BC$, $D \in (BC)$, $DE \perp AC$, $E \in (AC)$, $BE \cap AF = \{G\}$, F fiind mijlocul lui DE. Să se arate că $MG \perp BE$, oricare ar fi punctul M pe perpendiculara în A pe planul triunghiului ABC.

Dumitru Mirică, profesor, Rm. Sărat

E : 9610*. Să se afle volumul unui tetraedru știind că muchiile laterale au lungimea l și fac între ele unghiuri de 60°, 90° și respectiv 120°.

Constantin Apostol, profesor, Rm. Sărat

Scanned with OKEN Scanner

PROBLEME PRELIMINARE DE TIP O.I.M. PENTRU ELEVII DIN GIMNAZIU

O.G : 83. Să se rezolve sistemul :

$$\begin{cases} x^2 + y = a, \\ y^2 + x = a. \end{cases}$$

* * *

O.G : 84. Numerele reale a, b, c satisfac relația $a^2 + ab + ac < 0$. Demonstrați că $b^2 > 4ac$.

* * *

O.G : 85. În trapezul $ABCD$ diagonalele AC și BD sînt egale cu baza mare AB. Fie M mijlocul segmentului CD. Dacă $\widehat{MBC} \equiv \widehat{CAB}$, determinați unghiurile trapezului.

Matematika v škole, 5/1986

O.G : 86. În triunghiul ABC în care $BC < BA$ ducem prin punctul C dreapta perpendiculară pe bisectoarea interioară BE a unghiului B ($E \in AC$). Această dreaptă intersectează bisectoarea BE în punctul F și mediana BD ($D \in AC$) în punctul G. Demonstrați că segmentul DF împarte segmentul EG în două părți congruente.

Matematika v școle, 5/1986

PROBLEME PENTRU LICEU

Clasa a IX-a

21597*. Pe un cerc de centru O și diametru $[AB]$ se consideră un punct mobil M. Dacă P este vîrful triunghiului echilateral PBM și P este exterior cercului, iar Q al doilea punct de intersecție a dreptei MP cu cercul, să se arate că :

$$4|OP^2 - AQ^2| \leqslant (PM + PQ)^2.$$

Gh. Neagu, profesor, Bacău

21598. Să se rezolve în mulțimea numerelor reale strict pozitive sistemul :

$$\begin{cases} x^5 - y^5 = 31, \\ x^4 + y^4 = 17. \end{cases}$$

Alexandru Szőrös, profesor, Drobeta-Tr. Severin

Scanned with OKEN Scanner

21599. Fie în plan două triunghiuri echilaterale ABC și CDE la fel orientate. Dacă M și P sînt mijloacele segmentelor $[AB]$ și $[DE]$, să se afle locul geometric al intersecției dreptelor BE și MP cînd triunghiul CDE se rotește în jurul punctului C.

Gh. Neagu, profesor, Bacău

21600. Să se afle cea mai mică și cea mai mare valoare pe care o ia fracția $\frac{x-1}{y-1}$, știind că $x, y \in [3, +\infty)$ și verifică ecuația:

$$x^2 + y^2 - 6x - 6y + 17 = 0.$$

Ioan Bran, inginer, Botoșani

21601*. Notațiile fiind cele obișnuite într-un triunghi, să se arate că:

$$AI + BI + CI \leqslant \sqrt{ab + bc + ca}.$$

Să se deducă de aici că

$$6r \leqslant \sqrt{ab + bc + ca}.$$

Cătălin Cinpercă, elev, Brăila

21602. Fie trapezul $ABCD$ cu $m(\widehat{ADC})$, $m(\widehat{BCD}) < 90°$ și fie $M = \mathrm{pr}_{AD} C$, $N = \mathrm{pr}_{BC} D$, $\{O\} = CM \cap DN$, $\{R\} = DN \cap AB$, $\{S\} = CM \cap AB$. Să se arate că:

a) Punctele M, N, S, R sînt conciclice;

b) $OM \cdot CS = ON \cdot DR$;

c) Dacă $MN \cap AB = \{E\}$ și $F \in (CD)$ astfel încît $[DF] \equiv [CF]$, atunci $EA \cdot EB = ER \cdot ES = EF^2 - \frac{FM^2 + FN^2}{2}$.

Dinu Teodorescu, profesor, Pucioasa, Dîmbovița

21603*. Fie triunghiul ABC neisoscel, M mijlocul lui (BC), D proiecția lui A pe BC, iar E și F respectiv proiecțiile punctelor B și C pe diametrul din A al cercului circumscris triunghiului ABC. Demonstrați că M este centrul cercului circumscris triunghiului DEF.

Aurelian Bejancu, elev, Iași

21604. Se consideră un cerc, o coardă fixă $[AB]$ și un punct M mobil pe cerc. Notăm cu P și Q respectiv mijloacele segmentelor $[MA]$, $[MB]$. Să se demonstreze că:

a) Locurile geometrice descrise de P și Q sînt două cercuri congruente;

b) Cercurile de la punctul a) sînt secante, respectiv tangente exterior, după cum $[AB]$ nu este, respectiv este diametru în cercul dat.

Maria Drăgan, profesoară, București

Scanned with OKEN Scanner

21605*. Fie triunghiul ABC și punctul $P \in \text{Int } ABC$. Notăm cu D, E, F, respectiv intersecțiile dreptelor AP, BP, CP cu laturile (BC), (AC), (AB) și fie $R \in (AP)$. Să se arate că punctele E, R și F sînt coliniare dacă și numai dacă $\frac{AP}{PD} \cdot \frac{PR}{AR} = \frac{FP}{FC} + \frac{EP}{EB}$.

Laurențiu Berghea, elev, Sibiu

21606*. Să se demonstreze că oricare ar fi numărul natural n există un număr natural unic x astfel încît

$$\frac{1}{2x - \sqrt{8n+1}+1} \geqslant \frac{1}{2}.$$

Dan Zaharia, profesor, Gh. Gheorghiu-Dej

21607. Se dă un cerc de diametru $[AB]$ și un punct M mobil pe acest cerc. Pe semidreapta AM se ia un punct T astfel încît raportul $\frac{AM}{AT}$ este constant. Să se afle locul geometric al centrului cercului circumscris triunghiului TMB.

Iulian Păduraru, elev, Bacău

21608*. Fie A, B, C trei puncte distincte fixe situate pe dreapta d astfel încît $B \in (AC)$ și $AB \neq BC$ (B nu e mijlocul lui (AC)) și D un punct oarecare în plan nesituat pe dreapta d. Se duc cevienele oarecare DB, AE, CF, $E \in (DC)$, $F \in (AD)$. Să se arate că dreapta EF trece printr-un punct fix.

* * *

21609. Fie triunghiul ABC cu $m(\hat{A}) \neq 90°$. Pe $(AC$ se ia punctul D, astfel încît $BA = BD$ și pe $(AB$ se ia punctul E, astfel încît $CA = CE$. Să se arate că patrulaterul cu vîrfurile B, C, E, D și triunghiul ABC se pot înscrie în cercuri congruente.

Constantin Apostol, profesor, Rm. Sărat

21610. Pe laturile unui triunghi ABC se consideră punctele $A_1, A_2 \in (BC)$, $B_1, B_2 \in (CA)$ și $C_1, C_2 \in (AB)$. Se notează $\{M_1\} = BC \cap C_1B_2$, $\{M_2\} = BC \cap B_1C_2$, $\{N_1\} = CA \cap A_1C_2$, $\{N_2\} = AC \cap C_1A_2$, $\{P_1\} = AB \cap B_1A_2$, $\{P_2\} = AB \cap A_1B_2$. Să se demonstreze că punctele M_1, N_1, P_1 sînt coliniare dacă și numai dacă M_2, N_2, P_2 sînt coliniare.

Iulica Georgescu, profesoară, București

Clasa a X-a

21611*. Să se găsească numerele complexe z care satisfac simultan egalitățile:

$$\left|\frac{z-1}{z-9}\right| = 1 \text{ și } \left|\frac{z-11}{z-13i}\right| = \frac{3}{5}.$$

Vasile Chiriac, profesor, Bacău

Scanned with OKEN Scanner

21612. Să se determine funcția $f: \mathbf{R}^* \to \mathbf{R}^*$, care satisface egalitatea

$$f(x+3)+f\left(-\frac{9}{x}\right)=\frac{(1-m)(x^2+3x-9)}{9m(x+3)}+\frac{2}{m},$$

oricare ar fi $x \in \mathbf{R}^* \setminus \{-3\}$ și $m \neq 0$, parametru întreg; să se afle apoi valorile întregi ale lui x și m pentru care $f(x) \in \mathbf{Z}$.

Vasile Chiriac, profesor, Bacău

21613*. Să se găsească ultimele două cifre ale numărului:

$$S = 1^{50} + 2^{50} + 3^{50} + \ldots + 1987^{50}.$$

P. Obreja, profesor, Bacău

21614. Să se rezolve în mulțimea numerelor întregi ecuația:

$$x^3 + y^3 = xyz.$$

P. Obreja, profesor, Bacău

21615*. Fie $f \in \mathbf{Z}[X], f = X^3 + aX^2 + bX + c$. Arătați că dacă printre numerele a, b, c există un singur număr par, atunci f admite cel mult o rădăcină rațională.

C. Băcuță, profesor, Bacău

21616. Să se rezolve în $\mathbf{R}$ ecuația:

$$\log_9\left(\log_4\left(4^{\sin^2\frac{x}{2}}+4^{\cos^2\frac{x}{2}}\right)\right)=0.$$

Ion Z. Predescu, profesor, Rast, Dolj

21617*. Să se arate că în orice triunghi ABC are loc inegalitatea:

$$4\cos^2\frac{A}{2}\cdot\cos^2\frac{B}{2}\cdot\cos^2\frac{C}{2}\leqslant\sum\sin^2\frac{A}{2}\cdot\sum\cos^2\frac{B}{2}.$$

Adrian Belciug, matematician, București

21618*. Considerăm tetraedrul $[VABC]$ în care ABC este un triunghi echilateral, iar $m(\widehat{BVC}) = 90°$, $VM \perp (ABC)$, $M \in \mathrm{Int}\,ABC$, $m(\widehat{BMC}) = 150°$. Dacă α, β, γ sînt măsurile unghiurilor diedre formate de fețele laterale cu planul bazei (ABC), să se arate că $\alpha + \beta + \gamma = 180°$.

Laurențiu Chirilă, profesor, Sighișoara

Scanned with OKEN Scanner

21619. Să se arate că ecuația $64x^6 - 96x^4 + 36x^2 - 2 - \sqrt{3} = 0$ admite rădăcina $\cos 5°$.

Lucian Buliga, profesor, Dealu Lung, Vrancea

21620. Să se demonstreze că o condiție necesară și suficientă ca un triunghi să fie dreptunghic în A este

$$\frac{abc + R(a^2 + b^2 - c^2)}{abc} = \frac{R + r}{R(\cos A + \cos B)},$$

notațiile fiind cele uzuale.

Sorin Cojocaru, Craiova

21621*. a) Care sînt valorile reale ale parametrului m pentru care există $x \in \mathbf{R}$ astfel încît să avem

$$\sin^4 x + \cos^2 x = m.$$

b) Să se rezolve ecuația dată pentru $m = \frac{3}{4}$.

Ștefan Tache, profesor, Cîmpina

21622. Să se rezolve în $\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$ ecuația:

$$|x - 3y - 2| + |2x + 3y + 5| + |x + 6y + 16| = 9.$$

C. Ionescu-Țiu, București

21623. Fie $P \in \mathbf{Z}[X]$ și $n \in \mathbf{Z}$ fixat. Să se arate că există $k \in \mathbf{Z}$ astfel încît:

$$P(n) + P(n+1) + \ldots + P(n+k) \vdots 10.$$

Vasile Zidaru, profesor, Sf. Gheorghe, Covasna

21624. Fie ABC un triunghi și $A' \in (BC)$, $B' \in (CA)$, $C' \in (AB)$.
Notăm $S_1 = \sigma[AA'B]$, $S_2 = \sigma[AA'C]$, $S_3 = \sigma[BB'C]$, $S_4 = \sigma[BB'A]$, $S_5 = \sigma[CC'A]$, $S_6 = \sigma[CC'B]$.
Să se demonstreze că dreptele AA', BB', CC' sînt concurente dacă și numai dacă $S_1S_3S_5 = S_2S_4S_6$.

Ion Nedelea, profesor, Alexandria

Scanned with OKEN Scanner

21625. Să se rezolve inecuația :

$$|\cos x|^{|\cos x|} > |\operatorname{tg} x|^{|\cos x|}.$$

Costel Chiteș, profesor, Bacău

21626*. Fie $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ o funcție astfel încît $(f \circ f \circ f)(x) = x^3$, $(\forall) x \in \mathbf{R}$. Să se arate că :

a) f este bijectivă ;

b) $\sqrt[3]{(f \circ f)(x)} = (f \circ f)(\sqrt[3]{x})$, $(\forall) x \in \mathbf{R}$.

Florin Rotaru, matematician, Focșani

21627. Să se rezolve în $\mathbf{R}^3$ sistemul :

$$\begin{cases} yz(2x + y + z) = 42, \\ zx(x + 2y + z) = 24, \\ xy(x + y + 2z) = 18. \end{cases}$$

Gh. Szöllösy, profesor, Sighetu Marmației

21628*. Să se arate că șirurile de numere reale $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$, $(y_n)_{n \in \mathbf{N}}$ care satisfac relațiile :

$$x_n = \cos \frac{2\pi}{m} x_{n-1} + \sin \frac{2\pi}{m} y_{n-1}; \quad y_n = -\sin \frac{2\pi}{m} x_{n-1} + \cos \frac{2\pi}{m} y_{n-1},$$

$(\forall) n \geqslant 1$ (unde $m \in \mathbf{N}$ este fixat), sînt periodice și au aceeași perioadă. (O generalizare a problemei C : 318).

Traian Ianculescu, profesor, Bălan, Harghita

21629. Fie $(a_n)_{n \geqslant 0}$ și $(b_n)_{n \geqslant 0}$ două șiruri de numere reale. Să se demonstreze că $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = \lim\limits_{n \to \infty} b_n = 0$ dacă și numai dacă $(\exists)\, \alpha \in (0,1)$ astfel încît : $\lim\limits_{n \to \infty} (a_n - \alpha b_n) = \lim\limits_{n \to \infty} (\alpha a_n - b_n) = 0$.

Dan Zaharia, profesor, Gh. Gheorghiu-Dej

21630*. a) Să se arate că șirul $(x_n)_{n \geqslant 1}$ dat de

$$x_n = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} - \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{n^2} \right)$$

este convergent și să se calculeze limita sa.

Scanned with OKEN Scanner

b) Să se determine un șir de numere raționale $(a_n)_{n\geq 1}$ cu proprietatea $\lim_{n\to\infty}(\ln n - a_n) = 0$.

Constantin Băcuță, profesor, Bacău

21631. Hiperbola echilateră $x^2 - y^2 = a^2$ este intersectată în punctele A, B de o dreaptă mobilă ce trece prin origine și fie $C(b, 0)$ un punct fixat. Notăm cu P punctul de intersecție al dreptei AC cu paralela dusă prin B la axa absciselor. Să se afle aria triunghiului ABP și locul geometric al punctului P.

P. Obreja, profesor, Bacău

21632*. Față de sistemul de axe dreptunghiulare xOy, se consideră punctul fix $\omega\ (a, b)$. Prin punctul ω trec două drepte Δ, Δ' perpendiculare între ele și notăm $\{M\} = \Delta \cap Ox$, $\{N\} = \Delta' \cap Ox$. Fie P intersecția lui Δ cu perpendiculara în N pe Ox și Q intersecția lui Δ' cu perpendiculara în M pe Ox. Se cere:

1) Să se determine pozițiile dreptelor Δ, Δ' astfel ca $MN = l$, l fiind o lungime dată;

2) Să se afle locurile geometrice ale punctelor P și Q atunci cînd Δ și Δ' se rotesc în jurul lui ω, rămînînd perpendiculare între ele;

3) Locul geometric al mijlocului segmentului $[PQ]$;

4) Să se arate că dreapta PQ trece printr-un punct fix și să se explice geometric această proprietate.

Gh. D. Simionescu

21633*. Fie $p_1, p_2, \ldots, p_n$ numere reale și matricea

$$A = \begin{pmatrix} 1 + p_1^2 & p_1p_2 & p_1p_3 & \ldots & p_1p_n \\ p_2p_1 & 1 + p_2^2 & p_2p_3 & \ldots & p_2p_n \\ p_3p_1 & p_3p_2 & 1 + p_3^2 & \ldots & p_3p_n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ p_np_1 & p_np_2 & p_np_3 & \ldots & 1 + p_n^2 \end{pmatrix}$$

Găsiți inversa matricei A.

Alexandru Lupaș, conf. univ. dr., Sibiu

21634*. Se consideră șirul $(x_n)_{n\geq 0}$ dat de relația de recurență

$$x_{n+1} = x_n^4 - x_n^3 + x_n^2 - x_n + 1,$$

unde $x_0 = a$, $0 < a < 1$.

Scanned with OKEN Scanner

1) Dovediți că șirul $(x_n)_{n>0}$ este convergent;

2) Calculați $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

I. Safta, profesor, Pitești

21635. Fie $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un șir de numere reale nenule. Arătați că dacă $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sin x_n}{x_n} = 1$, atunci $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$.

Ion Bursuc, profesor, Estelnic, Covasna

21636. În triunghiul ABC se duc medianele AD, BE și CF. Calculați: $\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{BE} + \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CF}$.

* * *

21637. Calculați determinantul:

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{3} & \frac{-5}{2} & \frac{-2}{3} & \frac{3}{2} \\ \frac{5}{3} & \frac{-8}{3} & \frac{-2}{3} & \frac{-7}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{-9}{2} & \frac{4}{3} & \frac{5}{2} \\ \frac{-1}{7} & \frac{2}{7} & \frac{-1}{7} & \frac{3}{7} \end{vmatrix}.$$

* * *

21638. Fie punctele $A(1,0)$, $B(0,5)$, $C(t, t+2)$, unde $t\in[2,3]$. Determinați locul geometric al punctului D din planul determinat de punctele A, B, C astfel încît patrulaterul $ABCD$ să fie paralelogram.

Liviu Pîrșan

Clasa a XII-a

21639*. Să se arate că polinomul $P(X) = X^{1989} + X^{1988} + 13X^2 + 13X + 1989$ este ireductibil peste $\mathbf{Z}$.

Doru Isac, profesor, Sibiu

21640. Pe mulțimea $G = [0,1)$ considerăm legea de compoziție $x \oplus y = \{x + y\}$, unde $\{a\}$ este partea fracționară a numărului real a.

Scanned with OKEN Scanner

Să se arate că:

a) $(G, \oplus)$ este un grup abelian;

b) Dacă $n \in \mathbf{N}$, $n \geqslant 2$, notînd $G_n = \left\{0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \ldots, \frac{n-1}{n}\right\}$, atunci $(G_n, \oplus)$ este subgrup al lui $(G, \oplus)$;

c) Avem izomorfismele de grupuri $(G_n, \oplus) \simeq (\mathbf{Z}_n, +)$ și $(G, \oplus) \simeq (U, \cdot)$, unde $U = \{z \in \mathbf{C} \mid |z| = 1\}$.

* * *

21641. Arătați că ecuația $x^3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 4 & 5 \end{pmatrix}$ nu are soluții în grupul S_5.

C. Băcuță, profesor, Bacău

21642*. Se consideră funcția $f : (a, b) \to \mathbf{R}$ dată de legea

$$f(x) = \arcsin \frac{2x - a - b}{b - a} + 2 \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{b - x}{x - a}}, \quad a, b \in \mathbf{R}, \ a < b.$$

Să se arate că f admite primitive și să se determine o primitivă a sa.

I. Ursu, Motru

21643. Se consideră o funcție f continuă pe intervalul $[a, b]$, $0 < a < b$ și derivabilă pe acest interval. Știind că $\int_a^b f(x)\,dx = bf(b) - af(a)$, să se arate că există $c \in (a, b)$ astfel încît $f'(c) = 0$.

Florin Rotaru, matematician, Focșani

21644. Să se găsească toate polinoamele $f \in \mathbf{Z}_8[X]$ astfel ca $f^2 = \hat{1}$ și grad $f = 2$. Care dintre aceste polinoame sînt divizibile prin polinomul $g = \hat{2}X + \hat{5}$?

Vasile Chiriac, profesor, Bacău

21645. Fie $(G, \cdot)$ un grup necomutativ și x, y două elemente distincte ale grupului. Dacă x este de ordin 3 și y de ordin 4, iar $xy = y^3x$, să se demonstreze că grupul G conține un subgrup comutativ cu 6 elemente.

Dan Zaharia, profesor, Gh. Gheorghiu-Dej

21646. Considerăm inelul $(A, +, \cdot)$ în care $a^2 = 0$ numai pentru $a = 0$. Arătați că dacă $x, y \in A$ și $xy = 0$ atunci $xay = 0$, $(\forall)\ a \in A$.

Doru Isac, profesor, Sibiu

21647*. Să se determine polinoamele cu coeficienți reali P care satisfac relația $P(x^3 + 1) = P^3(x) + 1$, $(\forall)x \in \mathbf{R}$ și $P(0) = 0$.

L. Tuțescu, Craiova și *D. Săvulescu*, Bacău

Scanned with OKEN Scanner

21648*. Să se determine toate funcțiile $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ care admit primitive și care verifică $f(x)F(2-x) = x$, $(\forall)\, x \in \mathbf{R}$ și $f(1) = 1$, unde F este o primitivă fixată a lui f.

Ionel Gh. Tudor, profesor, Călugăreni, Giurgiu

21649. Fie $f, g : [a, b] \to \mathbf{R}$, două funcții ce satisfac condițiile:
1°. f, g sînt continue pe $[a, b]$;
2°. g este derivabilă de două ori pe $[a, b]$ și $g''(x) \geqslant 0$ pe $[a, b]$;
3°. $g(a) = g'(a) = 0$.

Dacă $F(x) = \int_a^x f(t)g''(t)\mathrm{d}t$, $x \in [a, b]$, atunci au loc inegalitățile:

$$g(b) \inf_{x\in[a,b]} f(x) \leqslant \int_a^b F(t)\mathrm{d}t \leqslant g(b) \sup_{x\in[a,b]} f(x).$$

Dumitru Acu, lector. univ. dr., Sibiu și
Gh. Miculescu, profesor, Tîrgoviște

21650*. Să se calculeze: $\int \frac{2^x}{4^x - 6\cdot 2^x + 13}\,\mathrm{d}x$.

* * *

21651. Să se calculeze: $\int \frac{\operatorname{arc\,tg} x}{x^2}\,\mathrm{d}x$.

* * *

21652*. Fie $a \in \mathbf{N}$, $a \geqslant 1$ fixat. Să se calculeze limita șirului $(x_n)_{n\geqslant 1}$ dat de:

$$x_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{a\cdot n} \mathrm{e}^{\frac{k}{n}} \cdot \sin\left(\frac{ak}{n}\right).$$

Liviu Pîrșan

PROBLEME PREGĂTITOARE PENTRU O.I.M. ȘI O.B.M.

O : 566. Fie $n \in \mathbf{N}^* \setminus \{5\}$ și $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbf{R}$ astfel încît $a_k \in \left(0, \frac{1}{2}\right]$, $k = \overline{1, n}$ și pentru fiecare $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$, $\sum_{\substack{i=1 \\ i\neq k}}^{n} a_i \leqslant 2$. Să se demonstreze că $\sum_{i=1}^{n} a_i^2 \leqslant 1$.

G. Chiriacescu, matematician, București

O : 567. Se consideră un patrulater inscriptibil avînd perechile de laturi opuse de lungimi a, c respectiv b, d, iar diagonalele de lungimi e și f. Se notează cu $\cdot$ puterea punctului de intersecție a diagonalelor față

Scanned with OKEN Scanner

de cercul circumscris și cu p semiperimetrul. Să se demonstreze că :

a) $(a+c)(b+d)\sqrt{\rho} = (e+f)\sqrt{abcd}$;

b) Dacă patrulaterul este și circumscris unui cerc de rază r, atunci $p\sqrt{\rho} = (e+f)\cdot r$.

Virgil Nicula, profesor, București

O : 568. Se dă patrulaterul $ABCD$ circumscris unui cerc de centru O și fie $\{T\} = AC \cap BD$, iar M, N, P, Q punctele de tangență ale cercului respectiv cu laturile $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$, $[DA]$. Notăm $\{R\} = MN \cap PQ$, $\{S\} = NP \cap MQ$, $\{K\} = SO \cap AC$, $\{L\} = RO \cap BD$. Să se arate că punctele O, T, K, L sînt conciclice (le presupunem diferite între ele).

Patrik Popescu-Pampu, elev, București

O : 569. Fie $\mathscr{S}_1$ și $\mathscr{S}_2$ două sfere și $\mathscr{C}$ cercul lor de intersecție.

a) Să se arate că pentru orice două puncte distincte A, $B \in \mathscr{S}_1 - \mathscr{C}$, există și sînt unic determinate două puncte distincte C, $D \in \mathscr{S}_2 - \mathscr{C}$ astfel încît dreptele AC, AD, BC și BD sînt concurente într-un punct situat pe cercul $\mathscr{C}$;

b) Să se demonstreze că în condițiile de la punctul a) dreptele AB și CD sînt perpendiculare.

Florin Colceag, profesor, București

O : 570. Dacă $n \in \mathbf{N}^*$, $n \geqslant 4$, $u_1 = a > 0$, $u_2 = b > 0$, $u_3 = c > 0$ și $u_{m+3} = u_m$, $(\forall) m \in \mathbf{N}^*$ să se rezolve în mulțimea numerelor reale sistemul de ecuații :

$$x_k x_{k+1} x_{k+2} = u_k x_k + u_{k+1} x_{k+1} + u_{k+2} x_{k+2}, \quad k = \overline{1, n},$$

unde pentru uniformitate $x_{n+1} = x_1$ și $x_{n+2} = x_2$.

D. M. Bătinețu-Giurgiu, profesor, București

O : 571. Fie k și n numere naturale, $k \geqslant 2$, $n \geqslant 2k$. Să se determine maximul următoarei sume cu n termeni :

$$S = x_1 x_2 \ldots x_k + x_2 x_3 \ldots x_{k+1} + \ldots + x_n x_1 \ldots x_{k-1},$$

cînd $x_1 \geqslant 0$, $x_2 \geqslant 0, \ldots, x_n \geqslant 0$ și $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = 1$.

Petru Mironescu, student, București

PROBLEME PENTRU CONCURSUL ANUAL AL REZOLVITORILOR

Clasele a IX-a și a X-a

C : 833. Fie $p \in \mathbf{N}^*$ un număr prim și $k \in \mathbf{N}$. Să se arate că

$$\frac{(pk)!}{k!\,p^k} \equiv (-1)^k (\mathrm{mod}\ p).$$

(O generalizare a teoremei *Wilson*).

Norocel Munteanu, student, București

Scanned with OKEN Scanner

C : 834. Fie $\mathcal{C}(O, r)$ un cerc și $[AA']$, $[BB']$ două diametre fixe. Prin A se duce o dreaptă variabilă d care intersectează diametrul $[BB']$ în M și cercul a doua oară în N. Perpendiculara în M pe BB' și tangenta în N la cerc se intersectează în P. Să se determine :

a) Locul geometric al lui P;

b) Locul geometric al punctului Q de intersecție a dreptelor d și OP.

Anca Sița, profesoară, București

C : 835. Fie $k \in \mathbf{N}^*$. Oricărui număr real x i se asociază un număr rațional $[x]_k = \frac{m}{k}$, $m \in \mathbf{Z}$ astfel încît $[x]_k \leqslant x < [x]_k + \frac{1}{k}$. Să se arate că

$$\sum_{i=0}^{n-1} \left[x + \frac{i}{nk} \right]_k = [nx]_k, \quad (\forall)\, x \in \mathbf{R} \text{ și } n \in \mathbf{N}^*.$$

Zoltan Finta, profesor, Oradea

C : 836. În triunghiul ascuțitunghic ABC ceviencle AA', BB' și CC' sînt concurente în punctul P. Cercul circumscris triunghiului $A'B'C'$ intersectează a doua oară dreptele AA', BB' și CC' respectiv în punctele A_1, B_1 și C_1. Să se arate că P este ortocentrul triunghiului ABC dacă și numai dacă P este ortocentrul triunghiului $A_1B_1C_1$.

N. Pavelescu, profesor, Rîmnicu Vîlcea

C : 837. Fie $k \in (0, 1)$ și $g : \left[\frac{1}{k}, \infty\right) \to [1, \infty)$ o funcție crescătoare.

a) Să se demonstreze că funcția $f : \left[\frac{1}{k}, \infty\right) \to \left[\frac{1}{k}, \infty\right)$, $f(x) = x^{[kx]} \cdot g([kx])$ este injectivă;

b) Pentru $k = \frac{1}{2}$ și $g : [2, \infty) \to [1, \infty)$,

$$g(x) = \begin{cases} 1, & \text{dacă } x \in [2,4) \\ \dfrac{1}{4 \cdot 6 \cdot 8 \ldots (2[x])}, & \text{dacă } x \in [4, \infty), \end{cases}$$

să se demonstreze că funcția f de la punctul a) este bijectivă. (Peste tot $[a]$ desemnează partea întreagă a lui $a \in \mathbf{R}$).

Mircea Radu, profesor, Sfîntu Gheorghe

C : 838. a) Fie $a, b, c \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ astfel încît $\sin^2 a + \sin^2 b + \sin^2 c = 2$. Să se arate că $a + b + c \in \left(\frac{3\pi}{4}, \pi\right]$;

Scanned with OKEN Scanner

b) Să se demonstreze pe baza punctului a) următorul rezultat: suma măsurilor unghiurilor diedre ale unui tetraedru tridreptunghic este mai mare decît $\frac{9\pi}{4}$ și mai mică decît 3π.

Cristian Voica, matematician, București

C : 839. Triunghiurile ABC și $A'B'C'$ au $AB = A'B'$ și $AC = A'C'$. Notînd cu M și M' respectiv mijloacele laturilor $[BC]$ și $[B'C']$, să se demonstreze că următoarele afirmații sînt echivalente:

a) $AM = \frac{B'C'}{2}$;

b) $A'M' = \frac{BC}{2}$;

c) $m(\hat{A}) + m(\hat{A}') = 180°$.

C. Apostol, profesor, Rîmnicu Sărat, Buzău

C : 840. Fie $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbf{R}$ și $b_1, b_2, \ldots, b_n \in \mathbf{N}$, $b_i \neq b_j$, $(\forall) i, j = \overline{1, n}$, $i \neq j$. Să se demonstreze că funcția $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k \sin b_k x$ este crescătoare dacă și numai dacă $a_k = 0$, $(\forall) k = \overline{1, n}$.

Marian Dincă, profesor, Perșani, Brașov

Clasele a XI-a și a XII-a

C : 841. Demonstrați că

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \cdot \sum_{1 \leq i < j \leq n} \frac{1}{\sqrt{i \cdot j}} = 2.$$

Ioan Toderiță, profesor, Galați

C : 842. Să se arate că pentru orice matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ avînd pe diagonala principală toate rădăcinile de ordinul n ale unității, există matricele B, $C \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$, astfel încît $A = B + C$ și $B^n = I_n$, $C^n = O_n$.

Ionel Gh. Tudor, profesor, Călugăreni, Giurgiu

C : 843. Se consideră șirul $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ cu $a_0 \in \mathbf{Z}$ astfel încît $a_{n+1} = \begin{cases} a_n + n \text{ dacă } a_n < n \\ a_n - n \text{ dacă } a_n \geq n \end{cases}$. Se notează cu b_n rangul celui de al n-lea termen nul al șirului $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$. Să se calculeze $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{b_k}{k!}$.

Marcelina Cristian, profesoară, Bacău

C : 844. Fie $(a_n)_{n\geq 1}$, $(b_n)_{n\geq 1}$ șiruri de numere reale strict pozitive astfel încît

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = a \in \mathbf{R}_+^*, \quad \lim_{n\to\infty} \frac{b_n}{n} = b \in \mathbf{R}_+^* \text{ și } \lim_{n\to\infty} (b_{n+1} - b_n) = c \in \mathbf{R}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Să se demonstreze că:

$$\lim_{n\to\infty}(b_{n+1}\sqrt[n+1]{a_{n+1}} - b_n\sqrt[n]{a_n}) = a \cdot e.$$

(O generalizare a problemei lui *Traian Lalescu*).

D. M. Bătineţu-Giurgiu, profesor, Bucureşti
şi *Marius Somodi*, student, Bucureşti

C : 845. Fie $f \in \mathbf{Q}[X]$, grad $f \geq 2$ şi $A = \{x \in \mathbf{R} - \mathbf{Q} \mid f(x) \in \mathbf{Q}\}$. Să se arate că A este numărabilă şi densă în $\mathbf{R}$.

I. Savu, Bucureşti

C : 846. Se ştie că dacă $G=(-1,1)$ şi $x*y=\dfrac{x+y}{1+xy}$, $(\forall)x, y \in G$, atunci $(G, *)$ este grup. Să se determine toate funcţiile continue $f: G \to G$ astfel încît $f(x*y) = f(x)*f(y)$, $(\forall)\ x, y \in G$.

Marcelina Cristian, profesoară, Bacău

C : 847. Să se determine numerele naturale $n \in \mathbf{N}^*$, $n \geq 3$, cu proprietatea că există grupuri comutative $(G, \cdot)$, $G = \{e, a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ astfel încît $a_1 = a_2 a_n$, $a_n = a_1 a_{n-1}$ şi $a_k = a_{k-1}a_{k+1}$, $(\forall)k = \overline{2,\ n-1}$.

D. M. Bătineţu-Giurgiu, profesor, Bucureşti

C : 848. Fie $(G,+)$ un grup aditiv. Pentru oricare două aplicaţii f şi g de la G în G definim suma $f+g$ şi compunerea $f\circ g$ prin $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$, $(f\circ g)(x) = f(g(x))$, $(\forall)x \in G$.

Să se demonstreze că:

a) $(f_1 + f_2)\circ g = f_1\circ g + f_2\circ g$, pentru oricare trei aplicaţii f_1, f_2, g de la G în G;

b) Aplicaţia $f: G \to G$ este endomorfism al grupului G dacă şi numai dacă $f\circ(g_1+g_2) = f\circ g_1 + f\circ g_2$ pentru oricare două aplicaţii g_1, g_2 de la G în G.

Marcel Ţena

UNDE ESTE GREŞEALA?

de Constantin V. Crăciun

1. Fie $D \subseteq \mathbf{R}$, $x_0 \in \mathbf{R}$, x_0 = punct de acumulare pentru D, $l \in \mathbf{R}$ şi o funcţie $f: D \to \mathbf{R}$. Să se demonstreze că în definiţia cu ε şi δ a limitei lui f în punctul x_0:

Pentru orice $\varepsilon > 0$, *există* $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ *astfel încît* $x \in D \setminus \{x_0\}$, $|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$

se poate înlocui inegalitatea $|f(x) - l| < \varepsilon$ prin $|f(x) - l| \leqslant \varepsilon$.

„Demonstraţie". Într-adevăr, dacă $|f(x) - l| < \varepsilon$, atunci evident că $|f(x) - l| \leqslant \varepsilon$.

Vom demonstra că are loc şi implicaţia reciprocă. Pentru $\varepsilon > 0$, fixat, considerăm mulţimea $\{x_1, \ldots, x_n\}$ a punctelor x din intervalul $[x_0 - \delta,\ x_0 + \delta]$ cu proprietăţile: $x_1, \ldots, x_n$ sînt diferite de x_0 şi $|f(x) - l| = \varepsilon$.

Punem $\delta' = \dfrac{1}{2}\inf_{1\leq i\leq n}|x_i - x_0| > 0$ şi avem:

$$|x - x_0| < \delta' \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon.$$

Unde este greșeala?

2. Fie $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ o funcție continuă și $\{x_n\}_{n \in \mathbf{N}}$ un șir de numere reale astfel încît $(\forall) n \in \mathbf{N}$, $f(x_n) = 0$. Atunci pentru orice $t \in \mathbf{R}$ avem $f(t) = 0$.

„Demonstrație". Din continuitatea lui f în t deducem că $(\forall)\varepsilon > 0$, $(\exists)\,\delta > 0$ astfel încît

$$|x - t| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(t)| < \varepsilon.$$

Luînd $x = x_n$, obținem:

$$|f(x_n) - f(t)| = |f(t)| < \varepsilon.$$

Deoarece ultima inegalitate este adevărată pentru orice $\varepsilon > 0$, rezultă că $f(t) = 0$. c.e.t.d.

Dar, dacă considerăm $f(x) = \sin x$ și $x_n = n\pi$, constatăm că $f(x_n) = 0$ și *totuși* f *nu* se anulează pentru orice $t \in \mathbf{R}$.

Unde s-a greșit?

RUBRICA REZOLVITORILOR DE PROBLEME

ALBA IULIA (ALBA) Lic. „Horia, Cloșca și Crișan" cl. IX Crainic Marius (480); **ANINA** (CARAȘ-SEVERIN) Ș. g. 1 cl. VII Turcea Marcel Augustus-Viorel (90); **APELE VII** (DOLJ) Ș. g. cl. VII Diaconescu Daniel (180); **ARAD** (ARAD) Ș. g. 1 cl. VI Tripșa Monica (130); Ș. g. 4 cl. V Costescu Georgiana (80), cl. VII Cheța-Alina (166); Ș. g. 13 cl. V Păiș Ana-Maria (90), Virag Mihai (103); Ș. g. 18 cl. VI Neacșu-Doru Orlando (70); Lic. ind. 12 cl. V Alina Lucuța (90), Ciupav Livia (78), Negrei Andromeda (109), Török Monica (80), cl. VII Purice Monica-Maria (148); Lic. „I. Slavici" cl. VIII Verzea Onorina (100); fără mențiune de școală cl. V Paraschiv Mihai (70), cl. VI Popescu Daciana (76); **AZUGA** (PRAHOVA) Ș.g. cl. V Grușea Alina (60), Hepea Mioara (60), cl. VI Comoșu Elena (48), Glesnea Monica (216); fără mențiune de clasă: Kolober Mihai (60);

BACĂU (BACĂU) Ș. g. 2 cl. V Andronic Mihaela (190), Bejan Maria (110), Ioniță Ionela (100), Istrate Iulia (110), Lazăr Gigel (140), Radu Irina (135), Rofoilă Irina (153), Simion Cezar (150), Stineru Alina (150), Trifan Roxana (160), Voicu Florin (150); Ș. g. 4 cl V Butcaru Ana (108), Cucu Cristina (110), Ghigea Ion (110), cl. VI Botezatu Cristina (100); Ș. g. 5 cl. V Berza Eugenia (90); cl. VI Adăscăliței Corina (37), Antochi Adriana (100), Ghereches Virgil (110), Chiriac Alina (71), Nemeș Radu (107), Pamfil Radu (35); Ș. g. 8 cl. VI Ungureanu Gabriel (170); Ș. g. 10 cl. VI Alexandru Gina (80), Chilat Daniela (277), Munteanu Liliana (80), Vancea Ciprian (70), cl. VII Cios Nicoleta (42), Petrea Mihaela (30); Ș. g. 18 cl. V Potoroacă Eglapie (90), Podoiu Silviu (187), cl. VI Manase Oana-Claudia (66), cl. VII Rădăuceanu Nicoleta (80), cl. VIII Bârzan Cătălina (95); Ș. g. 19 cl. V Grădeanu Ioana (140), Godeanu Ioana (80), Ungureanu Viorica (36), cl. VI Aruxandei Ana-Maria (80), Baciu Anca-Oana (70), Bibire Mădălina-Mihaela (80), Coman Florin (80), Serea Lucian (160), Ungureanu Ana-Raluca (160), Uricaru Cristina (80), cl. VII Godeanu Veronica (190); fără mențiune de clasă: Petrilă Ovidiu (80), Grigoraș Irina (70); Ș. g. 27 cl. III Păduraru Maria (240), cl. VI Iancu Aniela-Karina (202); Ș. g. 28 cl. VIII Ceucă Simona (110); fără mențiune de școală: cl. V Hanu Magdalena (52), Mangu Irinel (25), cl. VI Mireanu Andreea (28); fără mențiune de casă și școală: Tolescu Irina (131); **BAIA DE ARIEȘ** (ALBA) Lic. ind. 5 cl. V Joldeș Ioan (80); **BAIA MARE** (MARAMUREȘ) Ș. g. 4 cl. V Popescu Lucica (100), cl. VI Oros Claudia (80),1 Peter Horațiu (80); Ș. g. 8 cl. VII Zaharia Sorin (220); Ș. g. 11 cl. V Breban Corina (80), Roșca Onițu (90), cl. VI Cîrț Ciprian (80); Ș. g. 14 cl. VI Rogaș Marius (79); Ș. g. 21 cl. V Cavași Adriana-Mariana (90); Lic. ind. 8 cl. V Cosma Cătălin (130), Radu Andrada (80),cl. VI Kelleuberger Andreea (90); **BALTA DOAMNEI** (IALOMIȚA) Ș. g. cl. VII Manole Tatiana (30); **BĂILE HERCULANE** (CARAȘ-SEVERIN) Ș. g. cl. VI Vasilache Camelia-Petruța (64); **BĂILEȘTI** (DOLJ) Ș. g. 1 cl. VI Tănasie Ancuța (90), cl. VII Buțu Camelia (150); **BĂLAN** (SĂLAJ) Ș. g. cl. VI Mare Ioan (129); **BECLEAN** (BISTRIȚA NĂSĂUD) Ș. g. cl. V Măierean Horațiu (75), cl. VI Măierean Carmen (105), Pop Florin (90); **BEIUȘ** (BIHOR) Ș. g. cl. V Bălaj Adriana (80), cl. VI Burz Adrian (100), cl. VII Blaj Claudia (95), Popa Adrian (100); Lic. „S. Vulcan" cl. V Herman-Aurica (58), Iovan Ramona (80), Surea Adrian (63), cl. VI Alexe Mircea (128), Balaci Adrian Vasile (115), Bolovan Călin-George (240), Făgie Rodica (105), Ghenghiu Ioan (120), Galea Ioana (182), Ignat Denisa (209), Laza Florin Silviu (207), Magda Laura-Claudia (233),

Scanned with OKEN Scanner

Borar Alina (140), Nicodim Florina (119), Pavel Lucian (109), Popa Adela (207), Sala Mihaela (220), Trif Anamaria-Anca (80) cl. VII Borz Claudiu (87), Herman Ciprian (60), Înășel Liviu (60), Molnar Istvan (120), Molnar Stefan (98), Rusu Laura (100), Vesa Camelia (127): **BEIUȘTI** (IAȘI) Ș. g. cl. V Ciobanu Ionica (80), Mihăilă Georgeta (62), Pintilie Claudiu (62), Săvoia Daniela (80), Tais Nicoleta (80); **BELIU** (ARAD) Ș. g. cl. V Hărdăuț Lucian (60), Mureșan Cosmin (60); **BERCENI** (S.A.I.) Ș. g. 299 cl. VI Vilcu Nicoleta (120); **BINIȘ** (CARAȘ-SEVERIN) Ș. g. fără mențiune de clasă: Stan Ionela (90); **BIRLAD** (VASLUI) Ș. g. 1 cl. V Cănepă Adrian (110); Ș. g. 8 cl. IV Tocan Franco (50); **BLĂGEȘTI** (BACĂU) Ș. g. cl. V Radu Corina (100);

BOTOȘANI (BOTOȘANI) Ș. g. 7 cl. V Bălan Alina (110), Georgescu Oana (108), Pascaru Daniel (106), Wahmean Paul (78), Senipcă Oana (75), Finașcu Teodora (74), Vieru Răzvan (70), cl. VII Palancanu Carmen (110), cl. VIII Apetrei Gabriel (128); Ș. g. 8 cl. V Archip Nicoleta (100); Ș. g. 12 cl. V Buliga Luciana (65), Cojocaru Mihaela (70), Darea Daniela (76), Macovei Laurențiu (80), cl. VI Larco Ciprian (120), cl. VII Andone Cristina (203), Ciornea Daniel (80), Corduneanu Isabela (130), Coroi Claudiu (168), Creangă Otilia (230), Gheorghiță Cătălin (73), Honciuc Grațiela (98), Leontieș Cristina (110), Moga Manuela (110), Onofrei Camelia (120), Strugariu Alina-Lucia (80), Tătăringă Gabriela (110), Vasiliu Magdalena (270) cl. VIII Andone Cristina (110), Aluculesei Carmen-Ioana (80), Covalciuc Dan (120), Creangă Otilia (100), Corduneanu Isabela (80), Huțanu Emy (100), Honciuc Grațiela (80), Iustin Liviana (120), Mania Manuela (120), Moga Manuela (80), Popovici Cristian (80), Tătăringă Gabriela (80), Ticalo Adriana (110), Strugariu Alina-Lucia (80); Ș. g. 13 cl. V Arcalianu Florin (100), Bahnă Ovidiu (90), Călin Vasile (95), Ciubotaru Cezar (100), Fostea Carmen (100), Gherghel Monica (100), Ionel Rita (100), Palade Ionuț (100), Popovici Cristian-Dan (82), Portariuc Carmen (95), Spătaru Marcela (90), Zahariuc Alina (95); cl. VI Andrici Larisa (99), Aniței Ioan (140), Arbip Paula (168), Atodiresei Vasile (140), Bejenaru Petru (170), Ciubotariu Silviu-Eduard (150), Dăscălescu Loredana (120), Gherghel Mihăiță Cristian (145), Nenițescu Corneliu (160), Nenișca Corneliu (259), Paraschiv Dorel (112); fără mențiune de școală: cl. VI Alexiuc Dragoș (49); fără mențiune de clasă și școală: Crețu Cristina (100); Lic. ind. „M. Eminescu" cl. IX Andone Carmen-Maria (94); **BOZOVICI** (CARAȘ-SEVERIN) Ș. g. cl. V Borlovan Cătălin (90); Lic. „E. Murgu" cl. IX Popescu Rodica (88); **BRAȘOV** (BRAȘOV) Ș. g. 3 cl. VI Vilcui Adrian (540), Ș. g. 5 cl. V Lovin Oana (59), Socea Bogdan (59) cl. VI Cojocaru Aurelian (80), Papuc Radu (78), Potroviță Ileana (90), cl. VIII Botez Delia (59), Klein Liviu (60), Lăcătuș Mirela (59); Ș. g. 10 cl. V Gheorghe Roxana (129), Marinescu Mihaela (120), Nemțan Maria (130), Pop Mircea (90); Ș. g. 13 cl. VIII Tutunea Gabriela (50); Ș. g. 15 cl. VII Anișca Răzvan (140); Ș. g. 24 cl. VI Albert Raluca (150); Ș. g. 26 cl. III Măniuț Lucia (96), cl. V Măniuț Petruța (112); Ș. g. 27 cl. V Tampa Carmen (70), cl. VI Ienești Daniela (90); Lic. „A. Șaguna" cl. IX Cucerzan Silviu (160), Pernea Rodica (110); **BRATIA-DEAL** (VÎLCEA) Ș. g. cl. VI Lixandru Iulia-Mirela (59); cl. VII Oprea Patricia-Daniela (50), cl. VIII Vlădulescu Cristina (110); **BRĂILA** (BRĂILA) Ș. g. 3 cl. V Chivu Simona-Luminița (70); Ș. g. 7 cl. VI Ciurea Ionuț (207); Ș. g. 10 cl. V Stamate Ecaterina (90), cl. VII Cuzmin Ecaterina (100); Ș. g. 14 cl. V Alexe Daniel (110), cl. VI Apfelbaum Zemy (190); Ș. g. 18 cl. VI Cauteș Cătălin (70); Ș. g. 22 cl. V Adam Mioara (100), Bărbieru Florentina (96), Duduță Daniel (100), Fătu Gheorghe Viorel (159) Gheorghe L l ana-Rozalia (160), Ianca Sorin-Claudiu (150), Mihăilă Silvioara-Paula (100), Neculai Carmen-Violeta (160), Tanislav Elena (160), Tănase Adrian (105), Vlad Steluța-Simona (145); cl. VI Ioniță Aida (290), Pătrașcu Lucica (100), Stroe Mihaela (140), cl. VII Tănase Gabriel-Iulian (120), cl. VIII Calu Doinița (240); Ș. g. 30 cl. VI Castravet Ana-Maria (229); Lic. ind. 4 „Gh. Murgoci" cl. X Bardaș Cătălin-Virgil (228); Lic. „N. Bălcescu" cl. X Georgescu Paul (108); **BREAZA** (PRAHOVA) Ș. g. cl. V Giurcă Ioana (100), cl. VI Rădulescu Corina (79); **BREZOI** (VÎLCEA) Lic. ind. cl. V Bădescu Ciprian (115); **BUCECEA** (BOTOȘANI) Ș. g. cl. VI Bulboană Liviu (90);

BUCUREȘTI Ș. g. 1 cl. IV Paven Dan-Florin (144), Teodorescu Ștefan (194); Ș. g. 3 cl. VII Bădescu Miruna (120); Ș. g. 5 cl. V Boșianu Ruxandra (78), cl. VIII Stanciu Nicolae (80); Ș. g. 7 cl. V Cocor Andrei (100); Ș. g. 11 cl. VII Albu Irina (100); Ș. g. 15 cl. VI Anghel Ana-Maria (50); Ș. g. 20 cl. VI Mașgras Elena-Ligia (180), cl. VIII Petre Cristian-Șerban (200); Ș. g. 24 cl. V Baciu Mirela (78), Farsea Ana-Maria (88), Manolescu Daniela (69), Patriciu Șerban (80), Stan Claudiu (197), Virjoghe Andreea (90); Ș. g. 25 cl. VIII Tipu Irina-Loredana (79); Ș. g. 27 cl. VIII Efrim Cristina-Oana (80); Ș. g. 28 cl. V Ionescu Alina (76); Ș. g. 45 cl. VII Munteanu Dragoș (220); Ș. g. 49 cl. I Andreea Calude (60); Ș. g. 56 cl. VII Ștefănescu Cătălina (120); Ș. g. 59 cl. VI Poinariu Gabriela (70); Ș. g. 70 cl. V Savu Carmen (170), Florescu Raul-Cosmin (69), cl. VI Mateescu Andreea (78), Sava Anca-Gabriela (140), Sava Carmen-Gabriela (140); Ș. g. 96 cl. IV Bocman Mariana-Denisa (72); Ș. g. 97 cl. VI Lucaciu Cristinel (140); Ș. g. 108 cl. VI Gorgan Emanuel (220), cl. VII Stuparu Mihai (56); Ș. g. 117 cl. V Cândea Mihaela (40), cl. VI Anton Radu-Costin (160), Grigoraș Costin (100); Ș. g. 143 cl. VI Dragotă Mugur-Ștefan (114); Ș. g. 155 cl. VI Georgescu Irina (180); Ș. g. 156 cl. V Cobanu Laura-Ioana (70); cl. VI Ceaușu Aura-Florentina (150), Dan Diana (50), Mosgoreanu Cătălin (58), Mrejeru Mihaela (40), Naum Gabriela (89), Tanu Valentina (80), cl. VII Dumi-

Scanned with OKEN Scanner

trescu Andreea Nicoleta (130), Manolache Șerban (100), Parnia Andreea (142); Ș. g. 157 cl. VII Sandu Gabriel (120); Ș. g. 172 cl. V Dumitru Bogdan-Dinu (80), cl. VI Bucurescu Iuliana (100); Ș. g. 173 cl. V Parpală Adela (90); Ș. g. 174 cl. VI Basangiu Florin (35), Cernica Mariana-Cătălina (110), Coroș Cătălin (110), Dușmanu Teodora-Daniela (101), Dumitrescu Nicolae (178), Gheorghiu Adina (119), Iliescu Oana-Mădălina (110), Ispas Cornelia (100), Mischie Daniel (109), Munteanu Dorinela-Ruxandra (140), Tosculă Răzvan (79), Varovenci Daniela Monica (99), cl. VII Cernica Mariana-Cătălina (100), Dușmanu Teodora-Daniela (100), Maximciuc Alexandru (100), Pancu Mihai (100); fără mențiune de clasă: Ardileanu Monica (25); Ș. g. 179 cl. VIII Nicolae Veronica (140); Ș. g. 186 cl. VII Sterescu Ioana (105); Ș. g. 190 Mariițescu Carmen-Beatrice (150), Mihalache Vlad (69), Neacșu Nicoleta (169), Penescu Bogdan (79); Ș. g. 194 cl. V Bocman Cristian (190), cl. VII Andrei Verginica-Iuliana (80); Ș. g. 196 cl. V Nițu Adrian Costin (89); Ș. g. 201 cl. IV Apostol Oana (80), cl. VI Ungureanu Ștefan(96); Ș. g. 204 cl. V Rusu Dana Gabriela (98); Ș. g. 206 cl. V Bușe Daciana (110); Ș. g. 280 cl. VI Filip Elena-Violeta (114); Ș. g. 309 cl. VI Idoraşi Camelia-Speranța (90); Lic. mat. fiz. 1 cl. IX Dănilă Gențiana (59), Ionescu Alexandru Dan (162), cl. XI Sava Andrei (148), Safta Cosmin (120), cl. X Bădescu Nicoleta (111); Lic. mat. fiz. „N. Bălcescu" cl. IX Tobă Beatrice-Gabriela (230); Lic. mat. fiz. „M. Viteazu" cl. IX Citu Adrian (130); Lic. fil. ist. 1 fără mențiune de clasă: Eane Andreea (30); fără mențiune de școală cl. X Sambotin Dragoș (72); Lic. „Z. Kosmodemianskaia" cl. V Bălan Mădălina (120), Brandibur Roxana (140); Lic. ind. 35 cl. VI Antonescu Mădălina (100), David Valentin (100); **BUDA-CORBIȚA** (VRANCEA) Ș. g. cl. VI Ionașcu Theodor (127), cl. VII Ionașcu Lidia (150); **BUHUȘI** (BACĂU) Ș. g. 2 cl. III Maxim Ioan Marius (25); Ș. g. 4 cl. VI Butnaru Ana-Camelia (150); **BUNTEȘTI** (BIHOR) Ș. g. cl. V Horge Alin (80), Horge Daciana (80), Pirtea Alina (80), Redac Lorena-Carmen (80); **BUZĂU** (BUZĂU) Ș. g. 2 cl. VI Dăscălescu Laura-Diana (115); Ș. g. 11 cl. VI Dușmănescu Adriana (30), Selaru Florin (73); Ș. g. 15 cl. VIII Predoiu Cosmin (65); Lic. „S. Haret" cl. III Vătăjelu Valentin (96); **CĂLUGĂRENI** (GIURGIU) Ș. g. cl. IX Cotofană Gabriela (100), Dincă Petruța (115), Dumitrescu Dorel (115), Enache Florin (118), Mareș Mariana (115), Moțoi Florin (110), Obadă Elena (120), Pascu Neiu (125), Piperea Ion (115), Tudor Elena (112), cl. XII Alexe Lucica (130), Chiriac Aura (125), Gospodin Simona (130), Ghețu Elena (120), Tutuluș Ion (125); **CĂȘEIU** (CLUJ) Ș. g. cl. VI Boldor Rodica (180); **CEHU-SILVANIEI** (SĂLAJ) Ș. g. cl. II Cordea Vlad (32), Vaida Cristian (32), cl. III Bele Romeo (88), Blidor Loredana (85), Gegar Ioana (85), Gurzea Cristina (85), Ivașcu Ioana (85), Lung Cătălin (85), Nicoschi Mirela (85), Oanca Lavinia (88), Porcar Cosmin (85), cl. V Erdödi Amalia (86), cl. VI Corobea Neluța (90), Iacob Nadia (80), Panes Remus (90);

DEJ (CLUJ) Ș. g. 3 cl. V Buculei Ioana Cristina (250), Ceascai Călin (220), Corăbian Carmen (110), Coroian Ionuț (100), Costin Alina (93), Chiribițan Cristiana (90), Chirilă Marius (72), Gabor Mihai Adrian (90), Haranguș Adina (100), Groșan Marcel (80), Hoza Camelia (430), Lucaciu Adriana (90), Lucaciu Alin Marius (90), Mânecan Roxana (90), Măgurean Emanuela (73), Ossian Norina (110), Rusu Monica (90), Samoilă Gilda (170), Timbuș Cosmin (138), Tarța Augustin-Marian (80), Tudor Ioana (110), Ungureșan Aniela (100), Urian Anda (193), cl. VI Buhățel Dan (118), Călincan Ana-Maria (100), Câmpean Celia (72), Ciceo Raluca (300), Hodorogea Anca (130), Oros Cristiana (136), Orșan Teodora (110), Pop Monica (100), Rus Raul (100), Șandru Lavinia (97), cl. VII Bobiș Oana (140), Misareș Mariana Delia (250), Pop Elena (96), Samoilă Cristina (270), cl. VIII Cora Codruța (120), Ilieș Nicoleta (100), Mureș Simona (67), Pop Remuș-Silviu (120), Pojar Adriana (100), Stan Ciprian (100), Topan Liana (108), Văscan Diana (80); Ș. g. 4 cl. VI Bulea Elena-Maria (105), Coroian Geanina (112), Solomon Corina (105), Suărășan Raul (120), Suteu Ramona-Alina (109), Todericl Liliana (109), cl. VII Mircea Livia (282), Buzdugan Sorina (270); Lic. ind. „A. Mureșanu" cl. IX Topan Liana (312), Văscan Diana (112); **DELANI** (BIHOR) Lic. „S. Vulcan" cl. VI Driba Simona (96); **DEVA** (HUNEDOARA) Ș. g. 8 cl. VI Bălan Amalia (30); **DIRMĂNEȘTI** (ARGEȘ) Ș. g. cl. V Drăguț Otilia-Elena (58), cl. VI Ciolan Lucian Ion (100); **DRĂGĂREASA** (BUZĂU) Ș. g. cl. III Speciac Clara (112); *(va urma)*.

Scanned with OKEN Scanner

TABLA DE MATERII A GAZETEI MATEMATICE PE ANUL 1988

I. ARTICOLE OMAGIALE

1. O aniversare deosebită, de *V. Olaru* 273
2. Profesorul Constantin Ionescu-Țiu la 80 de ani 385

II. ARTICOLE. NOTE MATEMATICE

1. Logică și geometrie (VI): Recunoașterea tehnologiilor, de *K. Teleman* 49
2. Asupra unor operații cu funcții integrabile, de *Constantin V. Crăciun* 51
3. Ecuația $p = q^n + r^n$, de *Marian Deaconescu* 56
4. Asupra unor tehnici de rezolvare a unor inegalități, de *C. Caragea* și *D. Arventiev* 57
5. Rezolvarea în Z^* a ecuațiilor $x^{y^z} = y^{z^x}$ și $x^{y^z} = z^{y^x}$, de *Florin Vulpescu-Jalea* . 59
6. Capcanele infinitului în matematica elementară, de *Cristian Calude* și *Elena Calude* 63
7. Metoda reducerii la absurd în rezolvarea problemelor de aritmetică, de *V. Arsinte* 64
8. Asupra unei inegalități, de *Dumitru Acu* 97
9. Relația de congruență modulo p în $C[X]$, de *Alexandru Ofet* 99
10. Asupra unei proprietăți a anticentrului unui tetraedru, de *Mihai Miculița* . . . 100
11. Aplicații ale integralei Riemann, de *Marcel Chiriță*, *Ion Chițescu* și *Alexandru Constantinescu* 145
12. O inegalitate pentru funcții polinomiale simetrice și omogene, de *Mihai Bălună* 153
13. Configurații geometrice în plan, de Acad. *N. Teodorescu*
    (I) Poligoane convexe înscrise și circumscrise 193
    (II) Dreptunghiuri înscrise în triunghiuri 277
14. Inegalități în patrulater, de *Ovidiu Pop* 203
15. O demonstrație simplă a unei inegalități relative la numărul e, de *Andrei Vernescu* 206
16. Construcții elementare de inele și corpuri comutative, de *Toma Albu* . . . 305, 337, 386
17. Asupra unei proprietăți a seriei armonice, de *I. Sandor* 311
18. Unele considerații metodice asupra teoremelor de medie, de *Ștefan Kadar* 347
19. Utilizarea calculatorului în studiul unor șiruri recurente, de *S. Cremarenco* și *B. Enescu* 434
20. Asupra ecuației funcționale $f(x + a) = f(x) \cdot g(x) + h(x)$, de *D. M. Bătinețu-Giurgiu* și *Florin Vulpescu—Jalea* 437
21. Unde este greșeala, de *Constantin V. Crăciun* 489

III. CHESTIUNI DE EXAMEN. CONCURSURI. (ENUNȚURI ȘI SOLUȚII)

1. Concursul anual al rezolvitorilor Gazetei Matematice, ediția a VIII-a, Curtea de Argeș, 1987, prezentare de *Marcel Țena* 13
2. Soluțiile problemelor date la admiterea în facultăți, sesiunea specială, iunie 1987, pentru componenții echipelor olimpice ale R. S. România, învățământul tehnic, prezentare de *Nusfet Șayanai* 26
3. Concursul de matematică, etapa locală, Februarie 1987
   — județul Constanța 102
   — județul Suceava 105
4. Soluțiile problemelor date la Concursul de Matematică, etapa locală, februarie 1987, județul Teleorman, prezentare de *Marius Burtea* 109
5. Concursul interjudețean „Spiru Haret", ediția a III-a, Târgoviște, 13 Decembrie 1987 115
6. Problemele date la testul din 15 ianuarie 1988 la tabăra națională de matematică din Pitești, de *Ioan Tomescu* 155
7. Concursul interjudețean de matematică „Gheorghe Țițeica", prezentare de *Constantin P. Niculescu* și *George Vraciu*
   — Proba individuală, 15 mai 1987 157
   — Proba pe echipe, 16 mai 1987 223
8. Din problemele date la admiterea în învățământul superior, iulie 1987, de *Maria Elena Panaitopol* 166
9. Soluțiile problemelor date la Concursul de Matematică, clasele IV—VIII, etapa pe sector, București, 1988, de *Alexandru Șetelecan* 208
10. Soluțiile problemelor date la Concursul de Matematică, etapa locală, februarie 1988, județul Giurgiu, prezentare de *Șerban Olteanu* și *Mircea Trifu* 215
11. Concursul de Matematică, etapa județeană, martie 1988, licee 227
12. Concursul de Matematică, etapa finală (pe țară) Cluj-Napoca, 12 aprilie 1988 . . . 283

Scanned with OKEN Scanner

13. Barajul din 15 aprilie 1988, Cluj-Napoca, în vederea alcătuirii echipei României care a participat la cea de-a V-a Olimpiadă Balcanică de Matematică din Cipru . . . 285
14. Soluțiile problemelor date la Concursul de Matematică pentru gimnaziu, etapa finală (pe țară), Brașov, 1988, de Acad. *N. Teodorescu, I. Mitrache, L. Pîrșan, P. Raaonici-Mărcuțescu*
(I) clasele a VI-a și a VII-a 312
(II) clasa a VIII-a 349
15. Barajele de la Craiova pentru alcătuirea echipei R. S. România participantă la Olimpiada Internațională de Matematică din Australia, iulie 1988 355
16. Concursul de informatică, etapa pe țară, București, aprilie 1988 377
17. Concursul de matematică, etapa locală, Constanța, 1988 396
18. A 29-a Olimpiadă Internațională de Matematică, de *Mircea Becheanu* 423
19. Concursul de matematică clasele VI—VIII, etapa finală, Bacău, aprilie 1987 . . . 445
20. Admiterea în învățământul superior, 1988 447

IV. EDITORIALE. PREMII. DIVERSE

1. Editorial pentru un an nou, de Acad. *N. Teodorescu* 2
2. Tabăra națională de matematică, Năvodari, 1—10 septembrie 1987, de Acad. *N. Teodorescu* 3
3. Concursul republican de informatică (pentru pionieri și școlari) Năvodari, 14—22 iulie 1987, de *Nicolae Țăpuș, Viorica Hărăbor, Mihai Jitaru, Radu Nicolescu* . . . 6
4. Premianții Concursului de Matematică, etapa pe țară, Cluj-Napoca, aprilie 1988 . . . 286
5. Elevii de gimnaziu premiați la Concursul de Matematică, etapa finală (pe țară), Brașov 1988 314
6. Concursul anual al rezolvitorilor Gazetei Matematice, de Acad. *N. Teodorescu* . . . 417, 430

V. ÎN SPRIJINUL CANDIDAȚILOR LA EXAMENELE DE ADMITERE

1. Asupra unei familii de locuri geometrice, de *Virgil Brișcă* 198

VI. PROBLEME DIN MANUALE

1. Asupra unei inegalități geometrice, de *Cornel Berceanu* 444

VII. PROBLEME REZOLVATE PENTRU GIMNAZIU

În paranteză este trecută pagina la care se găsește soluția respectivă:
E: 9040(34); E: 9044(35); E: 9051(35); E: 9054(36); E: 9059(65); E: 9060(66); E: 9065(66); E: 9071(67); E: 9082(68); E: 9084(119); E: 9089(119); E: 9093(120); E: 9097(120); E: 9099(121); E: 9101(121); E: 9104(122); E: 9111(170); E: 9116(170); E: 9119(172); E: 9120(172); E: 9123(171); E: 9125(173); E: 9131(230); E: 9133(231); E: 9137(231); E: 9140(232); E: 9142(232); E: 9144(234); E: 9146(235); E: 9148(236); E: 9154(237); E: 9155(231); E: 9162(233); E: 9166(233); E: 9168(236); E: 9172(237); E: 9175(238); E: 9179(287); E: 9185(288); E: 9191(288); E: 9193(319); E: 9195(289); E: 9196(319); E: 9198(320); E: 9205(289); E: 9207(291); E: 9210(320); E: 9212(291); E: 9213(321); E: 9216(292); E: 9224(360); E: 9229(318); E: 9234(357); E: 9235(358); E: 9240(358); E: 9244(360); E: 9245(322); E: 9253(356); E: 9256(357); E: 9257(399); E: 9259(398); E: 9264(400); E: 9266(400); E: 9268(401); E: 9274(402); E: 9275(457); E: 9277(398); E: 9282(457); E: 9283(399); E: 9288(457); E: 9291(458); E: 9296(458); E: 9300(458); E: 9301(459); E: 9302(460); E: 9305(460); E: 9314(461); E: 9319(461).

VII.2. PROBLEME REZOLVATE PENTRU LICEU

În paranteză este trecută pagina la care se găsește soluția respectivă:
20985(40); 20993(41); 20999(42); 21002(43); 21009(68); 21014(69); 21026(70); 21033(71); 21037(125); 21040(123); 21045(126); 21046(125); 21053(128); 21058(129); 21065(174); 21071(174); 21074(69); 21080(175); 21086(177); 21099(246); 21100(175); 21102(175); 21109(249); 21120(251); 21121(246); 21132(247); 21136(248); 21151(403); 21163(404); 21164(405); 21184(293); 21202 (293); 21203(294); 21206(323); 21207(361); 21211(362); 21212(324); 21217(325); 21220(363); 21224(325); 21231(326); 21237(402); 21240(363); 21247(407); 21256(365); 21265(462); 21266(463); 21280(406); 21290(464); 21299(465); 21308(463); 21311(466); 21315(407); 21354(463); 21357(464).

VII.3. PROBLEME REZOLVATE PENTRU CONCURSUL ANUAL AL REZOLVITORILOR

În paranteză este trecută pagina la care se găsește soluția respectivă:
C: 664(48); C: 674(295).

VII.4. PROBLEME REZOLVATE DE INFORMATICĂ:

În paranteză este trecută pagina la care se găsește soluția respectivă:
I: 324(188).

Scanned with OKEN Scanner

VIII. PROBLEME PROPUSE PENTRU CICLUL PRIMAR, GIMNAZIU, PRELIMINARE DE TIP O.I.M. PENTRU ELEVII DIN GIMNAZIU, PENTRU LICEU, O.I.M. și O.B.M., CONCURS ANUAL ȘI INFORMATICĂ

Probleme pentru ciclul primar: pag. 34, 71, 139, 178, 228, 295, 327, 366, 409, 467.
Probleme pentru gimnaziu: pag. 36, 72, 130, 179, 238, 297, 328, 367, 409, 469.
Probleme preliminare de tip O.I.M. pentru elevii din gimnaziu: pag. 40, 76, 134, 182, 245, 300, 332, 370, 413, 476.
Probleme pentru liceu: pag. 44, 76, 134, 183, 252, 300, 332, 371, 413, 476.
Probleme pregătitoare pentru O.I.M. și O.B.M.: pag. 48, 81, 139, 186, 259, Cop. III G.M. 7, pag. 336, 375, Cop. III G.M. 10, pag. 485.
Probleme pentru concursul anual al rezolvitorilor: Cop. III G. M. 1, pag. 82, 140, 187, 260, cop. III G.M. 7, Cop. III G.M. 8, pag. 375, Cop. III G.M. 10, pag 486.
Probleme de informatică: pag. 83, 141, 188, 263, Cop. IV G. M. 7, Cop. IV G. M. 8. Cop. IV G. M. 10

IX. RUBRICA REZOLVITORILOR DE PROBLEME

Pag. 83, 141, 189, 264, 382, 490.

X. PROBLEME PENTRU CICLUL PRIMAR REPARTIZATE PE AUTORI

Albu Andrei-Tudor (23), Andreica Anda (37), Berinde Vasile (70), Blaga Bogdan (58, 59), Boga Ana (66), Bran Ioan (51), Bucșan Mariana (12), Circu Andrei Ioan (52,55), Cojocaru Georgeta (46, 47), Cojocaru Ion (46, 47 , Comănescu Maria (48 , Costin Paulina (92), Crainic Maria (36), Demian Regina (68), Draja Octavian (57), Dumitra Puiu (90, 91), Farcaș Ioan (34), Guran Traian Cătălin (56), Indricău Eliana (54), Lazea Maria Floare (35, 38), Lupescu Victoria-Ana (93), Marin Marcela (89, 95), Matiș Anemaria-Raluca (33), Merișescu Ioana (10, 11), Mikloș Piroska (65), Munteanu Grigore (86, 88), Munteanu Valentina (86, 88), Pirșan Liviu Anton (96), Pop Lucretia (67). Pop Rodica (71), Popescu Emilia (31), Predescu Ion (87), Predescu Z. Ion (43, 94), Radu Viorel (9), Roman Redica (69), Sirbu Ionuț (50), Stoica Maria (82), Szabo Ioan (84), Șova Clement (49), Teirău Eugen (83, 85), Trică M. Ion (30, 32), Uricaru Mihaela (81), Vicel-Turcanu Gh. (44, 45).

XI. PROBLEME PENTRU GIMNAZIU REPARTIZATE PE AUTORI

ABu Irina (E: 9479); Albu Vasile (E: 9545, 9550); Alexe D. Gheorghe (E: 9357); Andrei Ion (E: 9547); Apetrei Gabriel (E: 9459); Apostol Constantin (E: 9383, 9579, 9597, 9610); Asimit Alexandru (E: 9327); Atanasiu Ionel (E: 9488); Balog Laszlo (E: 9531, 9534); Bantă Vilia (E: 9374); Barbul Raluca (E: 9427); Bălăucă Artur (E: 9559); Bănică Teodor E: 9465, 9538); Berinde Vasile (E: 9518, 9522); Berindeanu Mihaela (E: 9417, 9458); Bișboacă Nicolae (E: 9555); Blaga Alexandru (E:9421, 9439, 9443); Blăjuț Eugen (E: 9584); Boga Ioan (E: 9528, 9529); Bogdan Ana (E: 9582, 9600); Boros Andrei (E: 9453); Bran Ioan (E: 9468); Budescu Nistor (E: 9439, 9601); Cașu Ioan (E: 9505); Cebuc Alexandru (E: 9388); Cernat Romeo (E: 9461); Chindriș Călin (E: 9436); Chindriș Ioan (E: 9435); Cindrea Adrian (E: 9536); Ciobanu Angelica (E: 9564); Ciuclan Nadia (E: 9428); Ciucur Ioan (E: 9375); Ciutina Teodor (E: 9500, 9507); Cimpean Dorina (E: 9410); Cirjan Florin (E: 9487); Cîrstea Petre (E: 9473); Codin Dan (E: 9569, 9570, 9576); Cojocaru Daniel (E: 9413, 9486); Constantinescu Dragoș (E: 9378); Constantinescu Laura (E: 9553); Contanu Mihai (E: 9324); Corneliac Andrei (E: 9588); Costan Horeta (E: 9578); Costea Dragemir (E: 9557); Crainic Marius (E: 9369); Crihan George (E: 9340); Croitoru George (E: 9392); Csiki Francise (E: 9422); Cucurezeanu I. (E: 9335); Diaconu Daniel (E: 9563); Diaconu Ion (E: 9502); Dinu Aurelia (E: 9325, 9344); Dinu Constantin (E: 9377, 9475, 9603); Dinu Ion (E: 9325, 9344); Dochia Oana (E: 9519, 9526); Dohi Emil (E: 9419); Domokoș Csaba (E: 9448); Drăgan Vasilica (E: 9543); Drăgănescu Vasile (E: 9581); Dumitrescu Ion (E: 9426, 9451); Eckstein Alfred (E: 9492); Galea Traian (E: 9476, 9548); Gându Gh. (E: 9404, 9484); Gârlan Mihai (E: 9540, 9541); Gevelegean Mihai (E: 9328, 9342, 9346); Ghenghiu Radu (E: 9385, 9469); Ghica Elena-Mihaela (E: 9379); Gidea C. (E: 9408); Grama Emanoil (E: 9330, 9337, 9338, 9343); Grama Florentina (E: 9337, 9343); Grecu Cristian (E. 9539); Grigorescu Cosmin (E: 9486); Grigori Marin (E: 9382); Grosam Mircea (E: 9353); Guraliuc Doina (E: 9364); Guraliuc Mihai (E: 9364); Hălmăgean Eugen (E: 9506, 9511); Hoară Octavia (E: 9510); Horvath Emeric (E: 9424); Hulțanu Mircea (E: 9384); Iacob Viorica (E: 9589); Ilea Ion (E: 9354); Ionescu-Țiu Constantin (E: 9359, 9401, 9464); Ioniță Mihaela (E: 9361); Iov Gheorghe (E: 9504, 9513, 9514); Ivașcu Ady Lucian (E: 9397); Kovacs Adalbert (E: 9431, 9432) Leșe Tudor (E: 9535); Lorant Doina (E: 9493); Loski Ioan (E: 9558); Lupșor Ion (E: 9368, 9396, 9405 9549); Makora Tiberiu (E: 9446, 9456); Manea Ioana (E: 9594); Manole Adrian (E: 9326); Marghescu Gheorghe (E: 9537); Marinescu Damian (E: 9454); Merenyi Imre (E: 9455); Miculița Mihai (E: 9394); Mihăițan Nora (E: 9411, 9418); Minea Maria (E: 9429); Mircă Dumitru (E: 9598, 9608, 9609); Mitricoiu Florea (E: 9365); Modrolu Sterian (E: 9556); Molnar Erika (E: 9425); Moraru Gheorghe (E: 9329, 9333); Morteanu Ion (E: 9355); Năchilă Pete (E: 9415); Neagu Gh. (E: 9414, 9592); Nechita Aurica

(E: 9523); Nechita M. (E: 9586); NedeaVasile (E: 9515, 9516, 9527); Nedelcu T. C. (E: 9360); Negoiță Vasile (E: 9358); Netea Aurel (E: 9434, 9449); Nevelitis Gyöngyver (E: 9450); Nicolau Constantin (E: 9463); Nistor Petru (E: 9491, 9501, 9508); Onet Constantin (E: 9433); Ortofras Eugen (E: 9370); Oțet Alexandru (E: 9387); Păsăreanu Simion (E: 9338, 9340); Pătrașcu Ion (E: 9470, 9471); Pânzaru G. (E: 9331, 9332); Pinte Mirela (E: 9420); Pîrnoc Sermin (E: 9551); Pîrșan Liviu (E: 9416, 9593); Pop Gheorghe (E: 9525); Pop Lucreția (E: 9520); Pop Ovidiu (E: 9444, 9445); Pop Rodica (E: 9423); Pop Valer (E: 9367); Poraicu Corina (E: 9585); Predescu Ion (E: 9542); Predescu Z. Ion (E: 9376, 9438, 9442, 9573, 9574); Puican Florea (E: 9483); Racu Gh. (E: 9398); Rada Constantin (E: 9371); Radu Ioan (E: 9449, 9607); Sabău Ștefan (E: 9521, 9530, 9532); Safta E. (E: 9339); Săvulescu D. (E: 9403, 9466, 9567, 9568, 9583, 9590 9606); Schiteanu Constantin (E: 9478); Scorțanu Cornelia (E: 9565); Secelean Nicolae (E: 9474, 9477); Secoșan Emilian (E: 9497, 9503, 95059); Sichet Maria (E: 9447); Simion Marin (E: 9605); Simion Petre (E: 9360, 9552); Sitaru Daniel (E: 9562); Sîrbu Ionuț (E: 9566, 9587); Smarandache Florentin (E: 9437, 9460); Smarandache Ștefan (E: 9462, 9546, 9560); Smărăndoiu Liviu Mihail (E: 9381); Stana Bogdan George (E 9391); Stanciu Bogdan (E: 9400); Stănică Geta (E: 9409); Stănică Iulian (E: 9409); Stepan I. (E: 9323, 9336, 9341); Stoian Loredana (E: 9345); Stoica Maria (E: 9580); Stroe Bogdan (E: 9544); Stupari Ioan (E: 9441); Succavă Bogdan (E: 9412); Surdu Alina (E: 9498); Szörös Alexandru (E: 9602); Szörös Mugurel (E: 9452); Șelaru Florin (E: 9596); Tarasă Eugen (E: 9591); Tătoiu Oana (E: 9571, 9577, 9593); Tânde N. Ravai (E: 9517); Teodorescu I. (E: 9389); Tică-Diaconu Vasile (E: 9356); Tică-Diaconu Virginia (E: 9356); Tiflea Emilia (E: 9407); Tomuș Aurora (E: 9499); Toteanu Teodor (E: 9561); Trică M. Ion (E: 9395); Țifrea Avram (E: 9563); Udroiu Vasilica (E: 9386); Ungur Ioan (E: 9524, 9533); Vasile Valentin (E: 9402); Verzeanu Dumitru (E: 9824); Vizuroiu Maria (E: 9418, 9440, 9467, 9472, 9480, 9490, 9554); Vizuroiu Nicolae (E: 9418, 9440, 9467, 9472, 9480, 9409, 9554); Vlada Marin (E: 9390); Vlase Alexandru (E: 9362); Zaharia Dan (E: 9599); Zaharia Maria (E: 9599); Zahariade Antonio (E: 9334); Zidaru Vasile (E: 9489).

XII. PROBLEME PRELIMINARE DE TIP O.I.M. PENTRU ELEVII DIN GIMNAZIU REPARTIZATE PE AUTORI

Bătinețu-Giurgiu M. Dumitru (O.G.: 71); Berinde Vasile (O.G.: 66, 68); Cavachi Marius (O.G.: 64); Cucurezeanu I. (O.G.: 63, 79); Horvath Emeric (O.G.: 74); Miculița Mihai (O.G.: 70, 72); Pîrșan Liviu (O.G.: 78, 82); Pop Ovidiu (O.G.: 73); Poponiu Dană (O.G.: 80); Radovici-Mărculescu Paul (O.G.: 69).

XIII. PROBLEME PENTRU LICEU REPARTIZATE PE AUTORI

Acu Dumitru (21346, 21356, 21369, 21511, 21649); Adalbert Francz (21525); Albu Toma (21536); Anca Dorinel (21441); Andreescu Titu (21353); Andrei Cristian (21319, 21329); Andrei Gheorghe (21331, 21340); Andrei Peter (21514, 21522, 21524); Anghel A. Petre (21490); Ani Ioan (21404); Anton Dumitru (21321); Apostol Constantin (21609); Arventiev Dorin (21326, 21328, 21334); Atanasiu Ionel (21375); Balog Laszlo (21554); Banță Vilia (21495); Banyai Mihaela (21458); Băcuță Constantin (21615, 21630, 21640, 21641); Bărbosu Dan (21551, 21558, 21568); Bătinețu-Giurgiu M. Dumitru (21338, 21360, 21420, 21426, 21459, 21508, 21589); Bârsan Mircea (21441); Bejancu Aurelian (21603); Belciug Adrian (21617); Berghea Laurențiu (21605); Berghea Vasile (21594); Bișboacă Nicolae (21350, 21454); Blaga Alexandru (21436, 21438); Bogdan Ioan (21460); Bolovan B. Cornel (21471); Bordea Gheorghe (21461); Bran Ioan (21397, 21600); Braniște Dan (21578); Bulboacă Teodor (21540); Buliga Lucian (21452, 21493, 21577, 21581, 21619); Bumbăcea Alexandru (21410); Burdușel Călin (21450); Bursuc Ion (21635); Caragea Constantin (21320, 21327); Caşu Ioan (21517, 21526); Cantes Gh. (21457); Cavachi Marius (21318, 21324, 21332, 21333); Călin Ovidiu (21501, 21532); Cîrje Gh. (21453); Cernea Ivan (21545); Chiriac Vasile (21611, 21612, 21644); Chirilă Laurențiu (21585, 21618); Chiriță Marcel (21391, 21402, 21421, 21486, 21500, 21538); Chiteș Costel (21625); Ciorăscu Gheorghe (21405); Ciupercă Cătălin (21601); Cîrjan Florin (21574); Cîrtoaje Vasile (21407); Cojocaru Sorin (21620); Colcer Laurian (21582); Comșa Ioan (21428); Constantinescu Alexandru (21587); Coroianu Iulian (21552, 21566); Crainic Nicolae (21488); Crăciun Dumitru (21361); Crișan Ioan (21354, 21497, 21504, 21515); Csongor Csinta (21413); Cucurezeanu I. (21325, 21326); Diaconu Ilie (21376); Deboșan Aurel (21572); Dobre E. (21491); Dobre G. (21491); Drăgan Maria (21604); Dunca Vasile (21516); Ene Aurel (21439, 21472); Ferencz Olosz (21464); Finta Zoltan (21569); Frecuș Viorica (21335); Gătina Monica (21448); Georgescu Iulica (21610); Ghenghiu Radu (21423); Gidea C. (21382, 21383, 21492); Gramatovici Radu (21512, 21537); Gruian Cornel (21389); Guiaș Flavius (21520, 21531, 21539); Györfi Laszlo (21510) Hoară Oratiu (21530); Hopârtean Iacob (21467); Horvath Emeric (21448); Iacob Caius (21533 Iacobina Michaella (21363); Ianculescu Traian (21628); Indre Iuliaa (21546, 21559); Ioan Cătălin, (51575); Ioanoviciu Aurel (21541, 21542, 21550, 21561); Ionescu-Țiu Constantin (21359, 21588, 21622); Isac Doru (21596, 21639, 21646); Joița Cezar (21408); Kecs Antonela (21484); Kovacs Adalbert (21473); Lascu Mircea (21355, 21583); Lesnic Daniel (21372); Lubenov

Scanned with OKEN Scanner

Lubomir (21584); Lupaș Alexandru (21633); Lupu Tudorel (21342); Maiorescu Dan (21447); Manole George (21498); Marchitan Gheorghe (21357); Marghescu Gheorghe (21507); Mecea Petre (21445); Merenyi Imre (21434); Miclăuș Gheorghe (21475); Miculescu Gheorghe (21649); Mihalca Dan (21424); Mihalcea Teni (21348); Militaru Gigel (21394); Moldovan C. (21430, 21433); Morticl Cristinel (21373); Mureșan Ioan (21556); Mușuroia Nicolae (21549, 21555, 21557); Neagu Gh. (21330, 21570, 21597, 21599); Nedelcu T.C. (21352); Nedelea Ion (21624); Netea Aurel (21462); Nichita Florin (21419); Nicolaescu Florin (21455); Nicolau Dana (21417); Nicula Virgil (21367, 21518); Niculescu Liliana (21371); Obreja P. (21613, 21614, 21631); Onet Constantin (21435); Oniciuc Gheorghe (21489); Oprea Nicolae (21401, 21431); Oprișa Doru (21370); Panaitopol Laurențiu (21527, 21567); Papacu Nicolae (21384, 21528); Pavelescu Nicolae (21592); Pădurariu Iulian (21607); Pânzaru Simion (21323); Pârșan Liviu (21469, 21638, 21652); Pop Alin (21442); Pop Marius Lucian (21429, 21432); Pop Ovidiu (21443, 21477); Pop Rodica (21437, 21474); Popa C. Emil (21487, 21579, 21595); Popescu-Pampu Patrick (21576); Popovici Dorin (21374); Popovici Dorina (21322, 21341); Popovici Mircea (21339, 21341); Portal Willy (21563, 21593); Predescu Z. Ion (21616); Predescu Mihaela (21412, 21496); Rojea Sorin (21449, 21476); Roman Neculai (21349, 21451); Rotaru Florin (21381, 21386, 21427, 21466, 21478, 21494, 21502, 21509, 21580, 21590, 21626, 21643); Rotaru P. (21418); Sabău Ștefan (21553); Safta I. (21634); Sasu Aurel (21521); Satnoianu Răzvan (21562, 21573); Săvulescu Dumitru (21368, 21409, 21647); Secleman Dan (21388); Secoșan Emilian (21513); Simion Petre (21505); Simionescu D. Gh. (21632); Siretchi Gh. (21470); Sitaru Daniel (21366); Smarandache Florentin (21440); Stănică Geta (21414); Stănică Iulian (21414); Stoica Elena (21358); Stoica Gh. (21425); Stoica Ioan (21544, 21548, 21560); Stössel Silviu (21362, 21503, 21586); Suceavă Bogdan (21456); Szöllöszy Gh. (21347, 21543, 21547, 21627); Szörös Alexandru (21598); Șindru Călin (21523, 21521); Șiclovan Dana (21379); Ștefan Andrei (21365); Tache Ștefan (21621); Temneanu Mitică (21380); Teodorescu Dinu (21602); Teonian Gavril (21545); Tiotioi Ion (21317); Toderiță Ioan (21564, 21565); Toma Constantin (21519); Toporan Alexandru (21422); Toth Laszlo (21444, 21463, 21465); Trif Tiberiu (21485); Tudor Gh. Ionel (21395, 21591, 21648); Turcu Cristian (21351); Tuțescu Lucian (21345, 21368, 21647); Udrea Călin (21403); Ursu Ion (21642); Vijiac Ionuț (21415); Voicu Ion (21499); Vulpescu-Jalea Florin (21364, 21390); Zaharia Dan (21606, 21629, 21645); Zidaru Vasile (21392, 21406, 21416, 21623).

XIV. PROBLEME PREGĂTITOARE PENTRU O.I.M. ȘI O.B.M. REPARTIZATE PE AUTORI

Bătinețu-Giurgiu M. Dumitru (O: 544, 560, 570); Blaga Alexandru (O: 551); Burdușel Călin (O: 543); Cavachi Marius (O: 549, 564); Chiriacescu G. (O: 566); Ciungu Petică (O: 546); Cîrloaje V. (O: 537); Golceag Florin (O: 569); Cucurezeanu I. (O: 536, 539, 541); Guiaș Flavius (O: 558); Lascu Mircea (O: 548, 565); Mironescu Petru (O: 571); Nicula Virgil (O: 556, 567); Panaitopol Laurențiu (O: 547, 554); Pavelescu Nicolae (O: 563); Petre Liviu (O: 538); Popescu Nicolae (O: 557); Popescu-Pampu Patrick (O: 568); Savu Ion (O: 557); Sălleanu Sorin (O: 538); Stan Augustin (O: 540); Sticlaru Gabriel (O: 542); Tuțescu Lucian (O: 550); Vulpescu-Jalea Florin (O: 544, 545, 559, 562); Zidaru Vasile (O: 541).

XV. PROBLEME PENTRU CONCURSUL ANUAL AL REZOLVITORILOR REPARTIZATE PE AUTORI

Albu Toma (C: 816, 822, 832); Andrei Cristian (C: 755); Andrei Gheorghe (C: 760); Apostol Constantin (C: 839); Bănică Teodor (C: 754); Bătinețu-Giurgiu M. Dumitru (C: 753, 765, 766, 774, 781, 798, 805, 820, 828, 844, 847); Becheanu Mircea (C: 793); Bișboacă Nicolae (C: 778); Bordea G. (C: 790); Burtea Marius (C: 702, 770); Caragea Constantin (C: 756, 790); Cavachi Marius (C: 757); Chiriță Marcel (C: 807); Chițeș Costel (C: 779, 799, 806); Cîrloaje Vasile (C: 788); Comșa Horea (C: 831); Comșa Ion (C: 784); Costian Călin (C: 803); Cristian Marcelina (C: 843, 846); Cucurezeanu I. (C: 763, 771); Dincă Marian (C: 764 826, 840); Finta Zoltan (C: 835); Georgescu Octavian (C: 797); Goncziulea C. (C: 819); Gramatovici Radu (C: 764); Grigorescu Daniel (C: 783); Hoară Orațiu (C: 810); Ionescu-Tiu Constantin (C: 758); Isac Doru (C: 830, 831); Lascu Mircea (C: 761, 772, 788, 802, 825); Lesnic Daniel (C: 768); Mavlo P. D. (C: 777); Munteanu Ioana (C: 767); Munteanu Norocel (C: 815, 833); Neacșu Ciprian (C: 761); Nicolae M. (C: 817); Nicolau Dana (C: 813); Nicula Virgil (C: 787, 801, 824); Panaitopol Laurențiu (C: 782, 814); Pavelescu N. (C: 836); Podgornei Titus (C: 829); Pop Alin (C: 818); Popescu Nicolae (C: 785); Radu Mircea (C: 837); Rotaru Florin (C: 789); Sasu Aurel (C: 812); Savu I. (C: 759, 769, 775, 823, 845); Secoșan Emilian (C: 811); Sița Anca (C: 834); Soare N. (C: 821); Stan Augustin (C: 827); Stössel Silviu (C: 800, 808); Șamodi Marius (C: 844); Tache Ștefan (C: 791); Tănasie Dan (C: 773); Toderiță Ion (C: 795, 841); Tomuța Elena (C: 809); Tudor Gh. Ionel (C: 842); Țena Marcel (C: 780, 796, 848); Voica Cristian (C: 838); Vulpescu-Jalea Florin (C: 765, 766, 775, 792, 804).

XVI. PROBLEME DE INFORMATICĂ REPARTIZATE PE AUTORI

Crăciunaș Silviu (I: 327, 328, 330, 338); Ionescu Gheorghe (I: 342); Rău Petre (I: 333, 335); Stössel Silviu (I: 329, 331, 332, 334, 336, 340); Vlada Marin (I: 337, 339, 341).

Scanned with OKEN Scanner

ANUNȚ IMPORTANT

Cu începere din anul școlar 1988 — 89, dînd curs numeroaselor solicitări din partea elevilor și profesorilor, S.S.M. extinde „Concursul anual al rezolvitorilor Gazetei Matematice" la clasele gimnaziale VII și VIII.

Regulamentul concursului rămîne același cu pentru elevii liceelor:

1) Înscrierile se fac prin cerere individuală cu recomandarea conducerii școlii și a profesorului conducător.
2) Concurenții ambelor clase VII și VIII vor rezolva aceleași grupe de probleme începînd cu Nr. 5—6/1988 din categoria probleme preliminare de tip O.I.M. pentru elevii din gimnaziu, punctajul fiind de 25 de puncte pentru fiecare problemă perfect rezolvată și redactată.
3) Rezolvarea perfectă a problemelor din categoria Probleme preliminare de tip O.I.M. pentru elevii din gimnaziu dă dreptul concurenților să rezolve și probleme din casetele destinate elevilor din clasele IX—X, considerîndu-li-se punctajul respectiv.
4) Concurenții selecționați pentru această activitate la G.M. vor fi invitații Gazetei Matematice la tabăra-concurs din luna august 1989 la Cîmpulung-Muscel, unde vor trece două probe scrise de concurs, în vederea clasificării finale și vor participa la întregul program instructiv-educativ și recreativ.

AVIZ

Facultatea de matematică, Inspectoratul Școlar al Municipiului București, Filiala S.S.M. București organizează, în vederea stimulării activității de cercetare științifică a cadrelor didactice din învățămîntul gimnazial și liceal, o sesiune de comunicări științifice. Sesiunea va avea loc în București în ultima decadă a lunii aprilie 1989 și cuprinde următoarele secțiuni:

Algebră, Geometrie, Analiză matematică, Matematici Aplicate și Mecanică. Sînt invitate să participe cadrele didactice din Municipiul București. Înscrierea se face la S.S.M., la secretariatul Sesiunii, str. Academiei nr. 14, București, pînă la data de 1 martie 1989 și va fi însoțită de rezumatul lucrării.

I.P. Informația c. 2662 Index 43 460 Lei 7

Scanned with OKEN Scanner